恒谦教学研究

金版 专辑系列

高考总复习

恒谦教学与备考研究中心研究成果

全国名牌重点中学特高级教师编写

金版

第五次修订

全新版推出

专辑(1)

(学生用书)

丛书主编 方 可

数学

北京教育出版社

恒谦教学研究

金版专辑系列

恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

高考总复习

金版专辑(1)

(学生用书)

数学

丛书主编 方 可
本册主编 罗仲华
撰 稿 人 罗仲华 叶晓俐
杨志芳 邵迎春

北京教育出版社

恒谦教学研究　金版专辑系列

高考总复习

金版专辑(1)

高考总复习金版专辑(1)
数　学
SHU XUE
(学生用书)
丛书主编　方　可
※
北京教育出版社出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100011
网　址:www.bph.com.cn
北京出版社出版集团总发行
新华书店经销
人民日报社西安印务中心印刷
※
880×1230　16开本　23.25印张　715 000字
2004年5月第2版　2004年5月第1次印刷
印数:1－10 000
ISBN 7－5303－1720－2
G·1695　定价:27.50元

与高考改革同步 与“二元命题”伴行

——《高考总复习金版专辑》第五次修订题记

值此《高考总复习金版专辑》第五次修订再创新高之际，正赶上我国高考改革全面转型之年。以我恒谦人奉献之涓流，能汇入国家改革大潮之江河而感到庆幸！

我国高考改革全面转型的标志之一是多年的《考试说明》在今年升级为《考试大纲》。高考命题依据《考试大纲》但不拘泥于《考试大纲》就更容易让人明白了："依据"的是知识内容，"不拘泥"的是知识运用及能力实践。

与这种改革同步，恒谦人所做的新奉献之一是完成了《高考总复习金版专辑》的第五次修订。在新的《考试大纲》的指导下，此次修订我们力求完成以下几方面的内容：

（1）推进新课程改革，试题向新内容倾斜：降低难度，突出新意。

（2）推进新题型设计，题目向新情景倾斜：减少题量，突出品质。

（3）推进研究性学习，题解向开放型倾斜：研究问题，突出人文。

（4）推进新高考机制，命题向多元化倾斜：交流特色，突出个性。

我国高考改革全面转型标志之二是多年来全国统一命题在今年转型为中央和地方“二元命题”。但这并不等于完全将命题权下放到地方。中央统一命题仍为高考命题的主体，地方命题须参照中央命题的精神和款式，差异主要区分在试题难度和区分度上，知识目标和能力目标全部统一在《考试大纲》的要求下。

与“二元命题”伴行，恒谦人所做的新奉献之二是将中央命题的统一性及地方命题的差异性充分体现在《高考总复习金版专辑》的修订工作上。《高考总复习金版专辑（1）》突出了中央命题的统一性，并按普通中学 、重点中学之分编成了两种版本。《高考总复习金版专辑（2）》将突出地方命题的差异性，在试题的难度和区分度上按不同省份区分较大，以适应不同考生的需求。

恒谦教学与备考研究中心研究成果
全国名牌重点中学特高级教师编写

前言

成功的花儿，人们只惊慕她现时的明艳，
然而，当初她的芽儿，浸透了奋斗的泪泉，
洒遍了牺牲的血雨。

——冰心

成功来源于积累，一点一滴地积累！

成功来源于奋斗，永不停息地奋斗！

恒谦人倾六年心血，动万千之众，大浪淘沙，沙里浪金，终于获得了“金版专辑”系列的成功。

《高考总复习金版专辑》丛书以其前瞻独到的理念、科学合理的策划、新颖实用的选题、精益求精的编校、别具匠心的包装，攻城入校，深入人心。“金版专辑”已成为众多师生心目中的一个优秀品牌。据不完全统计，累计销量已突破50多万套，全国各地有2000多所中学使用《高考总复习金版专辑》。

2004年3月，教育部新核准了天津、辽宁、江苏、浙江、福建、湖北、湖南、广东、重庆9省市高考自主命题。至此，包括原有北京、上海在内的自主命题的省份已达11个省。业内人士普遍认为，未来的高考用书市场将发生新的变化，那种一书应对天下的局面已不复存在。在此背景下，恒谦教学与备考研究中心认真地研究了高考最新动向和变化趋势，走访了众多名校的备考师生，参阅了各类教辅期刊的最新资讯，组织全国各地极富经验的一线名师对《高考总复习金版专辑》丛书进行了全面、细致的修订，并适时推出了《高考总复习金版专辑》的姊妹篇《高考总复习金版专辑·重点中学版》。

面对2005年高考，我们仍然倾心推广科学系统的复习方法——“三轮复习法”。

(1) 首轮基础复习用书——《高考总复习金版专辑（1）》对教材内容进行系统复习，注重学科内综合的提炼与复习引导，突出对学科知识的延展性和联系性探究，体现了由“深挖洞”向“广积粮”备考思路的转变。

(2) 二轮强化复习用书——《高考总复习金版专辑（2）》主要结合最新《考试大纲》对学科综合能力的考查要求，以专题形式进行备考复习与训练。一是进一步从“3+X”考试特点和要求出发，注重学科内综合的实践和提升；二是注意梳理跨学科综合的知识要点与考查内容；三是以最新材料和社会热点话题命制综合模拟试卷进行强化训练，增强整体复习的效果。

(3) 三轮实战复习用书——《高考总复习金版专辑（3）》指点应试技巧，传授解题绝招，进行考前热身，预测高考方向。

《高考总复习金版专辑》丛书具有以下特色：

一.灵活、实用的模式，更具人性化。

继承“以人为本，服务读者，服务教学”的宗旨，各个学科分别配备教师用书和学生用书。教师用书内容丰富，编排合理，解答详尽，题量充分，人性化设计，便于备课、讲解、查阅。学生用书内容精练，设计实用，题后留空，简答附于书后，使用方便。

二.针对各学科的复习特点，科学规划了备考框架，突出了专（有针对性）、新（有前瞻性）、活（有启发性）、实（有操作性）。

高考总复习

金版专辑(1)

专 追踪高考走向，全方位锁定高考考点，讲解、例释、练测三位一体。

高考试题中80%是基础题，考试的成败主要取决于这些题目的解答情况，因而本丛书（包括重点中学专用版）均强调基础为重、回归教材，从显性的基本知识到教材延伸的隐性知识，再到源于教材而高于教材的知识运用和内在联系，充分体现诠释细致、理解到位、穿珠结网、层层递进。内容全面细致，容量巨大。既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识的死角。题型全面、充分，选择余地大，既是高考复习的辅助教材，又是答疑解惑的工具书。

