

通俗线性代数讲义

The Popular Teaching Materials of Linear Algebra

李徐鸿 编著

 中国人民大学出版社

21 世纪经济学系列教材

通俗线性代数讲义

李徐鸿 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

通俗线性代数讲义/李徐鸿编著

北京: 中国人民大学出版社, 2003

(21 世纪经济学系列教材)

ISBN 7-300-04594-4/F·1413

I. 通…

II. 李…

III. 线性代数-教材

IV. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 017950 号

21 世纪经济学系列教材

通俗线性代数讲义

李徐鸿 编著

出版发行 中国人民大学出版社

社 址 北京中关村大街 31 号

邮政编码 100080

电 话 010-62511242 (总编室) 010-62511239 (出版部)

010-62515351 (邮购部) 010-62514148 (门市部)

网 址 <http://www.crup.com.cn>

<http://www.ttrnet.com> (人大教研网)

经 销 新华书店

印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司

开 本 787×965 毫米 1/16

版 次 2003 年 10 月第 1 版

印 张 21

印 次 2003 年 10 月第 1 次印刷

字 数 383 000

定 价 25.00 元

版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换

21 世纪经济学系列教材

学术顾问 (按姓氏笔画为序):

卫兴华 宋 涛 陈 共 吴大琨
吴易风 胡 钧 胡乃武 高鸿业
高成兴 黄 达 阎达五

主编:

杜厚文 林 岗

编委 (按姓氏笔画为序):

韦 伟 李子奈 邱华炳 舒 元
杨瑞龙 周立群 周茂荣 易丹辉
洪银兴 姚开建 高德步 高培勇
徐茂魁 黄卫平 黄泰岩 彭 刚



总 序

“21 世纪经济学系列教材”在中国人民大学经济学院及相关财经院系广大教师的共同努力下终于逐步推出。这是中国人民大学经济学院建院以来的重要成果之一，也是国家教育部中国人民大学国家经济学基础人才培养基地的重要成果。

中国人民大学经济学院最早成立于 1988 年，由著名经济学家黄达任首任院长。1998 年经济学院进行了调整，下设经济学系、国际经济系、经济研究所以及中国改革与发展研究院。中国人民大学经济学院的前身可以追溯到 1951 年创办的中国人民大学经济学系。建国初期，经济学系曾为我国培养了大批马克思主义经济理论人才和经济工作者，更重要的是，在改革开放时期，为推进社会主义市场经济理论做出了积极的贡献。经济学院重建以后，在理论创新、教学改革、队伍建设等方面都取得了辉煌的成就。1991—1998 年，经济学院共承担国家社会科学基金科研项目 55 项，获得国家和省部级科研奖 31 项。1998 年，经过严格评审，中国人民大学经济学院被教育部确定为国家经济学基础人才培养基地。

经济学院在经济学教材建设方面做出了重要的贡献。早在五六十年代和改革开放初期，《政治经济学概论》、《政治经济学简明教程》、《〈资本论〉典故注释》、《帝国主义政治经济学》、《经济学说史》、《中国近代经济史》等，就曾作为我国

高校经济学专业的权威性教材，影响了几代经济学子。近些年来，经济学院又出版了《政治经济学》、《社会主义市场经济通论》、《现代西方经济学》、《发展经济学》、《世界经济》、《国际经济学》、《国际贸易教程》等教材，以及研究生教材《西方经济学》等；此外，还翻译了包括萨缪尔森的《经济学》和斯蒂格利茨的《经济学》等著名的国外经济学教材。这些教材都在全国产生了重要的影响。

在进入 21 世纪的今天，中国人民大学经济学院及相关财经院系的中青年教师和科研人员，在老一辈经济学家的指导下，由中国人民大学国家经济学基础人才培养基地具体组织和策划，在总结过去教材建设经验尤其是改革开放以来经验的基础上，结合经济全球化的新形势、新格局，经过反复研究论证和精心写作，又推出了“21 世纪经济学系列教材”。这套系列教材包括《政治经济学》、《西方经济学》、《财政学》、《货币银行学》、《国际经济学》、《统计学》、《会计学》、《计量经济学》、《世界经济学》、《国际贸易教程》、《经济学说史》、《〈资本论〉解读》、《信息经济学》、《产业组织理论》、《世界经济史》、《中华人民共和国经济史》、《现代公司制度概论》、《马克思主义经济思想史》、《产业经济学》、《当代西方经济学流派》、《国际贸易结算与信贷》等 20 多种。这套教材也是“国家经济学基础人才培养基地”的专用教材。这套系列教材作为经济学院的标志性教材和中国人民大学国家经济学基础人才培养基地的重要研究成果，坚持了马克思主义经济学基本理论，同时也反映了经济学理论的最新研究成果，具有基础性、通用性、创新性、前瞻性等特点。我们希望，通过这套教材的推出，进一步锻炼教师队伍，提高教学水平；同时，我们也希望通过这套教材的使用，不断探索经济学科的教学和科研的新路子，为经济学在中国的发展做出进一步的贡献。

