

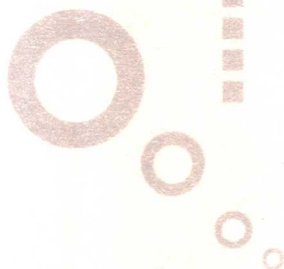
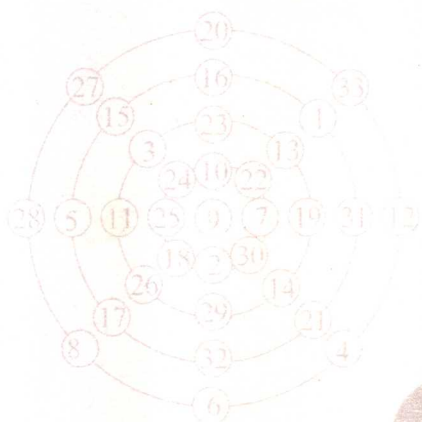
好玩的数学

张景中 主编

郁祖权 著 黄澍 插图

中国古算解趣

展示“寓理于算，不证自明”的技艺
锤炼“小中见大，鸡刀宰牛”的功夫



科学出版社
www.sciencep.com

好玩的



数学

张景中 主编

中国古算解趣



郁祖权_二著 黄澍_二插图

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题;以题说法,讲解我国古代很有影响的一些数学方法,如更相减损法、出入相补法、大衍求一术等;以法传知,叙述这些算法的历史背景和实际应用,并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍。诗书画文结合,趣味浓厚,对中学、大学师生和数学爱好者有启迪和参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

中国古算解趣/郁祖权著;黄澍插图. —北京:科学出版社, 2004
(好玩的数学/张景中主编)

ISBN 7-03-014240-3

I. 中… II. ①郁…②黄… III. 古典数学-中国-通俗读物
IV. O112-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 086112 号

丛书策划: 李 敏

责任编辑: 胡升华 李晓华 / 责任校对: 包志虹

责任印制: 钱玉芬 / 整体设计: 黄华斌

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

原创阳光印业有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 10 月第 一 版 开本: 610×1000 1/16

2004 年 10 月第一次印刷 印张: 17 1/4

印数: 1—6 000 字数: 191 000

定价: 19.80 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈科印〉)

总 序

2002年8月在北京举行国际数学家大会(ICM2002)期间,91岁高龄的数学大师陈省身先生为少年儿童题词,写下了“数学好玩”4个大字。

数学真的好玩吗?不同的人可能有不同的看法。

有人会说,陈省身先生认为数学好玩,因为他是数学大师,他懂数学的奥妙。对于我们凡夫俗子来说,数学枯燥,数学难懂,数学一点也不好玩。

其实,陈省身从十几岁就觉得数学好玩。正因为觉得数学好玩,才兴致勃勃地玩个不停,才玩成了数学大师。并不是成了大师才说好玩。

所以,小孩子也可能觉得数学好玩。

当然,中学生或小学生能够体会到的数学好玩,和数学家所感受到的数学好玩,是有所不同的。好比象棋,刚入门的棋手觉得有趣,国手大师也觉得有趣,但对于具体一步棋的奥妙和其中的趣味,理解的程度却大不相同。

世界上好玩的事物,很多要有了感受体验才能食髓知味。有酒仙之称的诗人李白写道:“但得此中味,勿为醒者传”,不喝酒的人是很难理解酒中乐趣的。

但数学与酒不同。数学无所不在。每个人或多或少地要用到数学,要接触数学,或多或少地能理解一

些数学。

早在 2000 多年前，人们就认识到数的重要。中国古代哲学家老子在《道德经》中说：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”古希腊毕达哥拉斯学派的思想家菲洛劳斯说得更加确定有力：“庞大、万能和完美无缺是数字的力量所在，它是人类生活的开始和主宰者，是一切事物的参与者。没有数字，一切都是混乱和黑暗的。”