新 融入大量新颖的试题。有许多题目是编者原创或精心改编的，与生产、生活与现代科技的新情境紧密关联，既是新信息的载体，又是能力训练的极好素材。

关注、体现新课程、新教材的最新理念。与之不相适应的内容均做了不同程度的删减或弱化处理。

活 依据2004年考纲的最新变化，对各科的复习内容均作了相应的调整或补充。各学科分册的体例不再强求死板的统一，更注重学科自身的特性和高考的特殊要求。

一方面编写时吸收了最新教研成果，采用了大量鲜活的新材料、新观点；另一方面复习训练分三级创新设计，点点夯实，层层提升。

实 本着“起点低，落点高，基础为重，灵活运用”的原则，注重知识的整体框架和网络结构的搭建，每一部分都有阶段性的知识结构图，使考生能形成对知识全局和整体的全面认识，便于最终灵活地迁移、转化、运用。

多角度、深层次地对知识进行梳理、归纳，挖掘、提炼解题的方法、规律和技巧。教师用书、学生用书对此进行了完美的匹配对接，既方便教师的教学讲授，又不致定势化学生的思维。

最后建议备考的师生在使用本系列丛书时，注意以下三点：一要合理、科学地安排时间，不仅要把握好系统复习、专题复习和综合模拟的时间进度，还要区别对待重点内容与一般内容；二要根据自己的教学实际灵活选材，有选择地针对自己的弱项进行强化训练；三要认真研读“学法点窍”、“解法归纳”、“高考预测”以及每道例题或考题后的“评注”、“评析”，因为这些都是编者多年高考辅导经验与解题智慧的结晶。

《高考总复习金版专辑》第二轮、第三轮复习使用的接续产品将陆续推出，相信会给您的 高考后续复习送去新的惊喜！

鉴于本系列丛书立意新颖，编写难度较大，书中难免会有错漏之处，敬请不吝指正。

恒谦教学与备考研究中心
《金版专辑》系列丛书编委会

本书导读

《高考总复习金版专辑（1）》数学包括教师用书和学生用书两个分册，供高三师生第一轮总复习时同步参阅。本书针对2005年高考的命题趋势，完全从教师备考的实际需要出发，依据教材或知识系统的先后顺序划分章节，纵向进行复习。教师用书内容全面、丰富、详细、准确，便于教师讲解指导；学生用书编写体例科学、实用、习题后均留有适当的答题空，利于学生复习使用。

本书每一章（节）的主要栏目（打*号者为教师用书独有）设置如下：

内容概要*

简要介绍本章的主要知识内容、其在本学科中的地位以及与其他相关章节知识的联系等。

结构框图*

以框图的形式简明揭示本章的整体知识体系结构，便于理清复习思路。

复习攻略*

依据最新考纲，指明本节复习所应达到的高考目标。

难点聚焦

对本节知识中的难点、疑点进行简要剖析和讲解。

学法点窍

归纳有关原理、定律，引申与本节考点相联系的知识，并给出具有指导意义的学习方法、复习建议及注意事项等，从最为有效的学习方法上点明思路。

题型分类析评

精心遴选若干新颖、典型的范例进行讲解，着重点拨解题的突破口，提供多种解题思路，并帮助分析各种思路的利弊及可行性。解后的评注旨在反思解法，剖析易混概念及常见错误，优化解题意识。

高考导向标

选取历年经典高考试题，直击高考热点题型，全方位、多角度透视高考命题新特点，让读者与高考进行“零距离”接触。

解题步步高

分三个层次对学生进行训练，使学生轻松提高答题能力。同时也将“3+综合”类题目单独提出，针对性强。教师用书详尽解答直接跟在每道题后，学生用书的简答统一附在全书最后。

A 组（基础题）：以复习基础知识的客观题为主，难度不高，但知识、类型覆盖全面。

B 组（综合题）：注重知识的综合提高，主、客观题兼顾，类型齐全，难度接近高考，更强调提升综合能力。

C 组（高考预测题）：依据考纲，预测高考在本节考查的知识点及题型，进而设置题目，难度和综合性完全达到高考水平，使学生明确方向并发现自身的薄弱点，以便尽快提高应考能力。

本书每章编排了以下能力节次：

全章综合应用与高考

在每章中单独成篇，从学科内综合和跨学科综合两个层次讲解、例析和训练。结合高考的新要求，通过讲解本部分的综合问题，分析说明本部分知识的可综合点和可渗透点，以期使学生体会并明确考试的目的、要求 、切入点、题型及复习方法，从而全面系统地适应高考。

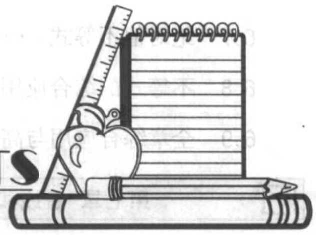
自测试题

就本章内容给出一套自测题，重点让学生自我检测复习效果，难度略低于或接近高考要求，题型仿高考题，16开活页装订，随学生用书赠送，便于教师进行统一测试；教师用书题后直接带有详尽解答，学生用书简答统一附于全书后。

能力测评

每章分别给出一套综合性测试题，题型、题量、难度完全与高考接轨，能力要求非常明显。以16开试卷的形式活页装订，随学生用书赠送，便于教师进行综合能力测试；教师用书题后直接带有详尽解答，学生用书简答统一附于全书后。

目录
CONTENTS



（《自测试题》《能力测评》活页装订，随书赠送）

第一章 集合与简易逻辑

YIN BAN ZHUAN JI

1.1 集合及其运算

NANDIANJUJIAO

难点聚焦

复习难点 对集合三大性质的理解和灵活运用,集合语言和集合思想的准确灵活运用.

运用集合的概念及其运算进行解题时,要注意"或"、"且"的区别.真正理解交集、并集的意义,以能准确地进行集合语言与其文字数学语言的转换.

XUE FA DIAN QIAO

学法点窍

●1.关于集合概念应从如下三方面理解:

(1)它的实际意义是什么?

(2)怎样借助图形来表示?

(3)如何用数学方式来表达?

●2.与集合有关的问题主要有:

(1)如何用集合来表示我们所要研究的问题?

(2)如何判断一个对象属于我们所讨论的集合?

(3)如何判断两个集合间的包含和相等关系?

(4)如何求集合的交、并、补,它们的实际意义何在?

总之,解答集合问题,首先要正确理解集合的有关概念,特别是集合中元素的三要素;对于用描述法给出的集合$\{x\mid x\in P\}$,要紧紧抓住竖线前面的代表元素x以及它所具有的性质P;要重视并发挥图示法的作用,通过数形结合直观地解决问题.