由于受我们的理论水平和对社会主义市场经济规律的认识所限，特别是随着知识经济时代的到来，我们的传统知识包括传统的经济学知识，也要不断更新，所以这套教材还会存在许多不足之处。希望通过这套教材的出版，与经济学同仁一起研究和探讨，进一步提高经济学教材的编写水平，提高经济学教学和科研质量，为经济学的发展做出新的贡献。

丛书编委会

2000 年 11 月



内容提要

本书提出了线性代数基本定理：一个方阵的行向量组与列向量组的线性相关性相同。以基本定理为纲作者建立了一个新的线性相关的理论体系，从而增加了一些新定理，改进了一些定理的证明；用发现法引入了行列式的概念，给出了克拉默法则的一个标准的表述及其一个新的证明，指出了克拉默法则是一个根本法则及其在理论上的重大意义，还有许多独到之处值得一读；论述富有哲理，例如讲了数的哲学。

本书条理清楚，便于教学；说理透彻，利于理解；步骤详细，容易阅读。每章都有小结，习题有答案，使自学者可无师自通，使初学者可轻松入门。

本书给非数学专业的学生学习线性代数提供了足够的资料，可供各类学校不同专业、不同需求的学生选用，即使对数学专业的学生也很有益处。

书末附《高等数学拾遗》，这里有十篇拙作奉献给学习高等数学的读者，有些文章可作为教科书的补遗，有些有启发性，有些有新意。

《拐点理论的延拓》（第1篇）提出了左（右）拐点的概念，它的引入是那么顺理成章，使单调性、极值、凹性、拐点的理论更加和谐优美。精辟的论述、严密的理论、美丽的图谱将深深吸引你。关于拐点的理论尤其是定理4可能是目前较好的表述，可当做经典进入微积分学教程。

《实数的几何模型及运算律》（第9篇）引入了实数的理想数，理想数无处不

在，到处皆是，尤其是由于非常理想数零的倒数的引入，找到了零作除数的运算律，零的倒数是一个中性数，它是一个黑洞，蕴涵着无与伦比的能量。实数的几何模型是一个对立统一的和谐的数学殿堂。有限中有无限，无限存在于有限之中；无限中有有限，有限存在于无限之中。有了这个理论，有些事实要作些更改，例如极限和连续的定义的更新以及零不能作为无穷小量。

《行列式与矩阵的运动》（第 10 篇）介绍了主翻转、次翻转、横翻转、纵翻转、旋转五种行列式与矩阵的运动，找到了它们的运算律及性质，还给出了两个定理。



Synopsis

This book has advanced the Fundamental Theorem of Linear Algebra: In a square matrix, the linear dependency of the row vector group is the same with that of the column vector group. Taking the Fundamental Theorem as the key link, the author has established a new theoretical system of linear dependency. So some new theorems have come into being and some demonstrations of the theorems have been improved. The concept of determinant has been led in by using discovering method. The author gives a standard expression and a new demonstration of Cramer's law and points out that the Cramer's law is a basic law and has its own great significance in theory. The book has a great deal of originality worth reading. Its exposition is full of philosophy, for example, on the philosophy of numbers.

The book is well-organized and convenient for teaching, reasoning thoroughly and benefiting comprehension, step-detailed and easy to read. Every chapter has a brief summary, and the exercises have their own answers. It can make self-taught persons be learned without teacher and allow beginners to cross threshold with ease.

The book provides sufficient materials for non-mathematics majors to learn linear algebra. It is possible for the students who have various majors and demands in different kinds of institutions to select. Even to mathematics majors, it is of great benefit

too.

The book has a *Higher Mathematics Addendum* attached to the end, in which there are ten humble writings offered to readers studying higher mathematics. Some may serve as supplements to textbooks, some have heuristics and some have new senses.

The Extension of the Theory of Inflection Point (the first thesis) has proposed the new concept of left (right) inflection point. The concept is drawn in so lucidly and logically that it makes the theories of monotony, extreme value, concavity, and inflection point more harmonious and graceful. Brilliant exposition, tight theory, and beautiful atlas will attract you deeply. The theory concerning inflection point, especially Theorem 4, may be a better expression at present. It allows access to the course of differential and integral calculus as classics.

