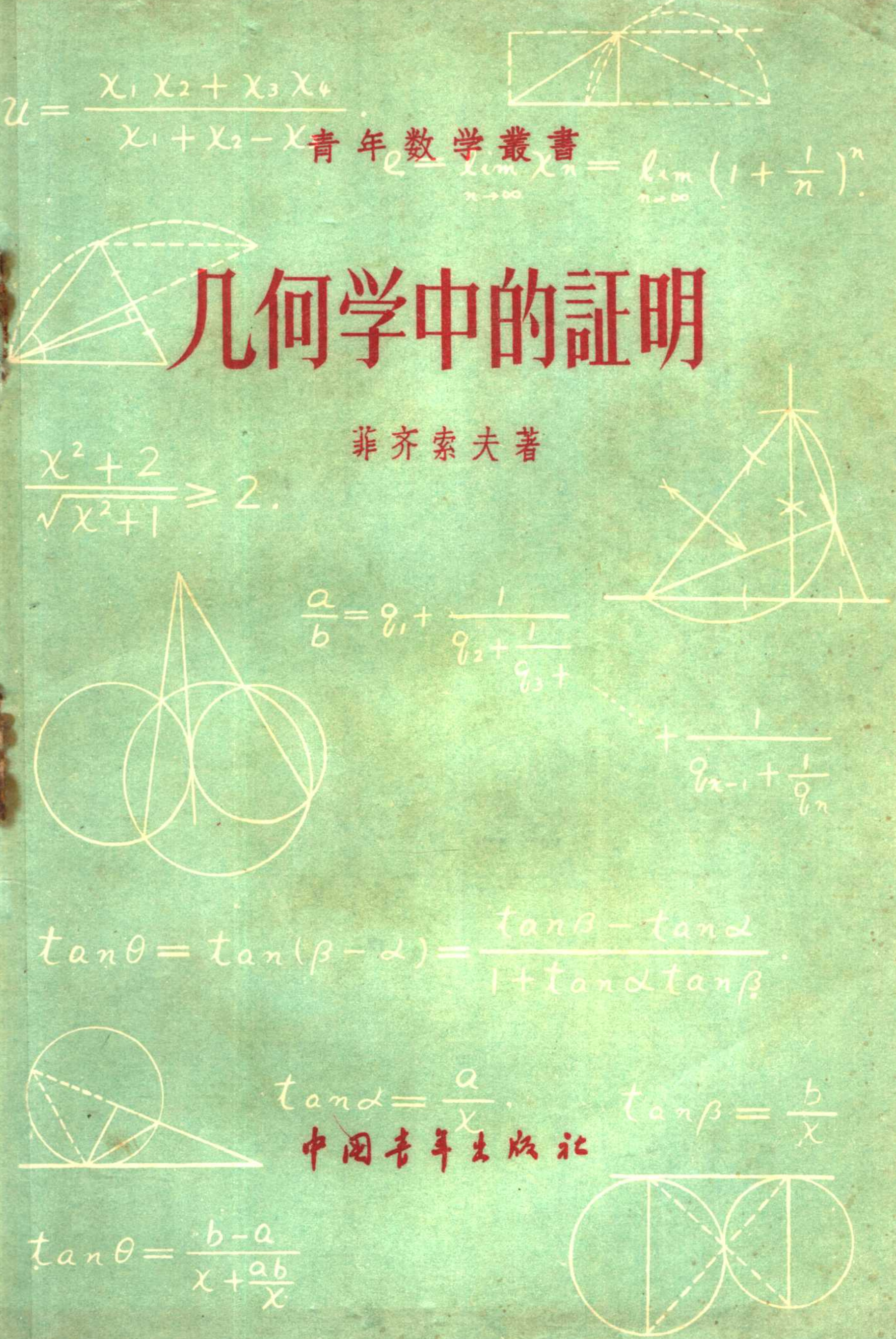
青年数学叢書

几何学中的証明

菲齐索夫著



中国青年出版社

青年数学叢書

几何学中的証明

菲齐索夫著
力人譯

中国青年出版社
1958年·北京

几何学中的証明

(苏)菲齐索夫著

力 人 譯

•

中国青年出版社出版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第036号

錦州印刷厂印刷

新华書店总經售

•

787×1092 1/32　2 印张35,000字

1958年7月北京第1版　1958年7月北京第1次印刷

印数 1—38,000

统一书号：13009·160

定价(8)二角二分

內 容 提 要

这本小册子可以帮助初学几何的中学同学理解几何学中的証明，糾正一些容易产生的錯誤看法。它告訴讀者，什么是証明？为什么必須証明？証明应該是怎样的？几何学中有哪些命題可以不加証明地采用？說理淺显而透徹，文字也很生动。書里列举了很多日常碰到的关于平面几何的例子来說明問題，并不涉及高深的数学理論，只要具有平面几何学的初步知識，便能閱讀。