TIXINGFENLEIXIPING

题型分类析评

例1 已知:集合$A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$,$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$,若$A\cap B=\{2,5\}$,求实数$a$的值,并求$A\cup B$.

分析 只能是A中元素a^3-2a^2-a+7为5,从而求出$A\cup B$.

解 $\because A\cap B=\{2,5\}$,

$\therefore 5\in A$,$A=\{2,4,5\}$,

由已知可得$a^3-2a^2-a+7=5$.

$\therefore a^3-2a^2-a+2=0$,

$\therefore (a^2-1)(a-2)=0$,$\therefore a=2$或$a=\pm1$.

(1)当$a=2$时,$B=\{-4,5,2,25\}$,$A\cap B=\{2,5\}$与题设相符;

(2)当$a=1$时,$B=\{-4,4,1,12\}$,$A\cap B=\{4\}$与题设矛盾;

(3)当$a=-1$时,$B=\{-4,2,5,4\}$,$A\cap B=\{2,4,5\}$与题设矛盾.

综上(1)、(2)、(3)知:$a=2$,且$A\cup B=\{2,4,5\}\cup\{-4,5,2,25\}=\{-4,2,4,5,25\}$.

评注 在例1的解题过程中,由题设条件得到a的方程并求出a为2或±1后,问题是否就解决了呢?$5\in A$仅是$A\cap B=\{2,5\}$的一个必要条件,因此有可能产生增根,同样需要将求得a的值代入题设条件中检验,看它是否与条件相符合.

例2 已知集合$M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$,$N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$,$P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$,则$M$、$N$、$P$满足关系( ).

A. $M=N\subsetneqq P$ B. $M\subsetneqq N=P$ C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$ D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

分析 可从判断元素的共性和差异入手.

解 对于集合M:$\{x=\frac{6m+1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$;

对于集合N:$\{x=\frac{3n-2}{6}=\frac{3(n-1)+1}{6},n\in\mathbf{Z}\}$;

对于集合P:$\{x=\frac{3p+1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$.

由于$3(n-1)+1$和$3p+1$都表示被3除余1的数,而$6m+1$表示被6除余1的数,所以$M\subsetneqq N=P$,故应选B.

评注 解答本题,不少同学都会取整数m、n、p的一组值,用描述法写出集合M、N、P,然后观察这三个集合之间的关系.这种解法虽然直观,但由于不能写出集合M、N、P中的所有元素,可能会产生判断失误.另外,这种特殊值法也只是停留在最初的归纳阶段,没有从理论上解决问题.

例3 设已知集合$A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$,$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$,如果$A\cap B=\varnothing$,求$m$的取值范围.

分析 先化简集合A,再由$A\cap B=\varnothing$建立不等式组求m的范围.这里应特别注意"$A\cap B=\varnothing$"的意思是:一方面A与B中的不等式无公共解,另一方面B集合可以为空集.

解 解不等式$10+3x-x^2\geqslant 0$,得

$A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

由$A\cap B=\varnothing$,有

(1)$B=\varnothing$,即$2m-1<m+1$,解得$m<2$;

(2) $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ 2m-1<-2, \end{cases}$ 此时无解；

(3) $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1, \\ m+1>5, \end{cases}$ 解得 $m>4$.

综上可知，$m>4$ 或 $m<2$.

评注 空集是一个特殊的集合.当题中隐含着空集参与集合关系及运算时，我们应像重视数“0”在解题中的作用那样，重视空集在解集合问题中的作用.本题若忽视 $B=\varnothing$，就会漏掉 $m<2$ 的情况.

GAOKAODAOXIANGBIAO
高考导向标

题 （2003·北京·春）若集合 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}$，$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}$，则 $M\cap P$ 等于（　　）.

A. $\{y\mid y>1\}$　　B. $\{y\mid y\geqslant 1\}$
C. $\{y\mid y>0\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant 0\}$

讲解 $M=\{y\mid y=2^{-x}\}=\{y\mid y>0\}$，
$P=\{y\mid y=\sqrt{x-1}\}=\{y\mid y\geqslant 0\}$.
故 $M\cap P=\{y\mid y>0\}$ 选 C.

考点扫描

本题属于函数与集合的小型综合题，从函数 $y=2^{-x}$ 与 $y=\sqrt{x-1}$ 的值域作为思维的起点，容易获得圆满答案.本题概念性强，恰是高考的热点题型.

JIETIBUBUGAO
解题步步高

A 组（基础题）

选择题

1. 已知集合 A 中有 2 个元素，集合 B 中有 5 个元素，那么集合 $A\cup B$ 中元素的个数 p 的值为（　　）.

A. $2\leqslant p\leqslant 7$　　B. $5\leqslant p\leqslant 7$
C. $2\leqslant p\leqslant 5$　　D. 非上述情况

2. 如图 1-1 所示，I 为全集，M、N、S 是 I 的子集，则图中阴影部分所示的集合是（　　）.

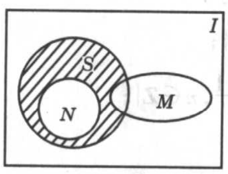


图 1-1

A. $(\complement_I M\cap\complement_I N)\cap S$　　B. $\complement_I(M\cap N)\cap S$
C. $(\complement_I N\cap S)\cup M$　　D. $(\complement_I M)\cap S\cup N$

3. 已知集合 $M=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $N=\{x\mid |x-1|<1, x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 等于（　　）.

A. $\varnothing$　　B. $[-1,3]$　　C. $(0,3]$　　D. $(0,2)$

4. 已知集合 $A=\{x\mid \frac{1}{x}\leqslant 1\}$，集合 $B=\{x\mid \sqrt{x-1}\leqslant 1\}$，则（　　）.

A. $A\cup B=\mathbf{R}$　　B. $A=B$
C. $B\subsetneqq A$　　D. $A\subsetneqq B$

5. 若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$，则实数 a 等于（　　）.

A. 8　　B. 2　　C. -4　　D. -8

6. 设集合 $A=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $-10\leqslant x\leqslant -1\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbf{Z}$ 且 $|x|\leqslant 5\}$，则 $A\cup B$ 中的元素个数是（　　）.

A. 11 个　　B. 10 个　　C. 16 个　　D. 15 个

B 组（综合题）

填空题

1. 若集合 $\{(x,y)\mid x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}\subsetneqq\{(x,y)\mid y=3x+b\}$，则 $b=$______.

2. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+1|\}$，$\complement_I A=\{5\}$，$M=\{x\mid x=\log_2|a|\}$，则集合 M 的所有子集是______.

3. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，则实数 p 的取值范围是______.