既然数是一切事物的参与者，数学当然就无所不在了。

在很多有趣的活动中，数学是幕后的策划者，是游戏规则的制定者。

玩七巧板，玩九连环，玩华容道，不少人玩起来乐而不倦。玩的人不一定知道，所玩的其实是数学。这套丛书里，吴鹤龄先生编著的《七巧板、九连环和华容道——中国古典智力游戏三绝》一书，讲了这些智力游戏中蕴含的数学问题和数学道理，说古论今，引人入胜。丛书编者应读者要求，还收入了吴先生的另一本备受大家欢迎的《幻方及其他——娱乐数学经典名题》，该书题材广泛、内容有趣，能使人在游戏中启迪思想、开阔视野，锻炼思维能力。丛书的其他各册，内容也时有涉及数学游戏。游戏就是玩。把数学游戏作为丛书的重要部分，是“好玩的数学”题中应有之义。

数学的好玩之处，并不限于数学游戏。数学中有些极具实用意义的内容，包含了深刻的奥妙，发人深

思，使人惊讶。比如，以数学家欧拉命名的一个公式

$$e^{2\pi i} = 1$$

这里指数中用到的 π ，就是大家熟悉的圆周率，即圆的周长和直径的比值，它是数学中最重要的一个常数。数学中第2个重要的常数，就是上面等式中左端出现的 e ，它也是一个无理数，是自然对数的底，近似值为 $2.718281828459\cdots$ 。指数中用到的另一个数 i ，就是虚数单位，它的平方等于 -1 。谁能想到，这3个出身大不相同的数，能被这样一个简洁的等式联系在一起呢？丛书中，陈仁政老师编著的《说不尽的 π 》和《不可思议的 e 》，分别详尽地说明了这两个奇妙的数的来历、有关的轶事趣谈和人类认识它们的漫长的过程。其材料的丰富详尽，论述的清楚确切，在我所知的中外有关书籍中，无出其右者。

如果你对上面等式中的虚数 i 的来历有兴趣，不妨翻一翻王树禾教授为本丛书所写的《数学演义》的“第十五回 三次方程闹剧获得公式解 神医卡丹内疚难舍诡辩量”。这本章回体的数学史读物，可谓通而不俗、深入浅出。王树禾教授把数学史上的大事趣事憾事，像说评书一样，向我们娓娓道来，使我们时而惊讶、时而叹息、时而感奋，引来无穷怀念遐想。数学好玩，人类探索数学的曲折故事何尝不好玩呢？光看看这本书的对联形式的四十回的标题，就够过把瘾了。王教授还为丛书写了一本《数学聊斋》，把现代数学和经典数学中许多看似古怪而实则富有思想哲理的内容，像《聊斋》讲鬼说狐一样最大限度地大众化，努力使

读者不但“知其然”而且“知其所以然”。在这里，数学的好玩，已经到了相当高雅的层次了。

谈祥柏先生是几代数学爱好者都熟悉的老科普作家，大量的数学科普作品早已脍炙人口。他为丛书所写的《乐在其中的数学》，很可能是他的封笔之作。此书吸取了美国著名数学科普大师加德纳 25 年中作品的精华，结合中国国情精心改编，内容新颖、风格多变、雅俗共赏。相信读者看了必能乐在其中。

易南轩老师所写的《数学美拾趣》一书，自 2002 年初版以来，获得读者广泛好评。该书以流畅的文笔，围绕一些有趣的数学内容进行了纵横知识面的联系与扩展，足以开阔眼界、拓广思维。读者群中有理科和文科的师生，不但有数学爱好者，也有文学艺术的爱好者。该书出版不久即脱销，有一些读者索书而未能如愿。这次作者在原书基础上进行了较大的修订和补充，列入丛书，希望能满足这些读者的心愿。

世界上有些事物的变化，有确定的因果关系。但也有着大量的随机现象。一局象棋的胜负得失，一步一步地分析起来，因果关系是清楚的。一盘麻将的输赢，却包含了很多难以预料的偶然因素，即随机性。有趣的是，数学不但长于表达处理确定的因果关系，而且也能表达处理被偶然因素支配的随机现象，从偶然中发现规律。孙荣恒先生的《趣味随机问题》一书，向我们展示出概率论、数理统计、随机过程这些数学分支中许多好玩的、有用的和新颖的问题。其中既有经典趣题，如赌徒输光定理，也有近年来发展的新的