А. И. ФЕТИСОВ

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ

В ГЕОМЕТРИИ

ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1954

青年数学叢書

几何学中的証明

菲齐索夫 著
力 人 譯

中国青年出版社
1958年·北京

目　　次

前　言

有一回，正是新学年剛开始的时候，我偶然听到了兩位姑娘的談話．她們里面大些的一位才升到六年級，小些的一位才升到五年級．她們在交談关于功課、老师和同学的印象，关于新学科的印象．那位六年級同学对于几何課①感到很詫异，她說："眞奇怪，老师走进教室，在黑板上画了兩个相等的三角形，随后整堂課就向我們証明，它們是全等的．我怎么也不明白，这有什么必要呢？"小些的那位姑娘問道："那末你怎么做习題呢？""照着教科書讀熟唄……只是什么地方該安上什么字母，記起来实在困难……"

就在那天傍晚，我听到这位姑娘坐在窗口，孜孜不倦地在复习几何："为了証明，我們把三角形 $A'B'C'$ 放在三角形 ABC 上面……把三角形 $A'B'C'$ 放在三角形 ABC 上面……"她一遍又一遍地重复着．可惜我沒有能知道这位姑娘几何学得怎样；但是可以想象，她对这門功課学起来是相当困难的．

过了几天，我同宅的鄰居多列到我这儿来，他也是六年級学生，并且也在抱怨几何．在課堂上老师向他們講解了这样一条定理：三角形的任意一个外角，大于和它不相鄰的任意一

① 苏联学校六年級相当于我国的初中二年級．——譯者注

个內角（內对角）；并且要他們回家来好好掌握它．多列指給我看吉西略夫編的課本上的图（图1），問道："这張图上不是很明显嗎，三角形的外角是鈍角，而內对角是銳角，为什么还要作这又長又复杂的証明呢？鈍角本来就比銳角大，这是很明显的，用不到作什么証明．"多列在尽力說服我．于是我只得向他解釋，这个命題完全不这样明显，完全有理由要求証明这个关于三角形外角的命題．

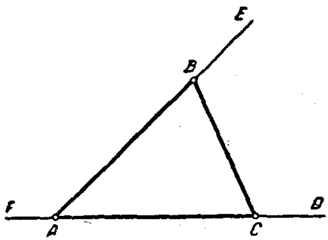


图 1.

最后，就在不久以前，有一位八年級①的同学拿他的課卷給我看，照他的話說，是老师"不公平地"少打了他的分数．他提出来的那道題是：已知一等腰梯形，上下底各長 9 和 25 厘米，腰長 17 厘米，求梯形的高．为解这道題，他作了梯形的內切圓，并且指出，根据外切四边形的定理（外切四边形兩組对边的和相等），在这个梯形里是可以作一个內切圓的（$9+25=17+17$）．然后，高就由这个梯形的內切圓的直徑确定，它等于梯形上下底的比例中項（这条定理已經在以前的一次作业里証明过了）．

解答显得十分簡單而且令人信服，但是老师却着重指出，引用关于外切四边形的定理这一步做得不对．这位八年級同

① 苏联学校八年級相当于我国的高中一年級．——譯者注

学摸不清头脑了．“外切四边形兩組对边的和相等，这难道还有不对嗎？我們的梯形上下兩底的和恰好等于兩腰的和——可見，在这个梯形里是可以作一个內切圓的．究竟錯在什么地方呢？”他問道．

象我剛才說的这种事例可以举出很多．同学們常常弄不明白，有什么必要来証明这些不用証明就很明显的眞理，証明有时候也显得过分复杂而冗長．往往还有这样的情形，看来似乎是明确而令人信服的証明，在严格审查以后，发現原来是錯的．

这本小册子是为了帮助同学們了解下面这些問題而写的：

（一）什么是証明？

（二）为什么必須証明？

（三）証明应該是怎样的？

（四）几何学的哪些命題可以不加証明地采用？

一　什么是証明？

1．那末，我們就来自問，究竟什么是証明呢？設想一下，如果你要想使跟你談話的人相信地球是球形的；那末，你就得告訴他地平綫会随着地面上观察者升高的程度而扩展开去，告訴他关于环球旅行，告訴他在月食时地球投射在月球上的阴影是圓的，等等．