4. 设①$A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$；②当 $a\in A$ 时，必有 $(8-a)\in A$，则同时满足条件①，②的非空集合 A 的个数为______.

5. 若全集 $I=\mathbf{R}$，$f(x)$、$g(x)$ 均为 x 的二次函数，$P=\{x\mid f(x)<0\}$，$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$，则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

C 组（高考预测题）

1. 在某一个班级的学生中，有 36 人的数学成绩不低于 80 分，有 20 人的物理成绩不低于 80 分，且有 15 人的数学、物理成绩都不低于 80 分.那么，有多少人在这两科成绩中至少有一科不低于 80 分？

2. 设函数 $y=\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为集合 A，关于 x 的不等式 $\lg 2ax<\lg(a+x)(a\in\mathbf{R}^+)$ 的解集为 B，求使 $A\cap B=A$ 的实数 a 的取值范围.

3. 若集合 $A=\{x\mid x^2+ax+1=0, x\in\mathbf{R}\}$，集合 $B=\{1,2\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

小结

1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

NANDIANJUJIAO
难点聚焦

复习难点 含有多个绝对值符号的不等式的求解，以及带参数的二次不等式的求解.

设法去掉绝对值不等式的绝对值符号(零点分段法，平方法，数形结合，利用绝对值的性质)来求解是常规思路，含参数一元二次不等式求解注意分类讨论，充分利用二次函数的图像，不等式解集端点与二次方程根的关系.

XUE FA DIAN QIAO
学法点窍

●1.含有多个绝对值的不等式，一般可用零点分段法求解，对于形如$|x-a|+|x-b|>m$或$|x-a|+|x-b|<m$(m是正常数)，利用实数绝对值的几何意义求解较简便.要特别重视下列四类绝对值不等式的解法：

(1)$|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x)$；

(2)$|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow f(x)<-g(x)$，或$f(x)>g(x)$；

(3)$|f(x)|>|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x)$；

(4)$|f(x)|<|g(x)|\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$.

●2.解带参数的不等式$(x-a)(x-b)>0$应讨论a与b的大小.解一元二次不等式的一般过程是：一看(看二次项系数的符号)，二算(计算判别式，判断相应方程根的情况或求根)，三写(写出不等式解集).

●3.解分式不等式时不宜去分母，应把分式$\dfrac{ax+b}{cx+d}\geqslant 0$转化成和它等价的$\begin{cases}(ax+b)(cx+d)\geqslant 0\\ cx+d\neq 0\end{cases}$不等式组来解.

TIXINGFENLEIXIPING
题型分类析评

例1 解不等式：$\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1$.

分析 可按学法点窍中的(1)类绝对值不等式求解，也可以按第(4)类绝对值不等式求解.

解 方法1 $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow -1\leqslant\dfrac{3x}{x^2-4}\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x}{x^2-4}\geqslant -1,\\ \dfrac{3x}{x^2-4}\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-4}\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2-3x-4}{x^2-4}\geqslant 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4)(x+2)(x-1)(x-2)\geqslant 0(x\neq\pm 2),\\ (x+2)(x+1)(x-2)(x-4)\geqslant 0(x\neq\pm 2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -4,\text{或}-2<x\leqslant 1,\text{或}x>2,\\ x<-2,\text{或}-1\leqslant x<2,\text{或}x\geqslant 4.\end{cases}$$

故原不等式的解集为$(-\infty,-4]\cup[-1,1]\cup[4,+\infty)$.

方法2 $\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1\Leftrightarrow\left(\dfrac{3x}{x^2-4}\right)^2\leqslant 1$

$\Leftrightarrow 9x^2\leqslant(x^2-4)^2\quad(x\neq\pm 2)$

$\Leftrightarrow x^4-17x^2+16\geqslant 0$

$\Leftrightarrow x^2\leqslant 1$，或$x^2\geqslant 16$

$\Leftrightarrow -1\leqslant x\leqslant 1$，或$x\leqslant -4$，或$x\geqslant 4$.

评注 显然第2种解法较简单.如果从函数的观点看，$f(x)=\left|\dfrac{3x}{x^2-4}\right|-1$为偶函数，所以可先在区间$[0,+\infty)$上解不等式，再利用对称性确定不等式在$(-\infty,0]$上的解.

例2 解不等式$|x-1|+|2-x|>3+x$.

分析 不等式左边含有两个绝对值符号，从而考虑采用“零点分段”.

解 分类求解如下：由于实数1，2把数轴分成$(-\infty,1]$、$(1,2]$、$(2,+\infty)$三部分，所以

(1)当$x\leqslant 1$时，原不等式等价于

$\begin{cases}-(x-1)-(x-2)>x+3\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\ x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x<0$；

(2)当$1<x\leqslant 2$时，原不等式等价于

$\begin{cases}x-1-(x-2)>x+3\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<-2\\ 1<x\leqslant 2\end{cases}\Rightarrow$无解；

(3)当$x>2$时，原不等式等价于

$\begin{cases}x-1+x-2>x+3\\ x>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>6\\ x>2\end{cases}\Rightarrow x>6.$

综合(1)、(2)、(3)，得原不等式的解集为$\{x|x<0$，或$x>6\}$.

评注 “零点分段”是解含有多个绝对值符号不等式的常用方法.请读者根据绝对值的几何意义思考如下更一般的情形：

“对任意实数x，若不等式$|x+1|-|x-2|>k$恒成立，求k的取值范围”.

例3 若$a\in\mathbf{R}$，且$a\neq 0$，解关于x的不等式$\dfrac{|x-a|}{a}<a-1$.

解 (1)若$a>0$，则不等式化为$|x-a|<a(a-1)$.

当$0<a\leqslant 1$时，$a(a-1)\leqslant 0$，

不等式不成立，解集为$\varnothing$；

当$a>1$时，则$a(a-1)>0$，

$\therefore -a(a-1)<x-a<a(a-1)$，

$\therefore -a^2+2a<x<a^2$；

(2)若$a<0$，则$|x-a|>a(a-1)$，

$\because a(a-1)>0$，$\therefore x-a<-a(a-1)$，

或$x-a>a(a-1)$，

即$x<-a^2+2a$，或$x>a^2$.

综合(1)、(2)，$a<0$时，解集为$\{x|x<-a^2+2a$，或$x>a^2\}$；

$0<a\leqslant 1$时，解集为$\varnothing$；

$a>1$时，解集为$\{x|-a^2+2a<x<a^2\}$.

评注 设法去掉绝对值符号来求解属常规思路，若能化为$|ax+b|<c$，或$|ax+b|>c$的基本类型，直接利用解集公式，则更加简便.