方法。

中国古代数学，体现出算法化的优秀数学思想，曾一度辉煌。回顾一下中国古算中的名题趣事，有助于了解历史文化，振奋民族精神，学习逻辑分析方法，发展空间想像能力。郁祖权先生为丛书所著的《中国古算解趣》，诗、词、书、画、数五术俱有，以通俗艺术的形式介绍韩信点兵、苏武牧羊、李白沽酒等 40 余个中国古算名题；以题说法，讲解我国古代很有影响的一些数学方法；以法传知，叙述这些算法的历史背景和实际应用，并对相关的中算典籍、著名数学家的生平及其贡献做了简要介绍，的确是青少年的好读物。

读一读《好玩的数学》，玩一玩数学，是消闲娱乐，又是学习思考。有些看来已经解决的小问题，再多想想，往往有“柳暗花明又一村”的感觉。

举两个例子：

《中国古算解趣》第 37 节，讲了一个“三翁垂钓”的题目。与此题类似，有个“五猴分桃”的趣题在世界上广泛流传。著名物理学家、诺贝尔奖获得者李政道教授访问中国科学技术大学时，曾用此题考问中国科学技术大学少年班的学生，无人能答。这个问题，据说是由大物理学家狄拉克提出的，许多人尝试着做过，包括狄拉克本人在内都没有找到很简便的解法。李政道教授说，著名数理逻辑学家和哲学家怀德海曾用高阶差分方程理论中通解和特解的关系，给出一个巧妙的解法。其实，仔细想想，有一个十分简单有趣的解法，小学生都不难理解。

原题是这样的：5只猴子一起摘了1堆桃子，因为太累了，它们商量决定，先睡一觉再分。

过了不知多久，来了1只猴子，它见别的猴子没来，便将这1堆桃子平均分成5份，结果多了1个，就将多的这个吃了，拿走其中的1堆。又过了不知多久，第2只猴子来了，它不知道有1个同伴已经来过，还以为自己是第1个到的呢，于是将地上的桃子堆起来，平均分成5份，发现也多了1个，同样吃了这1个，拿走其中的1堆。第3只、第4只、第5只猴子都是这样……问这5只猴子至少摘了多少个桃子？第5个猴子走后还剩多少个桃子？

思路和解法：题目难在每次分都多1个桃子，实际上可以理解为少4个，先借给它们4个再分。

好玩的是，桃子尽管多了4个，每个猴子得到的桃子并不会增多，当然也不会减少。这样，每次都刚好均分成5堆，就容易算了。

想得快的一下就看出，桃子增加4个以后，能够被5的5次方整除，所以至少是3125个。把借的4个桃子还了，可知5只猴子至少摘了3121个桃子。

容易算出，最后剩下至少 $1024 - 4 = 1020$ 个桃子。

细细地算，就是：

设这1堆桃子至少有 x 个，借给它们4个，成为 $x+4$ 个。

5个猴子分别拿了 a, b, c, d, e 个桃子（其中包括吃掉的一个），则可得

$$a = (x+4) / 5$$

$$\begin{aligned} b &= 4(x+4)/25 \\ c &= 16(x+4)/125 \\ d &= 64(x+4)/625 \\ e &= 256(x+4)/3125 \end{aligned}$$

e 应为整数，而 256 不能被 5 整除，所以 $(x+4)$ 应是 3125 的倍数，所以

$$(x+4) = 3125k \quad (k \text{ 取自然数})$$

当 $k=1$ 时， $x=3121$

答案是，这 5 个猴子至少摘了 3121 个桃子。

这种解法，其实就是动力系统研究中常用的相似变换法，也是数学方法论研究中特别看重的“映射-反演”法。小中见大，也是数学好玩之处。

在《说不尽的 π 》的 5.3 节，谈到了祖冲之的密率 $355/113$ 。这个密率的妙处，在于它的分母不大而精确度很高。在所有分母不超过 113 的分数当中，和 π 最接近的就是 $355/113$ 。不但如此，华罗庚在《数论导引》中用丢番图理论证明，在所有分母不超过 336 的分数当中，和 π 最接近的还是 $355/113$ 。后来，在夏道行教授所著《 π 和 e 》一书中，用连分数的方法证明，在所有分母不超过 8000 的分数当中，和 π 最接近的仍然是 $355/113$ ，大大改进了 336 这个界限。有趣的是，只用初中里学的不等式的知识，竟能把 8000 这个界限提高到 16500 以上！