上述你希望用来使你对方信服的每一件事，叫做証明的

一个論据；所有这些論据的总和，就叫做論証。論据的力量或說服力建立在什么基础上呢？作为例子，我們来分析一下上述論据的最后一个。我們确信地球一定是球形的，因为它的阴影是圓的。我們确立这个論断，是由于从亲身經驗知道：一切球形物体都投下圓形的阴影，反过来說，从各个位置都投下圓形阴影的物体一定是球形的。因而，在这情况下我們首先根据事实，根据我們直接的生活經驗，这些經驗就是証实我們周圍物質世界里的物体性質的凭据。然后才采用推理的方法，比如在这情况下推理是按下列次序进行的。

“凡是从各个方向都投下圓形阴影的物体必定是球形的。”“在月食时地球处在月球的不同位置，但总是投下圓形的阴影。”于是得到結論：“因此，地球是球形的。”

我們来举一个物理学上的例子。十九世紀六十年代，英国物理学家麦克斯韋确定，电磁振蕩以光速在空間傳播。这情况促使他提出光也是电磁振蕩的假設（假說）。为了証明这个假設的正确性，必須确定，光和电磁波相似的地方不限于它們有相同的傳播速度这一点；必須引用足够有力的論据来証明这兩种現象的共同性質。一些实驗的結果就是这样的論据，在这些实驗里观察到了电磁場对于各种不同光源发出的光的輻射性質都有明显的影响。还观察到其他一系列的事实，这些事实有力地指出，光和电磁波具有同样的性質。

再举一个算术上的例子。任意取一些奇数，各自平方，再从得到的各个平方数减去一。例如：

$$7^2-1=48;\ 11^2-1=120;\ 5^2-1=24;$$

$$9^2-1=80;\ 15^2-1=224$$

等等．研究一下得到的数，我們发現它們有一个共同的性質：它們每一个都能被8整除．用其他的奇数再进行几次尝試，也导致同样的結果，我們就提出假設："一切奇数的平方減去一，得到的数是8的倍数．"

因为現在我們所說的是一切奇数，所以我們必須引用对于任何奇数都合用的論据．考慮到这一点，我們想到，任何奇数有 $2n-1$ 的形式，这里 n 是任意的自然数．奇数的平方減去一可以写成这样的表示式：$(2n-1)^2-1$．脫去括弧就得到：$(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=4n(n-1)$．

得到的式子在n等于任意自然数时都能被8整除．事实上，乘数四表示数 $4n(n-1)$ 能被4整除．此外，$n-1$ 和 n 是兩个連續的自然数；里面必定有一个偶数；因而我們的式子必定还含有一个因数2．

所以，数 $4n(n-1)$ 永远能被8整除，这就是要証明的．

从这些例子，我們可以知道我們認識周圍世界以及它的物体、現象和規律性的基本方法．第一种方法是：根据对物体和現象所作的大量观察和实驗，揭示出它們的普遍規律性．从我們引用的例子可以看出，人們根据观察确定了物体的形狀和它的阴影之間的关系；多次的观察和实驗証实了光的电磁本質；最后，我們对奇数的平方数进行的研究能够确定这些平方数減去一以后的性質．从大量特殊情况的研究得出普遍的結論，这种方法叫做归納法．

当我們已經知道了某些普遍規律，把这些知識应用到特

殊情况中去，这时候我們引用的是另一种方法。这种方法叫做演繹法。在最后一个例子里，我們就是这样把算术的普遍規律运用到特殊情况，也就是用来証明任何奇数存在某种性質。

这个例子向我們指出，归納法和演繹法是不能互相脱离的。归納和演繹的統一性，是科学思維的特征。

不难察覚，在所有証明的过程中我們都运用了这兩种方法。当我們为証明某一个命題而寻找論据的时候，我們就轉向实驗、观察、事实，或者轉向那些已經証明是可靠的命題。根据这些到手的資料，我們再对这个要証明的命題的肯定或否定进行推理。

2. 我們还是回到几何学上来。几何学研究物質世界的空間的性質。我們把决定物体的形狀、大小和相互位置的这种性質叫做"空間的"性質。显然，認識这些性質的必要性是和人們实踐的需要相联系的：人們为了制造机器、建筑房屋、修路、开运河等等，必須測量長度、面积和体积。当然，最初的几何知識是从大量的观察和实驗中用归納方法得到的。但是，随着几何学眞理的积累，发現其中有不少可以靠推理从另一些眞理得到，也就是用演繹法得到，不必再用專門的实驗。