例4 已知$x\in[-2,2]$时，不等式$x^2-ax+3-a\geqslant 0$恒成立，求实数a的取值范围.

解 $\because f(x)=x^2-ax+3-a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+3-a-\dfrac{a^2}{4}$，

$\therefore$在下列图形(图1-2)表示的三种情况下，对$x\in[-2,2]$，总有$f(x)\geqslant 0$成立：

高考总复习

(1) $\frac{a}{2}<-2$，且 $f(-2)\geqslant 0$，$\therefore -7\leqslant a\leqslant -4$；

(2) $\frac{a}{2}>2$，且 $f(2)\geqslant 0$，这不可能；

(3) $-2\leqslant \frac{a}{2}\leqslant 2$，且 $f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant 0$；$\therefore -4\leqslant a\leqslant 2$.

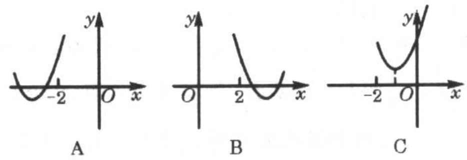


图 1-2

综合知 a 的取值范围是区间 $[-7,2]$.

评注 若从不等式的解集与 $[-2,2]$ 的关系去思考，较难入手；从二次函数 $f(x)=x^2-ax+3-a$ 的图像上去分析，则容易发现解题切入点.

GAOKAODAOXIANGBIAO

高考导向标

题 1 (2003·北京)设集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$，$B=\{x\mid \log_2 x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　).

A. $\{x\mid x>1\}$

B. $\{x\mid x>0\}$

C. $\{x\mid x<-1\}$

D. $\{x\mid x<-1$，或 $x>1\}$

讲解 由已知不等式，分别解得 $A=\{x\mid x>1$，或 $x<-1\}$，$B=\{x\mid x>1\}$.

$\therefore A\cap B=\{x\mid x>1\}$.

故应选 A.

考点扫描 本题主要考查对数不等式、集合等基本知识.

题 2 (2002·全国)不等式 $(1+x)(1-|x|)>0$ 的解集是(　　).

A. $\{x\mid 0\leqslant x<1\}$　　B. $\{x\mid x<0$，且 $x\neq -1\}$

C. $\{x\mid -1<x<1\}$　　D. $\{x\mid x<1$，且 $x\neq -1\}$

讲解 本题用筛选法能快速简捷求解.

取 $x=-2$，代入满足舍去 A、C

取 $x=\frac{1}{2}$，代入满足舍去 B

故选 D.

考点扫描 一元二次不等式是最基本的不等式，这里不只可以出常规题，也可以综合进大题中，解含绝对值不等式正日趋成为高考热点.

JIETIBUBUGAO

解题步步高

A 组(基础题)

选择题

1. 设不等式 $|x-a|<b$ 的解集为 $\{x\mid -1<x<2\}$，则 a 与 b 的值为(　　).

A. $a=1,b=3$　　B. $a=-1,b=3$

C. $a=-1,b=-3$　　D. $a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$

2. 不等式 $ax^2+5x+c>0$ 的解集为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$，那么 a，c 为(　　).

A. $a=6,c=1$　　B. $a=-6,c=-1$

C. $a=1,c=6$　　D. $a=-1,c=-6$

3. 不等式 $|x^2-x-6|>3-x$ 的解集是(　　).

A. $(3,+\infty)$

B. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

C. $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

D. $(-\infty,-3)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$

4. 不等式 $|x^2-2x+3|<|3x-1|$ 的解集是(　　).

A. $\{x\mid x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant 4\}$

C. $\{x\mid 1<x<4\}$　　D. $\{x\mid x<1$，或 $x>4\}$

5. 不等式 $|x+2|+|x-1|<a$ 的解集是 $\varnothing$，则 a 的取值范围是(　　).

A. $(3,+\infty)$　　B. $[3,+\infty)$

C. $(-\infty,3]$　　D. $(-\infty,3)$

6. 对于任意 $x\in\mathbf{R}$，代数式 $ax^2-4ax+3$ 的值都大于零，则 a 的取值范围是(　　).

A. $0<a<\frac{3}{4}$　　B. $0\leqslant a<\frac{3}{4}$

C. $0<a\leqslant\frac{3}{4}$　　D. $a>\frac{3}{4}$

B 组(综合题)

填空题

1. 不等式 $|x+1|-\sqrt{x}\leqslant 3$ 的解区间是________.

2. $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$ 的解是________.

3. 设 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid mx^2+8mx+21>0\}$，$\complement_U A=\varnothing$，则 m 的取值范围是________.

解答题

4. 解下列不等式

(1) $1<|2x+1|\leqslant 3$；

(2) $x^2+(a+2)x+a+1>0$　$(a\in\mathbf{R})$.

5. 解关于 x 的不等式 $12x^2-ax>a^2$.

6. 解不等式 $|x^2-3|x|-3|\leqslant 1$.

C 组(高考预测题)

1. 设有关于 x 的不等式 $\lg(|x+3|+|x-7|)>a$.

(1) 当 $a=1$ 时，解这个不等式；

(2) 当 a 为何值时，这个不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

2. 关于 x 的两个不等式 $\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right| \leqslant \frac{(a-1)^2}{2}$，$x^2-3(a+1)x+2(3a+1) \leqslant 0$ 的解集分别为 A、B. 求使 $A \subseteq B$ 的 a 的取值范围.

小 结

1.3 简易逻辑

NANDIANJUJIAO
难点聚焦

复习难点 关于简单命题和复合命题的理解和认识，四种命题的关系及真假判断是本节的难点.

逻辑中的"或"可视为集合中的"并"，"且"可视为"交"，"非"可视为"补". 可见，"或、且、非"是三种基本的逻辑运算，且可用集合的三种运算来描述. 简单命题与复合命题的分辨不能只从字面上看有没有"或"、"且"、"非". 因为逻辑联结词还有不少，如"若……则"，"因为……所以……"等.

XUE FA DIAN QIAO
学 法 点 窍

●1. 一个语句是否为命题，关键要看能否判断真假. 陈述句、反诘疑问句都是命题，而祈使句、疑问句、感叹句都不是命题.

●2. 如何运用逻辑联结词，把几个简单命题构成复合命题？反之，如何把一个复合命题分解为几个简单命题？

●3. 根据一个命题来构造它的逆命题、否命题和逆否命题的关键在于分清条件和结论. 一个命题的否定与命题的否命题是不同的，前者只否定结论，后者既否定条件，又否定结论.

