

高职高专教材

应用微积分

YINGYONG WEIJIFEN
YINGYONG WEIJIFEN

主 编 王新华
主 审 王文智
副主编 雷田礼

湖北科学技术出版社

高职高专教材

应用微积分

主 编
主 审
副主编
参 编

江苏工业学院图书馆
藏书章
王新华
王文智
雷田礼
王文智
宫永辉
齐松茹
黄炜
康晓红
林志恒

湖北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用微积分/王新华主编. —2 版. —武汉: 湖北科学技术出版社, 2003. 8

ISBN 7-5352-2682-5

I. 应… II. 王… III. 微积分 N. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 054014 号

高职高专教材
应用微积分

© 王新华 主编

责任编辑: 高诚毅

封面设计: 王 梅

出版发行: 湖北科学技术出版社
地 址: 武汉市雄楚大街 268 号

电话: 87679468
邮编: 430070

印 刷: 中国科学院武汉分院科技印刷厂

邮编: 430071

850 毫米×1168 毫米
2002 年 8 月第 2 版

32 开

8 印张 195 千字
2003 年 8 月第 3 次印刷

印数: 5 601—9 850

ISBN 7-5352-2682-5/O · 30

定价: 13.50 元

本书如有印装质量问题 可找承印厂更换

深圳职业技术学院公共课教材

编纂委员会

主 任：唐晓鸣

副主任：韩 毅

委 员：陈雁杨 朱宗芸 刘文娟 余时湘

崔向前 王文智 李 娜 李 放

《应用微积分》编委会

主 编：王新华

主 审：王文智

副主编：雷田礼

编 委：王文智、宫永辉、齐松茹、黄炜

前 言

近年来, 年轻的中国高等职业教育以其鲜明的特色, 在适应现代社会人才多样化需求, 实施高等教育大众化等方面, 都做出了重大的贡献. 由于其鲜明的职业特征; 因此, 其课程体系及教学内容与传统大学教育相比有着许多的不同. 为了适应高职学生的特点, 根据具体实际的需要, 深圳职业技术学院公共课教材编纂委员会组织我们完成了这本《应用微积分》的编写.

本书充分遵循“基础理论与专业课相结合, 够用为度”之原则, 以实际问题和几何图形为背景, 试图建立起高职数学的理论体系, 主要特色如下:

1. 弱化传统数学严密的逻辑推导, 以应用或几何解释为背景导出主要定理、性质和公式;
2. 简化内容结构层次, 以适应高职学生的特点;
3. 突出《微积分》核心内容, 简化了极限、复杂的积分计算等知识, 着重于导数和积分基本计算方法的训练, 以加强高职学生基本数学素质的培养;
4. 加强了概念的应用背景介绍及其在专业课中的应用.

本书由王新华任主编，雷田礼任副主编，王文智任主审。其中第一、二、三章由王新华负责编写，第四章由黄炜负责编写，第五章由齐松茹负责编写，第六、七两章由王文智、雷田礼负责编写，第八章由宫永辉负责编写，修订教材时附加了第九章，由康晓红、王新华共同完成；习题及其答案由王新华负责完成，黄炜、齐松茹、宫永辉也参加了相应章节的选题工作；积分表由黄炜选录；书中插图由王新华、王文智共同完成。全书由王新华统稿，由王文智、雷田礼主审。

深圳职业技术学院党委书记、院长俞仲文教授对本书的编写提出了重要的指导意见；公共教学部主任唐晓鸣副教授对本书的文字表述也进行过审定。

由于我们水平有限，经验不足，加上编写时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正，我们将在再版时加以更正。

编 者
2002年8月

目 录

第一章 预备知识	1
§1 基本概念	2
§2 复合函数和反函数	3
§3 其它知识	5
第二章 极限与连续	10
§1 基本概念	10
§2 基本性质	16
§3 两个重要极限	20
第三章 导数与微分	27
§1 导数的定义	27
§2 导数的四则运算	37
§3 复合函数求导法	42
§4 隐函数的求导与对数求导法	46
§5 高阶导数与导数的计算杂例	51
§6 微分	55
第四章 导数的应用	61
§1 微分中值定理	61
§2 函数的单调性	67
§3 函数的极值	71
§4 函数的最大值和最小值	76
§5 罗必达法则	82
*§6 曲率	87
第五章 不定积分	94