比如說，多次的观察和实驗使我們相信，"通过兩点，可以而且只可以作一条直綫。"根据这条眞理，不用任何实驗，我們就可以确信，"兩条不同的直綫不能有一个以上的交点。"这条新的眞理通过十分簡單的推論就得到了。实际上，如果我們假設兩条不同的直綫能有兩个交点，那末从这里我們应該作

出結論：通过兩点可以引兩条不同的直綫；这是和前面已經确立的眞理相抵触的。

人們的实踐活动导致发現大量几何学眞理，它們反映出我們对物質世界的空間形体的認識。仔細研究这些眞理，发現其中有一些可以从另一些通过邏輯推理的方法得到。这就导致这样的想法：从所有几何学眞理中把最簡單、最普遍的部分划分出来，这部分用不着証明就可以应用；其余的几何学的性質和关系就从这些基本眞理用演繹法推导出来。

这样的想法古希腊的几何学家就已經产生了，他們开始使他們所知道的几何学眞理系統化起来，把它們从比較少的基本命題推导出来。紀元前 300 年，希腊亚历山大里亚的几何学家欧几里得提出了在当时最完整的几何学系統的叙述。在这叙述中，一些不必証明就可采用的命題划分开来了，这就是所謂**公理**。其余正确性要靠証明显露出来的命題，开始叫做**定理**。

欧几里得几何学体系已經存在了二千多年，甚至現在学校里的几何学叙述在很多部分还反映出欧几里得的影响。这样，在几何学体系里，我們就有了比較少数的基本眞理——公理，它們用归納法得到，不必証明就可以采用；而其余的几何学眞理靠演繹推理从公理导出。所以几何学基本上是一門演繹的科学。

現在很多几何学家的工作是在設法揭示出所有对于建立几何学体系必不可少的公理，并且尽可能地减少公理的条数。这方面的工作还在上个世紀就开始了，虽然已經做了很多，但

是直到現在也还不能認为这項工作已經做得十分完美了.

这样,总結本节的全部說明,我們現在可以回答这个問題了:究竟什么是几何学上的証明呢?正象我們看到的,証明就是推理的系統,要証明命題的正确性就应該用推理方法从公理和以前証明了的眞理推导出来.

下面再回答一个問題:用演繹推理得到的命題,它的正确性是拿什么来保証的呢?在演繹推理时,我們把某些普遍規律运用到特殊情况,因为十分明显,所有一般地总是正确的东西对于每个个别情况也將是正确的.这就保証了演繹推理的正确性.

例如,假使我說,任何三角形三个內角的和等于180°,几何图形ABC是一个三角形,那末,毫无疑問:$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.仔細地研究几何学,就不难确信,我們对于推理每一步都是这样考虑的.

二 为什么必須証明?

1.現在我們来設法回答第二个問題:"为什么必須証明?"

証明的必要性是由于邏輯学(邏輯学是一門关于正确思維的規律的科学)的基本規律之一——**充足理由律**的結果.这个規律包含这样的要求:要求我們提出的任何論断是有根据的,也就是說,要使得論断帶足够有力的論据,来証实我們的論断的正确性以及它跟事实和实踐的一致性.这样的論据

可以是能够用观察和实驗方法来驗証的指示，也可以是含有推理系統的結構正确的討論。

在数学上和我們有关的主要是后一种論据。

証明几何学命題的目的就是，要从已經証明的或人所共知的眞理，用邏輯推理来确定这命題的可靠性。

但是，这里終究发生問題了：假使要証明的命題不加証明就足够清楚了，那末是不是还值得証明呢？

例如中世紀的印度数学家們就贊成这样的观点。有很多几何学命題，他們并沒有証明，却对它們繪制了充分达意的图，图下就写了"你看！"一句話。比如說，印度数学家巴斯卡拉·阿查里雅著的"利拉瓦底"一書里的勾股弦定理就是这样（图2）。讀者应該从这兩張图"看出"，直角三角形在兩条直角边上作成的正方形面积的和等于斜边作成的正方形的面积。

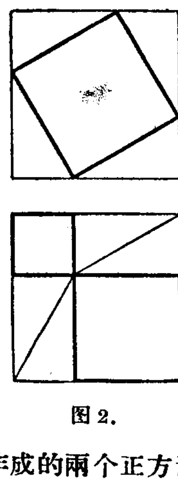


图 2.