●4. 判断命题的真假要以真值表为依据. 原命题与其逆否命题为等价命题，逆命题与否命题为等价命题，一真俱真，一假俱假. 当一个命题的真假不易判断时，可考虑判断其等价命题的真假.

●5. 确定一个"若 p 则 q"形式的命题为真，一般要由条件"p"经过一定的逻辑推理得出结论"q"，确定一个"若 p 则 q"的命题为假，一般只须举一个反例说明即可.

TIXINGFENLEIXIPING
题型分类析评

例1 指出下列语句是否是命题，若为命题，指出其中复合命题的基本形式及构成它的简单命题，并判断复合命题的真假：

(1) $x=2$ 或 $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根；

(2) π 既大于 3 又是无理数；

(3) 直角不等于 $90°$；

(4) $x+1 \geqslant 2x-3$；

(5) 垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分这条弦所对的两条弧.

解 除(4)外，其余语句都是命题. 其中(1)这个命题是 p 或 q 的形式，其中

p: $x=2$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根，

q: $x=3$ 是方程 $x^2-5x+6=0$ 的根；

(2) 这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p: π 大于 3. q: π 是无理数；

(3) 这个命题是非 p 的形式，其中

p: 直角等于 $90°$；

(5) 这个命题是 p 且 q 的形式，其中

p: 垂直于弦的直径平分这条弦.

q: 垂直于弦的直径平分这条弦所对的两条弧；

(1)、(2)、(5) 为真命题，(3) 为假命题.

评注 有的"p 或 q"与"p 且 q"形式的复合命题语句中，字面上未出现"或"与"且"字，如此例中的(2)与(4)，此时应从语句的陈述中搞清含义从而分清是"p 或 q"还是"p 且 q"形式. 一般地，若两个命题属于同时都要满足的为"且"，属于并列的为"或".

例2 将下列命题改写成"若 p 则 q"的形式，然后写出各命题的否定、逆命题、否命题和逆否命题，并逐一判断其真假：

(1) 相等向量的模相等；

(2) 顶点在底面上的射影是底面三角形重心的三棱锥是正三棱锥；

(3) 直线和圆相切，切点与圆心的连线垂直于这条直线.

解 (1) 若 $a=b$，则 $|a|=|b|$，是真命题；

命题的否定：若 $a=b$，则 $|a| \neq |b|$，是假命题；

逆命题：若 $|a|=|b|$，则 $a=b$，是假命题；

否命题：若 $a \neq b$，则 $|a| \neq |b|$，是假命题；

逆否命题：若 $|a| \neq |b|$，则 $a \neq b$，是真命题；

(2) 若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 是正三棱锥，是假命题，

命题的否定：若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 不一定是正三棱锥，是真命题；

逆命题：若三棱锥 $A—BCD$ 是正三棱锥，则三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影是 $\triangle BCD$ 的重心，是真命题；

否命题：若三棱锥 $A—BCD$ 的顶点 A 在底面 BCD 上的射影不是 $\triangle BCD$ 的重心，则三棱锥 $A—BCD$ 不是正三棱锥，是真命题；

逆否命题：若三棱锥 $A—BCD$ 不是正三棱锥，则顶点 A 在底面 BCD 上的射影一定不是 $\triangle BCD$ 的重心，是假命题.

(3)若直线和圆相切,则切点与圆心的连线垂直于这条直线,是真命题;

命题的否定:若直线和圆相切,则切点与圆心的连线不垂直于这条直线,是假命题;

逆命题:若圆上点与圆心的连线垂直于过这点的直线,则这条直线与圆相切,是真命题;

否命题:若直线和圆不相切,则直线与圆的公共点与圆心的连线与这条直线不垂直,是真命题;

逆否命题:若圆上一点与圆心的连线与过圆上这点的直线不垂直,则这条直线不是圆的切线,是真命题.

评注 改写命题时,在等价条件下可以使用符号语言,以使问题表述得更清楚简明;命题中使用了判断词"是",根据对象的分类,其否定可以为"不是"或"不一定是";检验所改写的命题是否正确的一个有效手段是利用互为逆否命题的两个命题的等价关系进行判断.

例3 命题:已知 a、b 为实数,若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集,则 $a^2-4b\geqslant 0$.写出该命题的否定及该命题的否命题.

分析 明确命题的否定只否定结论,而命题的否命题既否定条件,又否定结论.

解 命题的否定:已知 a、b 为实数,若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集,则 $a^2-4b<0$.

否命题:已知 a、b 为实数,若 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 没有非空解集,则 $a^2-4b<0$.

评注 此例中原命题的 a、b 为实数是前提,条件是 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有非空解集(即不等式 $x^2+ax+b\leqslant 0$ 有解),结论是 $a^2-4b\geqslant 0$.

金版专辑(1)

GAOKAODAOXIANGBIAO 高考导向标

题1 (2003·上海)在下列条件中,可判断平面 α 与 β 平行的是( ).

A. α、β 都垂直于平面 r.

B. α 内存在不共线的三点到 β 的距离相等.

C. l,m 是 α 内两条直线,且 $l/\!/\beta, m/\!/\beta$.

D. l,m 是两条异面直线,且 $l/\!/\alpha, m/\!/\alpha, l/\!/\beta, m/\!/\beta$.

讲解 依据 $\alpha/\!/\beta$ 的判定的条件可知D正确.

题2 (2003·全国)已知 $c>0$.设

P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

Q:不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$,如果 P 和 Q 有且仅有一个正确,求 c 的取值范围.

讲解 函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减 $\Leftrightarrow 0<c<1$.

不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒大于1.

$\because x+|x-2c|=\begin{cases}2x-2c, & x\geqslant 2c,\\ 2c, & x<2c,\end{cases}$

$\therefore$ 函数 $y=x+|x-2c|$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 $2c$.$\therefore$ 不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}\Leftrightarrow 2c>1\Leftrightarrow c>\frac{1}{2}$.

如果 P 正确,且 Q 不正确,则 $0<c\leqslant\frac{1}{2}$.如果 P 不正确,且 Q 正确,则 $c\geqslant 1$.所以 c 的取值范围为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty)$.

考点扫描 本小题主要考查集合、函数、不等式、绝对值等基础知识,考查分析和判断能力.在解答过程中蕴涵着分类讨论思想和转化思想.

JIETIBUBUGAO 解题步步高

A 组(基础题)

选择题

1.设原命题为"$A\cap B=B$,则 $A\subseteq B$",则原命题、逆命题、否命题和逆否命题中为真命题的个数是( ).

A.0个 B.1个 C.2个 D.4个

2."$(a+b)(b+c)(c+a)=0$"的含义是( ).