§1 不定积分的概念与性质	94
§2 凑微分法	105
§3 分部积分法	119
§4 积分表的使用	124
第六章 定积分	127
§1 基本概念及性质	127
§2 微积分学基本定理	137
§3 定积分的计算	143
*§4 无穷区间上的广义积分	152
第七章 定积分的应用	157
§1 微元法	157
§2 平面图形的面积	159
*§3 体积	164
*§4 定积分的物理应用	168
*§5 函数的平均值	172
第八章 常微分方程	177
§1 微分方程的基本概念	177
§2 一阶微分方程	182
§3 一阶微分方程的应用举例	193
*第九章 经济应用	200
§1 经济学基本函数	200
§2 函数的变化率——边际分析	202
§3 函数的相对变化率——弹性分析	205
§4 积分在经济中的应用	210
附录一、积分表	216
附录二、习题答案与提示	236

第一章 预备知识

人类在认识和改造客观世界的实践中，首先了解的是事物的相对静止状态，同这种认识相适应的数学是常量数学。16世纪，笛卡尔（Descartes）用运动的观点，把曲线看成点的运动的轨迹，不仅建立了点与实数对的对应关系，而且把“形”（包括点、线、面）和“数”两个对立的对象统一起来，建立了曲线和方程的对应关系。这种对应关系的建立，不仅标志着函数概念的萌芽，而且也标明变数进入了数学。正是笛卡尔的变量数学思想为牛顿（Newton）—莱布尼兹（Leibniz）创立微积分提供了必要的前提。

微积分的出现为数学的发展带来了光辉的前景，它从物理模型和几何模型中抽象出来，又广泛地应用于科学技术之中，深刻地影响着生产技术和自然科学的发展，是现代数学乃至整个自然科学的基石。

《微积分》研究的对象是函数。在中学数学里，我们已经了解过函数的概念，所谓函数，就是这样的一种对应关系：

$$\text{数}x \xrightarrow{\text{经关系 } f \text{ 对应}} (\text{唯一})\text{数}y$$

记为 $y = f(x)$ 。其中 x 的取值范围叫做函数的定义域， y 的取值范围叫做函数的值域。

在这一章里我们仅简单介绍学习《微积分》所必须掌握的初等数学知识，它包括区间、复合函数、反函数、初等函数、有界变量和邻域等基本概念以及一些常用的关系式和图形。

§ 1 基本概念

我们将下面五类函数，称为基本初等函数：

(1) 幂函数： $y = x^{\alpha}$ (α 为实数)。

(2) 指数函数： $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)；

特别， $y = e^x$ 。

(3) 对数函数： $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)；

特别， $y = \ln x$ 。

(4) 三角函数： $y = \sin x, \cos x, \tan x, \cot x,$
 $\sec x, \csc x$ 。

(5) 反三角函数： $y = \arcsin x, \arccos x,$
 $\arctan x, \operatorname{arccot} x$ 。

与中学数学不一样的是，高等数学中的函数可能是分段函数。例如：

$$\text{符号函数: } \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

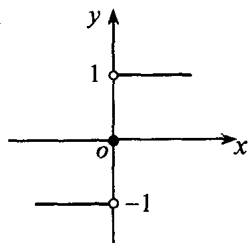


图 1-1

如图1-1所示，定义域为全体实数，值域为 $\{-1, 0, 1\}$ ；函数取值如： $\operatorname{sgn} 2 = 1$ ， $\operatorname{sgn}(-2) = -1$ 。

此外，为了叙述的方便，高等数学中对于变量的取值范围也常将不等式改用区间来表示。例如：

$$a < x < b \Leftrightarrow x \in (a, b), \quad a \leq x \leq b \Leftrightarrow x \in [a, b];$$

$$a < x \leq b \Leftrightarrow x \in (a, b], \quad a \leq x < b \Leftrightarrow x \in [a, b).$$

具体改变规则如下:

- (1) 区间中的数字 a 、 b 左小右大, 中间用 “,” 分开;
- (2) 与不等式相对应, 带等号的一边用方括号, 不带等号的一边用圆括号;
- (3) 只有一边的不等式, 应以 $+\infty$ (正无穷大) 或 $-\infty$ (负无穷大) 进行补充, 且 $\pm\infty$ 处只能用圆括号. 如

$$x > 1 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty),$$

$$x \leq -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1].$$

其中 (a, b) 叫做开区间, $[a, b]$ 叫做闭区间.

例 1 写出下列集合的区间表示:

- (1) $-1 < x \leq 1$; (2) $x \geq -2$;
- (3) $x < 0$; (4) $|x| < 1$;
- (5) 全体实数; (6) 全体非负实数.

- 解**
- (1) $(-1, 1]$; (2) $[-2, +\infty)$;
 - (3) $(-\infty, 0)$; (4) $(-1, 1)$;
 - (5) $(-\infty, +\infty)$; (6) $[0, +\infty)$.