能不能說，在这情况下沒有証明呢？当然不能！假使讀者只是看着图而不加思索，恐怕他就得不到什么結論。事实上，这位著者是假定讀者不仅看图，而且还进行思考的。讀者应該明白，眼面前画着的是兩个面积相等的正方形。第一个正方形是由四个全等的直角三角形和它們的斜边圍成的一个正方形構成的，第二个正方形是由同样的四个直角三角形和在直角边上作成的兩个正方形構成的。剩下的只要考虑到，如果从等量（兩个相等的大正方

形的面积)減去等量(四个直角三角形的面积),那末我們剩下的也是等量:第一个正方形里三角形斜边圍成的正方形的面积和第二个正方形里在直角边上作成的兩个正方形面积的和相等. 我們可以看到,在这里單靠眼睛看是完全不够的,还需要思考和判断.

但是,也許几何学里眞会有这样的定理吧,它确实显而易見,可以不用作什么思考?

这里首先应該指出,在精密科学里一貫靠"显而易見"是不可以的,因为"显而易見"这个概念是非常模糊和不可靠的:有些事对某一个人是十分显而易見的,而另一个人却感到非常可疑. 只要想一想,亲眼看見某一件事的人們在描述这件事时是多么不一致,根据所謂"見証人的供詞"来确立眞理有时候是多么困难,你就明白了.

可以举一个有趣的几何学例子,来說明我們是会被表面上的"显而易見"含糊騙过的. 这个例子是这样的:我拿一張紙,在上面画一条連續的閉綫;然后我用剪刀沿这条綫把紙剪开.要問:割縫的兩端碰头以后,这張紙怎样了呢?恐怕你們大多数人会不加思索地回答:这張紙分成單独的兩片了. 但是,这个回答可能是不正确的. 我們且来做一个这样的实驗:取一条紙帶,先把帶的一端翻过来,然后把它粘合成环形. 結果我們得到了所謂"**謀比烏斯帶**"(图3).(謀比烏斯是德国数学家,他研究过这种面.)現在如果順着紙帶沿閉綫把这片紙剪开,使割縫和它兩边差不多等距离,那末这張紙幷不分成單独的兩部分——我們手里仍旧是一整片紙. 类似剛才說过的一

些事实不得不使我們考慮到，根据“显而易見”而提出的理由，我們究竟能相信多少。

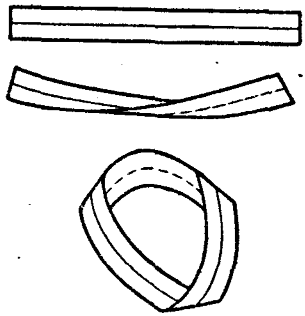


图 3.

2. 我們更仔細地来分析这个問題。把上面講过的这位六年級同学的情况作第一个例子。这位姑娘覺得很奇怪，老师画了兩个全等三角形，再来証明这件好象是十分显而易見的事情，就是：它們是全等的。当然，事实完全不是这样：教师根本沒有画全等三角形，她画了三角形 ABC（图 4）以后，却說另一个三角形 $A'B'C'$ 是这样構成的：$A'B'=AB$，$B'C'=BC$，以及 $\angle B'=\angle B$；然而我們并不知道，$\angle A'$ 和 $\angle A$、$\angle C'$ 和 $\angle C$ 以及边 $A'C'$ 和 AC 是不是相等（要知道，她并沒有按照角 A 和 C 来作出角 A' 和 C'，也沒有把边 $A'C'$ 作得和 AC 相等）。

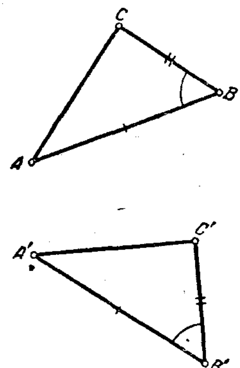


图 4.

可見，在这种情况我們必須从条件 $A'B'=AB$、$B'C'=BC$ 和 $\angle B'=\angle B$ 推出三角形的全等性来，这就是說，它們其余部分的相等当然是需要作一些推論，也就是需要証明的。也很容易指出，根据兩三角形三对相应元素分别相等而得到它們是全等的結論，远不是这样“显而易見”的，一下子就可以看出来的。我們把关于三角形全等的第一条定