A. a,b,c 中有两个为零

B. a,b,c 两两互为相反数

C. a,b,c 中至少有一个不为零

D. a,b,c 中至少有两个互为相反数

3.若 p,q 是两个简单命题,且"p 或 q"的否命题是真命题,则必有( ).

A. p 真且 q 真 B. p 假且 q 假

C. p 真且 q 假 D. p 假且 q 真

4.下列命题中正确的是( ).

①"若 $x^2+y^2\neq 0$,则 x,y 不全为零"的否命题;

②"正多边形都相似"的否命题;

③"若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"的逆否命题;

④"若 $x-\sqrt{3}$ 是有理数,则 x 是无理数"的逆否命题.

A.①②③ B.①④

C.②③④ D.①③④

5.若命题 $p:2m-1(m\in\mathbf{Z})$ 是奇数,$q:2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 是偶数,则下列说法正确的是( ).

A. p 或 q 为真 B. p 且 q 为真

C.非 p 为真 D.非 q 为假

6.如果命题"p 或 q"是真命题,"非 p"是假命题,那么( ).

A.命题 p 一定是假命题

B.命题 q 一定是假命题

C.命题 q 一定是真命题

D.命题 q 可以真也可以假

B 组(综合题)

填空题

1.设命题 A:小王在看书;命题 B:小赵在看书;命题 C:小孙在看书.

①命题"小王、小赵、小孙都在看书"是"A 且 B 且 C"形式的复合命题;

②命题"小王、小赵、小孙至少一人在看书"是"A 或 B 或 C"形式的复合命题;

③命题"小王、小赵都在看书,只有小孙没有看书"是"A 且 B 或 C"形式的复合命题;

④命题"小王、小赵都没有看书,只有小孙在看书"是"A 或 B 且 C"形式的复合命题.

以上四个命题中正确的是________.(填上所有正确命题的序号)

2.下列说法正确的有________.

①$-2\leqslant 1$ 或2的平方根是 $\sqrt{2}$;

②经过两点可以确定一条直线;

③"若 p 则 q"的否命题是"若 q 则非 p".

3.某次会议有100人参加,参加会议的每个人都可能是诚实的,也可能是虚伪的,现在知道下面两项事实:

(1)这100人中,至少有1名是虚伪的.

(2)其中任何2人中,至少有1名是诚实的.

则这次会议活动中,诚实的人数是________.

解答题

4.已知 a、b、$c\in\mathbf{R}$,写出命题"若 $ac<0$,则 $ax^2+bx+c=0$有两个不相等实根"的逆命题,否命题,逆否命题,并判断其真假.

5.已知下列三个方程 $x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$ 至少有一个方程有实根,求实数 a 的取值范围________.

6.写出下列命题的"非 p"形式的复合命题,并判断命题的真假.

(1)p:对顶角相等;

(2)p:平行四边形一定是菱形;

(3)p:$\dfrac{1}{x^2+2x-3}\geqslant 0$.

C 组(高考预测题)

1.设 M、N 是集合,且 $M\neq\varnothing$,有四个命题:①M 的元素都不是N 的元素;②存在 M 的元素不是 N 的元素;③存在 M 的元素是N 的元素;④不是 N 的元素都不是M 的元素.

已知"M 的元素都是 N 的元素"是假命题,则上述四个命题中,可能成立的是______(填出你认为成立的所有命题的序号).

2.若实数 m,n,p,q 满足

$$\begin{cases} m+n=1, & ① \\ p+q=1, & ② \\ mp+nq>1. & ③ \end{cases}$$

求证:m,n,p,q 中必有一个是负数.

小结

....

....

....

....

....

1.4 充要条件

难点聚焦

复习难点 在一个命题中区分充分条件和必要条件、充要条件.

判定 A 是B 的什么条件关键是看"若 A 则B"、"若 B 则A"是否为真命题.当"若 A 则B"是否为真难以判别时可以判别它的等价命题,"若非 B 则非 A"的真假.去探求充要条件时一般可先探求其必要条件,再看其充分性是否成立.

XUE FA DIAN QIAO 学法点窍

判断命题充要条件有如下三种常用方法:

●1.定义法;

●2.等价法:即利用 $A\Rightarrow B$ 与非 $B\Rightarrow$非 A;$B\Rightarrow A$与非$A\Rightarrow$非 B;$A\Leftrightarrow B$ 与非$B\Leftrightarrow$非 A 的等价关系,对于条件或结论是不等关系(否定式)的命题,一般运用等价法;

●3.利用集合间的包含关系判断,若 $A\subseteq B$,则 A 是B 的充分条件或 B 是A 的必要条件;若 $A=B$,则 A 是B 的充要条件.

题型分类析评

例1 若 $a,b,x,y\in\mathbf{R}$,则 $\begin{cases}x+y>a+b\\(x-a)(y-b)>0\end{cases}$ 是 $\begin{cases}x>a\\y>b\end{cases}$ 成立的( ).

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

分析 判断命题的充要关系,需从充分性和必要性两个方面进行推理,如果不能推出,要能举出反例加以说明.

解 (1)若$\begin{cases}x+y>a+b, & ①\\(x-a)(y-b)>0, & ②\end{cases}$

由式②知,$x-a$ 与 $y-b$ 同号;又由式①得 $(x-a)+(y-b)>0$.

所以,$(x-a)>0$,$y-b>0$,即 $x>a$,$y>b$.

故充分性成立.

(2)若$\begin{cases}x>a,\\y>b,\end{cases}$则$\begin{cases}x-a>0,\\y-b>0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}x+y>a+b\\(x-a)(y-b)>0.\end{cases}$

故必要性成立.

综合(1),(2)知,应选C.

评注 在判断命题的充要关系时,若由条件出发,每步推理都应用的是充要条件,最后得到的结论与条件是互为充要条件的.

例2 指出下列条件中 p 是q 的什么条件,q 是 p 的什么条件,并说明理由.

(1)p:$\begin{cases}\alpha+\beta>4\\\alpha\beta>4\end{cases}$;$q$:$\begin{cases}\alpha>2\\\beta>2\end{cases}$.

(2)p:$x\sqrt{2x+3}=x^2$;q:$2x+3=x^2$.

(3) p:$\triangle ABC$是直角三角形;q:$\triangle ABC$是等腰三角形.

(4) p:$\angle C=90^\circ$;q:$\triangle ABC$是直角三角形.

(5) p:$A\cap B=A$;q:$A\subsetneqq B$.

(6) p:$\frac{2}{x}\geqslant 1$;q:$x^2<2x$.