The Geometric Model and the Operational Rule of Real Number (the ninth thesis) has drawn in the ideal numbers of real number. The ideal numbers are omnipresent and ubiquitous. Especially as the extreme ideal number reciprocal of zero is drawn in, the operational rule of zero as the divisor has been found. Reciprocal of zero is a neutral number. It is a dark hole containing unparalleled energy. The geometric model of real number is a harmonious mathematical temple of unity of opposites. In finity there is infinity, and infinit exists in finity; in infinity there is finity, and finity exists in infinity. With the theory invented in the thesis, some facts have to be revised. For example, the definitions of limit and continuation should be renewed, and zero can not be regarded as infinitesimal.

The Motions of Determinant and Matrix (the tenth thesis) introduces five kinds of motions of determinant and matrix, such as primary turnover (round the main diagonal), that is transposition, secondary turnover (round the minor diagonal), transverse turnover (round the transverse axis of symmetry), longitudinal turnover (round the longitudinal axis of symmetry), and rotation (round the center of symmetry). In this thesis their operational rules and characteristics have been found, and two theorems have been given.

注：文中的 dark hole 不能改为 black hole，两者意思大不一样，这里不采用通常所谓黑洞的译法。



出版者记

作者提出的基本定理是对称中的对称，越对称越重要，它反映了宇宙的各向同性性，它把行列式与矩阵这两个毫不相干的概念联系起来了，由基本定理可以通过方阵来研究非方阵，因此基本定理是众定理的中枢。以基本定理为纲形成了一条对称纲，对线性相关的理论起到了提纲挈领的作用，而基本定理是纲中之纲。与此同时，还引入了一些很有意思的证明巧妙的新定理，顺理成章地改变了一些定理的证明。另外，作者对克拉默法则的表述及证明进行了改进，使之成为经典，对克拉默法则进行了独到的、精辟的论述，让读者知道它是一个根本法则。

本书条理清楚、说理透彻、深入浅出、步骤详细、论述精辟、富有哲理。讲一个道理能循序渐进、深入挖掘、力求讲透，结论尽量用定理形式给出。常采用通俗的讲课语言，力避学究式的刻板说教。资料较全，不需另看参考资料。教材是教学改革的关键，若采用本书，教师不必写或少写教案、板书可精减，学生不必记或少记笔记，课堂上能集中精力讲与学，即使不讲，学生也能看懂学会。因此，有利于贯彻少而精、启发式、自学为主的教学方法。本书可以作为教材的楷模。现在已很少有人讲辩证法了，作者处处用辩证的观点看问题，讲到了量变与质变、抓主要矛盾、数的哲学等，努力挖掘数学美，用了一分为二、对立统一观点解释数学现象，“一分为二”是对对立统一规律的最简单、最明了、最深刻

的概括，对立统一是一个根本的自然法则，辩证唯物主义永远是我们的工作指南。

高等数学拾遗的第九篇突破了零不能作除数的传统规定。作者为此发明了非常理想数 (the extreme ideal number) 零的例数及实数的几何模型，建立了有关理想数尤其是非常理想数零的倒数的运算律，这是一个创造。在几何模型中，正负配对、互倒配对、中性数配对，正数与负数以零为对称点，数与其倒数以 -1 和 $+1$ 为对称点，除了两个中性数零与零的倒数外，理想数的倒数仍是理想数，实数的倒数仍是实数。作者有意思地把零的倒数称为黑洞 (dark hole)，就是这个黑洞才使实数体系扩充为一个对立统一的和谐的对称体系，才使零作除数成为可能。一石激起千层浪，这个理论将革新传统的微积分学的理论，抛砖引出玉来。第十篇给出的行列式与矩阵的五种运动现在看来似乎用处不大，但正如红楼梦里第五回一副对联所云：世事洞明皆学问，人情练达即文章。除上述两篇之外，拾遗中第一篇提出了左（或右）拐点的概念使理论更加完美；第二篇给出了用了较多理论的由拉格朗日中值定理直接证明的柯西中值定理的一个新证明；第三篇提出了三种函数及底对数函数，底对数函数的研究，极限图形的概念，含有底、指、幂的函数的天作之合（正反配对），将令你耳目一新，倍感美满和谐；第四篇给出了分割求导选 u 法，你会对分部积分得心应手，会把一般教科书中的分部情况的讨论置之脑后，例题囊括了各种情况，例 7 的三种解法你不一定都见过，从此文中你还会明白什么是量变和质变；第五篇的最后一个连等式也很有趣；第六篇给出了最完美的几何解释，就连极端情况也有了，证法很妙；第七篇有点钻牛角，但也可以帮助理解；第八篇是一个实践的记录。