根据 $\pi = 3.1415926535897\cdots$ ，可得 $|355/113 - \pi| < 0.00000026677$ ，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，一定会有

$$|355/113 - q/p| < 2 \times 0.00000026677$$

也就是

$$|355p - 113q|/113p < 2 \times 0.00000026677$$

因为 q/p 不等于 $355/113$ ，所以 $|355p - 113q|$ 不是 0。但它是正整数，大于或等于 1，所以

$$1/113p < 2 \times 0.00000026677$$

由此推出

$$p > 1/(113 \times 2 \times 0.00000026677) > 16586$$

这表明，如果有个分数 q/p 比 $355/113$ 更接近 π ，其分母 p 一定大于 16586。

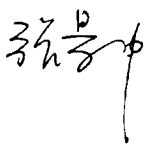
如此简单初等的推理得到这样好的成绩，可谓鸡刀宰牛。

数学问题的解决，常有“出乎意料之外，在乎情理之中”的情形。

在《数学美拾趣》的 22 章，提到了“生锈圆规”作图问题，也就是用半径固定的圆规作图的问题。这个问题出现得很早，历史上著名的画家达·芬奇也研究过这个问题。直到 20 世纪，一些基本的作图，例如已知线段的两端点求作中点的问题（线段可没有给出来），都没有答案。有些人认为用生锈圆规作中点是不可能的。到了 20 世纪 80 年代，在规尺作图问题上从来没有过贡献的中国人，不但解决了中点问题和另一个未解决问题，还意外地证明了从 2 点出发作图时生锈圆规的能力和普通规尺是等价的。那么，从 3 点出发作图时生锈圆规的能力又如何呢？这是尚未解决的问题。

开始提到，数学的好玩有不同的层次和境界。数学大师看到的好玩之处和小学生看到的好玩之处会有所不同。就这套丛书而言，不同的读者也会从其中得到不同的乐趣和益处。可以当做休闲娱乐小品随便翻翻，有助于排遣工作疲劳、俗事烦恼；可以作为教师参考资料，有助于活跃课堂气氛、启迪学生心智；可以作为学生课外读物，有助于开阔眼界、增长知识、锻炼逻辑思维能力。即使对于数学修养比较高的大学生、研究生甚至数学研究工作者，也会开卷有益。数学大师华罗庚提倡“小敌不侮”，上面提到的两个小题目都有名家做过。丛书中这类好玩的小问题比比皆是，说不定有心人还能从中挖出宝矿，有所斩获呢。

啰嗦不少了，打住吧。谨以此序祝《好玩的数学》丛书成功。



2004年9月9日

《好玩的数学》编委会

主 编 张景中

成 员 (按汉语拼音字母排序)

陈仁政 孙荣恒 谈祥柏 王树禾

吴鹤龄 易南轩 郁祖权

前 言

本书从动议到脱稿已经 18 年了。

1986 年黄山市程大位纪念馆建成，举行开馆典礼，同时举行纪念程大位逝世 380 周年学术会议。国内外许多专家学者如白尚恕、沈康身、李迪、李培业以及日本友人铃木久男等出席会议，交流研究成果、商讨珠算教育、算史研究、等级测试等有关事宜。李培业教授校注的《算法纂要校释》由安徽教育出版社出版，正式发行。同时决定出版《算法统宗》的校释本，开展明清时期皖南数学史的研究活动，重点探讨程大位、戴震、汪莱、梅文鼎、江永等人的数学成就和对社会的贡献。在此期间，原安徽教育出版社总编孙述庆先生认为《算法统宗》“难题”一章搜集了我国古代对儿童进行数学启蒙教育的名题，几百年长盛不衰，现在已日趋淡薄，希望能出一本小册子重点加以介绍，让这些群众喜闻乐道的趣题能够保存下来，并建议书名为《中国古算解趣》，以中小学生对为对象，突出思想性、知识性和趣味性，不就题论题，而结合历史文化背景讲解，借以进行爱国主义教育和数学思想方法的教育；拓宽知识面，借题发挥，把古代一些有用的数学方法、理论成果结合起来，配合中小学的数