解 (1) $\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$,反之却不一定成立.例如取$\alpha=1$,$\beta=5$时,虽然满足$\begin{cases}\alpha+\beta>4\\ \alpha\beta>4\end{cases}$,但不满足$\begin{cases}\alpha>2\\ \beta>2\end{cases}$,故$p\not\Rightarrow q$.但$q\Rightarrow p$,$p$是$q$的必要而不充分条件,$q$是$p$的充分而不必要条件.

(2)此题的p与q是两个方程的根,首先要解方程,要注意解方程时的同解变形,把增根舍去.p:$x\sqrt{2x+3}=x^2$,解得$x=-1$或$x=0$或$x=3$,把$x=-1$代入原方程时,得$-1=1$,舍去,而q:$2x+3=x^2\Leftrightarrow x=-1$或$x=3$,故$p$、$q$互为既不充分也不必要条件.

(3) p、q互为既不充分也不必要条件.

(4) p:$\angle C=90^\circ\Rightarrow q$:$\triangle ABC$是直角三角形.反之,$q$成立时,有可能$\angle B$或$\angle A$为$90^\circ$,故$q\not\Rightarrow p$.

所以p是q的充分而不必要条件,q是p的必要而不充分条件.

(5) $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B\not\Rightarrow A\subsetneqq B$,而$A\subsetneqq B\Rightarrow A\cap B=A$,故$p$是$q$的必要而不充分条件,$q$是$p$的充分而不必要条件.

(6)此题的p、q是两个不等式的解集,要注意最后得到的解集之间的包含关系.

p:$\frac{2}{x}\geqslant 1\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geqslant x^2\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\leqslant 2$.

还可以这样解:$\frac{2}{x}\geqslant 1$,故$x>0$,

所以$2\geqslant x$,从而$0<x\leqslant 2$,

q:$x^2<2x\Leftrightarrow 0<x<2$,

所以$\{x|0<x<2\}\subsetneqq\{x|0<x\leqslant 2\}$,

故$p\not\Rightarrow q$而$q\Rightarrow p$,故p是q的必要而不充分条件,q是p的充分而不必要条件.

评注 此类题只要判断$p\Rightarrow q$与$q\Rightarrow p$的真假即可,在推导不成立时,往往可通过举反例来否定一个命题的成立.

例3 求证:关于x的方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一个根是1的充要条件是$a+b+c=0$.

分析 本命题的条件是"$a+b+c=0$",结论是"$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有一个根是1",所以证必要性即证明"若$x=1$是方程$ax^2+bx+c=0$的根,则$a+b+c=0$",证充分性即证明"若$a+b+c=0$,则$x=1$是方程$ax^2+bx+c=0$的根".

证明 (1)先证必要性

$\because$ $x=1$是方程$ax^2+bx+c=0$的根,

$\therefore$ $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$,即$a+b+c=0$.

(2)再证充分性

$\because$ $a+b+c=0$,

$\therefore$ $c=-(a+b)$,代入方程,得

$(x-1)(ax+a+b)=0$,

$\therefore$ $x=1$,或$x=-\frac{a+b}{a}(a\neq 0)$.

$\therefore$ 方程$ax^2+bx+c=0$有一个根是1.

评注 充要条件的证明,一般先证必要性,再证充分性,从本例可引伸出命题"直线$ax+by+c=0$通过定点$(1,1)$的充要条件是$a+b+c=0$(a、b、c不全为0)."

例4 已知抛物线C:$y=-x^2+mx-1$和点$A(3,0)$,$B(0,3)$,求抛物线C与线段AB有两个不同交点的充要条件.

解 应先根据抛物线C与线段AB有两个不同交点,导出结论成立的必要条件,即求出m的范围,再证明其为充分条件.

(1)必要性:由已知得,线段AB的方程为$x+y=3(0\leqslant x\leqslant 3)$,因为抛物线$C$与线段$AB$有两个不同的交点,所以方程组

$\begin{cases}y=-x^2+mx-1\\ x+y=3(0\leqslant x\leqslant 3)\end{cases}$有两组不同的实数解.

将$y=3-x$代入$y=-x^2+mx-1$,

得$x^2-(1+m)x+4=0(0\leqslant x\leqslant 3)$,

令$f(x)=x^2-(1+m)x+4$(如图1-3所示),

则有$\begin{cases}(1+m)^2-4\times 4>0,\\ f(3)\geqslant 0,\\ 0<\frac{m+1}{2}<3\\ f(x)\geqslant 0,\end{cases}$

即$\begin{cases}(1+m)^2>4^2,\\ -3m+10\geqslant 0,\\ 0<m+1<6.\end{cases}$

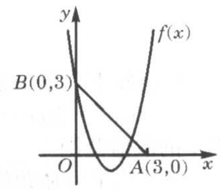


图1-3

解之,得$3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

(2)充分性:

当$3<m\leqslant\frac{10}{3}$时,

$$x_1=\frac{1+m-\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}>\frac{1+m-\sqrt{(1+m)^2}}{2}=0,$$

$$x_2=\frac{1+m+\sqrt{(1+m)^2-16}}{2}\leqslant\frac{1+\frac{10}{3}+\sqrt{\left(1+\frac{10}{3}\right)^2-16}}{2}=3.$$

所以,方程$x^2-(1+m)x+4=0$有两个不同的实根,且两根x_1、x_2满足$0<x_1<x_2\leqslant 3$,即方程组$\begin{cases}y=-x^2+mx-1\\ x+y=3(0\leqslant x\leqslant 3)\end{cases}$有两组不同的实数解.

所以,抛物线$y=-x^2+mx-1$和线段AB有两个不同交点的充分条件是$3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

评注 本题是求抛物线与线段有两个交点的充要条件.在求结论成立的必要条件时,也可以这样分析:第一,抛物线首先要与直线AB有两个交点;第二,这两个交点必符合$x\in[0,3]$,因为$y=-x^2+mx-1$开口向下,所以当$x=0$和$x=3$时,此抛物线上的点不在直线$x+y=3$的上方,又因为$x=0$时,$y=-1$,肯定在直线$x+y=3$的下方,故只考虑$x=3$,$y=3m-10$时的情形了.即$3+(3m-10)-3\leqslant 0$,$m\leqslant\frac{10}{3}$,综合考虑第一、第二两点,可得$3<m\leqslant\frac{10}{3}$.

GAOKAODAOXIANGBIAO
高考导向标

题1 (2003·上海)a_1、b_1、c_1、a_2、b_2、c_2均为非零实数,不等式$a_1x^2+b_1x+c_1>0$和$a_2x^2+b_2x+c_2>0$的解集分别为集合M和N,那么"$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$"是"$M=N$"的( ).

A.充分而不必要条件

B.必要而充分条件