总之，该书理论革新、见解独到、讲义透彻、哲理有趣、别开生面，是一本难得的好书，乐意推荐给读者。



前 言

线性代数研究的对象是一种可进行线性运算（加法和数乘）的代数结构，矩阵理论在其中占有重要地位。本书主要涉及两个问题：一个是解线性方程组；一个是线性变换。

随着科学技术的发展，我们要研究多个变量之间的关系。各种实际问题在多数情况下可以线性化，线性代数正是解决这类问题的理论基础，因此，多种专业人员都需要学习线性代数。

本书是给非数学专业的学生编写的线性代数讲义，它提供了足够的材料供不同专业、不同需求的学生选用。前四章是必学内容，也就是说必须学会解线性方程组。如果不学第五章，第三章第七节也可以不学；若只想学会解线性方程组，第三章的内容也可再精减；第五章供有较高要求的专业选用；第六章供必要时自学；第七章供有关管理的专业选用；第八章供对数学有较高要求的专业选用； n 次代数方程概述供学生自学。

用发现法把行列式作为线性方程组求解公式的记忆方式引入。对克拉默法则给出了标准的表述，从而引出了该法则证明的新颖的第二部分。

对向量组的线性相关性理论的论述，为了理论上的严密性，本书在内容和体系上有较大改动。增加了定理4和定理5，并给出了有意思的证明；把方阵的行向量组与列向量组有对等的线性相关性的定理6作为线性代数的基本定理并给出

了证明，这是一个创新，以它为纲构成了线性代数中最重要的新的理论体系，从而由此引起了一系列的变革，例如定理 6 推论的证明，定理 7、定理 8 的证明，定理 9 的充分性证明 2，定理 17 的特别情况等；阐述了克拉默法则在理论上的重大意义；还给出了有关向量组的极大无关组数量特性的定理 11 及其推论以及定理 11 的证明；最后才引入矩阵的初等变换。

书中还有一些独到之处，在这里不能一一列出，请读者细心领会。

每章都有小结。由于学习过程是历史进程的迅速再现，因此我们应该了解点历史，故在小结中适当加入一些数学史。

本书的论述富有哲理，例如讲了数的哲学，并努力挖掘数学美，尤其是对称美。

本书条理清楚，便于教学；说理透彻，利于理解；步骤详细，容易阅读。

编著者

2000 年 9 月 9 日



目 录

第一章 行列式	1
第一节 问题的提出	1
一 二元线性方程组	1
二 三元线性方程组	2
第二节 全排列及其逆序数	4
一 全排列	4
二 逆序数与顺序数	4
三 对换	6
第三节 行列式的定义	7
第四节 行列式的性质	12
第五节 行列式的展开	19
一 k 阶子式及其余子式和代数余子式	19
二 行列式的展开	20
第六节 解线性方程组的根本法则——克拉默法则	29
小结	34
习题一	35
第二章 矩阵	40

第一节 矩阵的概念	40
一 引例	40
二 矩阵的概念	41
第二节 矩阵的运算	43
一 矩阵的线性运算	43
二 矩阵与矩阵相乘	44
三 矩阵的转置	49
四 方阵的行列式	49
五 方阵的迹	53
第三节 几种特殊的矩阵	54
一 共轭矩阵	54
二 对称矩阵	54
三 反对称矩阵	55
四 对角形矩阵	56
第四节 逆矩阵	58
一 逆矩阵的概念	58
二 矩阵可逆的充要条件	59
三 运算律	62
四 用逆矩阵的结构式证明克拉默法则	63
第五节 矩阵的分块	64
一 分块矩阵的概念	64
二 分块矩阵的运算	65
三 分块对角矩阵的运算	70
小结	71
习题二	73
第三章 向量组的线性相关性	78
第一节 线性相关与线性无关	78
一 引例	78
二 n 维向量	79
三 线性相关性	81
第二节 向量组线性相关性的判定定理	84
第三节 向量组的等价关系与极大线性无关组	92
一 向量组的等价关系	92

二 极大线性无关组	94
第四节 向量组的秩与矩阵的秩	98
一 向量组的秩	98
二 矩阵的秩	101
第五节 矩阵的初等变换	104
一 矩阵的初等变换	104
二 初等矩阵	105
三 矩阵的等价	106
四 用初等变换求逆矩阵	117
第六节 向量空间	118
一 向量空间	118
二 向量空间的基和维数	120
第七节 欧几里得向量空间	124
一 引言	124
二 概念	124
三 正交向量组	125
四 正交规范基	127
五 正交矩阵	131
小结	136
习题三	139
第四章 线性方程组	143
第一节 线性方程组有解的充要条件	143
第二节 齐次线性方程组	147
一 齐次线性方程组的解的结构	147
二 解齐次线性方程组	151
第三节 非齐次线性方程组	154
一 非齐次线性方程组的解的结构	154
二 解非齐次线性方程组	155
小结	159
习题四	161
第五章 相似矩阵及二次型	164
预备知识: n 次代数方程概述	164
一 n 次代数方程	164