学学习，推进素质教育；适当配一点插画，增强可读性和趣味性。黄澍先生是我国书画名家，又是数学教授，请他仿丰子恺的笔法画几张插画，使栩栩如生的古人跃然纸上，让这本小册子具备诗、词、书、画、数五术俱有的韵味。这件事虽有点难，但却是一件好事，我们二人就将这个任务接受下来。白尚恕、沈康身、李迪、李培业、胡炳生等中算史专家多次到屯溪调研和交流学术，并将他们的研究成果赠送给我们，这些珍贵的礼物使我们获益匪浅。

另一方面，我们长时期从事大、中学校的数学教育，也感到这块阵地上“中算史”的教育亟待加强。这不光是进行爱国主义的思想教育，更应该拓宽我国传统数学的教育渠道，中西结合，在比较中提高。早在20世纪50年代初，胡术五、罗运楷、黄澍等在皖南屯溪中学任教，他们是中学教育界的名师，古算功底很深。也许是兴趣关系，他们断续地做过一些研究。60年代中期，胡退休在屯溪，应余介石先生之约，对《算经十书》、《梅氏丛书辑要》、《勾股举隅》等作了一些校点，对程大位、戴震、汪莱等的故里会同黄澍作了多次调查。1978年，安徽省数学会在旌德召开第二次年会，这是改革开放后的第一次大会，盛况空前，吴文俊、江泽涵等著名数学家出席会议。吴作了《希尔伯特的几何基础——兼谈中国古代数学的历史地位》的学术报告，历时4个小时，感人至深，特别是对中国古算的现代意义有了新的诠释。其时，吴先生在数学证明机械化方面，已取得了突破性的进展。嗣后，

我们将报告录音整理成文，并经吴先生审阅同意，印发给黄山市数学会的所有会员，大家都觉得在中学应加强中算史知识的教育。教育部最近颁布新的课程标准，数学史已列入选修内容，可算是众望所归。鉴于这样的背景，写此书既是压力，也是学习，更是机遇。

在取材方面，遵从述庆先生的意见，适当拓宽，结合中小学生的实际，把民间常用的算理算法向上一层次推进。以题引知，以点带面，对古算中常用的更相减损术、今有术、衰分术、方程术、盈不足术、大衍求一术和勾股术等都做了通俗易懂的介绍，注意古为今用、古今结合。不涉及高深领域，初高中学生能读懂全书；门槛很低，小学生也能跨进。在讲题之余，还用一定篇幅介绍民间速算、巧算的方法，这不是雕虫小技、节外生枝、而是为了从小训练数学思维能力和空间想像力。让中算“寓理于算，不证自明”的功夫能在下一代身上收到潜移默化的效果。

说句实在话，我们的古算功底很薄，基本上是“边学边卖”。几位友人的赠书是导航的明灯，指引我们突破了不少难点。因为我们对中小学生的情况比较了解，做二传手可以保证到位。这样，专家们的成果可输散到平民百姓之中，可以走到课外，走进家庭，走到“茶馆式”教学的餐桌，老少同堂，共探祖国的传统数学“难题”。

本书的写作得到很多人的帮助。孙老，最早的策划者，如今已经退休；胡升华先生继其后，不断鼓励敦促，使18年前的设想终于实现。中国珠算协会会长

朱希安先生，安徽省珠算协会会长许尊普先生十几年来一直关注我们的工作，创造条件邀请我们参加学会活动，使我们结识了许多学者专家；安徽省教育厅老领导王世杰先生一直关注本书的写作，鼓励我们把书写好；省教育厅、黄山学院的领导和同志们更是全力支持。今天能够交稿，确是大家帮助的结果。年事已高，力不从心，许多事也靠家人的支持，在此一并致谢。稿纸一交，了却一件心愿，颇以为慰，但愿对孩子们有点帮助。

作者识

2004年8月23日

12