§ 2 复合函数和反函数

2.1 复合函数

定义 1 设有函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$, 若

$g(x)$ 的值域 $\subseteq f(u)$ 的定义域.

则称 $y = f[g(x)]$ 为复合函数.

例 2 已知 $f(x+1) = \ln x$, 求 $f(x)$, 并指出 $f(x)$ 的定义域.

解 令 $u = x+1$, 则

$$f(u) = \ln(u-1),$$

视 u 为 x , 得

$$f(x) = \ln(x-1).$$

其定义域为 $x > 1$.

例 3 若 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 2^x$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

解 $f[g(x)] = f(2^x) = 1$ (因 $2^x > 0$).

$$g[f(x)] = 2^{\operatorname{sgn} x} = \begin{cases} \frac{1}{2} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases}$$

2.2 反函数

定义 2 设有函数 $y = f(x)$, 若

值域中任一值 y $\xrightarrow{\text{经 } f \text{ 返回对应}}$ 定义域中唯一的 x ,

则该对应关系所确定的新函数, 称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

由于习惯, 我们将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 用 $y = f^{-1}(x)$ 表示.

由定义 2 不难看出: 若由 $y = f(x)$ 能解出唯一的 $x = \phi(y)$, 则其反函数存在, 且反函数为 $y = \phi(x)$. 一般我们有

反函数存在定理 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上严格单增(或严格单减), 则其反函数存在, 且反函数与函数 $y = f(x)$ 具有相同的严格单调性.

证明从略.

§ 3 其他知识

3.1 初等函数

我们把由基本初等函数, 经过有限次四则运算及复合所构成的, 并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

根据上述定义, 中学数学里的函数大都是初等函数, 而函数

$$y = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

不是初等函数, 因为它不能用一个式子表示.

需要说明的是, 有些分段函数表面上看起来是由两个式子所表示, 它也可能是初等函数. 如

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

表面上看起来是由两个式子所表示, 由于

$$f(x) = |x| = \sqrt{x^2},$$

因此它是初等函数.

3.2 有界变量与邻域

若存在常数 M ，使得

$$|y| \leq M,$$

则称 y 为有界变量。如

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \quad (x \neq 0),$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad (|x| \leq 1).$$

因此， $\sin \frac{1}{x}$ 和 $\arccos x$ 在其定义域内都是有界变量。

我们称 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) 为点 x_0 的 δ -邻域。

为了方便起见，我们记

$$x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近} \iff 0 < |x - x_0| < \delta,$$

其中 $\delta > 0$ 充分小。

3.3 常用关系式

$$1. \quad (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

$$2. \quad a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x},$$

$$3. \ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y;$$

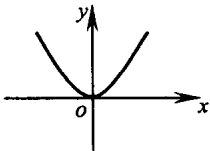
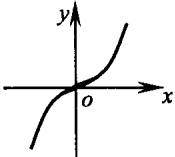
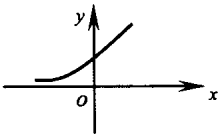
$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x, \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

$$4. |x+y| \leq |x| + |y|;$$

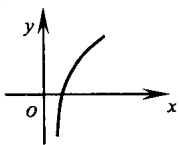
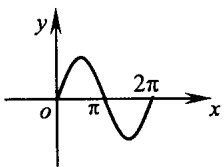
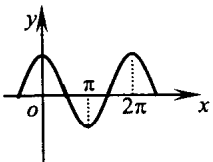
$$5. |\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1.$$

3.4 常用函数图形

表 1-1

函 数	图 形	知 识 要 点
$y = x^2$		偶函数，关于 y 轴对称.
$y = x^3$		奇函数，关于原点对称.
$y = e^x$		单增，过 (0,1) 点.

续表

$y = \ln x$		单增, 过 (1,0) 点.
$y = \sin x$		2π 周期, 奇函数; $\sin n\pi = 0$ (n 为整数).
$y = \cos x$		2π 周期, 偶函数; $\cos n\pi = (-1)^n$ (n 为整数).

习 题 1

1. 指出下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (2) y = \arcsin \frac{x-1}{2}.$$

2. 若 $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2^x & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$, 求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 和 $f(2)$.

3. 判断下列函数是否相同, 并说明为什么?

$$(1) \sqrt{x^2} \text{ 与 } x; \quad (2) \ln x^2 \text{ 与 } 2 \ln x;$$

$$(3) \sin^2 x + \cos^2 x \text{ 与 } 1.$$

4. 若 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$, 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$.

*5. 求 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 的反函数.