

6-8437

初等几何教程 上册

(平面几何)

(法) J. 阿达玛著 朱德祥译

上海科学技术出版社



初等几何教程

上册

(平面几何)

[法] J. 阿达玛 著

朱德祥 译

上海科学技术出版社

譯 者 序

本書譯自法國數學家阿達瑪(J. Hadamard)著初等幾何學卷一第十一版(1931年),並參照了該版的俄文譯本第三版(1948年)。原著初版問世在19世紀末,以後迭經改版,迄今始終是初等幾何方面的重要文獻。

本書特色之一在於配有大量習題,照原著者本人說,習題的難易程度是大相懸殊的,而且是由淺入深排列的;每一章末的習題比較容易,每一編末的習題就比較難些,而書末的則更難些。習題的來源不一,其中有不少是中學數學教師的試題,有很多為作者所擬,且有很大一部分可作為創造性工作的材料。俄譯本第三版將全部習題作了解答,在解法的選擇上,力求接近於原著者的風格,並照顧到習題本身在書中的位置,以及與前後習題的聯繫等等。在解答的敘述上,突出了解的邏輯部分,但在個別地方,對於解的其他部分中比較難而極為重要的也作了說明。同時校正了原書習題中的個別錯誤或改進了原來的敘述。我們譯出了俄譯本習題解答,一併附於書末,供讀者參考。

限於本人的水平,錯誤必所難免,尚祈讀者指正!

朱德祥 1962年7月於昆明師範學院

第一版序

在編写这一部几何教科书的时候，我始終沒有忘却这門学科在初等数学中所占的独特地位。

事实上，摆在数学教育的开端，它是推理方面最朴实最容易接近的一門。几何的方法，力量之大，果实之丰，比起較抽象的算术或代数来，是最直接而容易观察到的。因此，在鍛练思維能力方面，几何能起无可否认的作用。为了增强这个作用，我設法首先培养学生的主动性，并尽一切可能来促进这种主动性。

因此，我认为有必要附以大量的习题，使之成为本书的一个組成部分。在选习题的时候，可以說这个必要性是我的唯一指針。我认为应当搜集难易程度大相悬殊并由淺入深的问题：每一章末的习题，尤其是其中最初的一些，是非常简单的；每一編末所列的习题，它的解答就不那么简单了；最后，在卷末安排了一些比較难的问题。有些习题涉及一些重要的理論——例如那些关于反演以及圓系的，而其中不少是取材于达尔布 (Darboux) 的著作 *Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace*^①；相反地，其他一些习题只有一个目的，即

① *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2^e série, t. I, 1872.——习题 401 (求作一圓周切于三个已知圓周)是 Ampère 中学教师 Gérard 示我的。

使學生的思維習慣於推理。習題選擇的來源不一：有些是經典的習題，它們只是理論的直接運用（沒有放在本書的正文內或許要覺得奇怪），有的則取自法國或其他國家的各個著者和各種刊物，也有不少習題是我所擬的。

另一方面，在卷末安排了一個附錄，想在其中談談數學方法的基本原理。談起這些原理，初學者從一開始就應該要求透徹了解的，但事實上，甚至常見我們高等學校的學生也還搞不清楚。應當承認，我在这方面所採取的論斷形式並非是最適宜的：這樣一個課題應當用對話的方式來學習，每一個法則就在需要它的時刻出現。雖說如此，我認為有責任作這樣敘述的嘗試，希望讀者原諒那些不可避免的缺陷。無論如何，這樣的嘗試總是有益的，並將促進某些觀點的培養，關於這些觀點的重要性是毋庸置疑的。

其他的附錄也放在卷末，却有特殊的性質。附錄 B 涉及歐几里得公設。近代的幾何學對於這問題的概念已達到相當明晰而確定的地步，從而有必要和可能在一本初等性質的幾何學上作一個鳥瞰。

附錄 C 是關於切圓問題的。誠如考涅格斯 (Koenigs) ① 所指出的，約爾剛 (Gergonne) 的解法縱或對作者所忽視了的相應的證明加以補充，仍然有一些缺陷，我想把這缺陷填滿。

最後，附錄 D 專談面積的概念。如所周知，通常關於面積的理論有一個嚴重的邏輯缺點，即假設先驗地 (a priori) 這個量有定義，並具有某些性質。我在附錄 D 中所談的，則沒有用這公理，所以應該被歡迎，特別是想應用於空間而無需顯著的變化的話。

在本書中，對各種經典的理論也作了有益的修正，或者是為了嚴格，或者是為了簡單：舉例說來，在第一編開始，關於過一直線上

① "Leçons de l'agrégation classique de Mathématique", p. 92. Paris, Hermann, 1892.

一点所引的垂綫存在的証明，习惯上在这个地方基于連續原理的看法被抛弃了，只要在另一方面不加証明地承认可以平分一綫段或一角。关于角的轉向的看法，使我在第二編及其后若干地方的一些定理能叙述得清晰而普遍，而同时又无損其简单与初淺。

第三編补充材料中所讲的理論，不包括在欧几里得初等几何范圍以內，但在教育上有它的一定地位。我只能局限于这些理論的綱要，而把沒有实际重要性的部分全都抛弃。本书的編制是这样的，补充材料以及小字排印的地方，初次閱讀可以省略而不致感到不銜接。

达尔布先生信任我編纂本书，并在編纂中不断地給我重要指示，我将以衷心的感謝結束这序言。

J. 阿达瑪(Jacques Hadamard)

第二版序

自从本书第一版問世以来，数学教育，特别是几何的教育，不仅在細节上，而且在整个精神上引起了长久期待而又普遍要求的深刻变化。对于数学教育的最初阶段，人們把基础放在练习和直观上，而不是放在欧几里得的邏輯方法上，对于这个方法，初学的人是不易理解它的应用的。

相反的，当重新考虑初步的目标，并使其臻于完善的时候，显然又要回到这方法上。本书相当于第二阶段的教育，因之，我們沒有更改它的风格。

但即使用邏輯的严正观点，第一章关于角的經典式的叙述也显得不必要的复杂而繁瑣。直到現在为止，不准在第一編讲圓周的慣例，使得此处本来十分明白而自然的东西成为不明显的了。从开始就介紹角和圓弧的概念，就可以使这方面的問題变得非常简单。我們过去曾拒絕采用連續原理作为傳統上用作垂綫存在的基础，現在，我們用以替代的簡單設計本身也变成多余了。

这样一来，圓心角的度量自然地联系于角的理論，并在本书找到了真实的邏輯的位置。

第二編也有不少的变化，事实上，圓周角的基本性质和角的度量問題分开来了，以前把这两个問題联在一起，可能給圓周角的性质和它的意义一个不正确的概念。

除此以外，本书的方針就整体而論沒有变化。另一方面，1902年的大綱所介紹的补充資料在本书第一版已得到处理。1905年的大綱很快地又把這些补充資料的重要性減削了，因之不需要我們做重要的變更。其中只增加了一點，即波色列反演器。此外，大綱中仅余的补充理論（至少在平面几何部分^①）——反演及其應用——相当于我們的补充材料五~七章。

近年来教育上有一种趨勢不可以不承認，就是人們常常談論启发法，我希望人們开始用于實踐。1898年本书第一版所加的附录（附录A）正是为了表明如何理解这个在我看来如此重要的方法——最低限度，如何在理論上理解它，因为要应用启发法必須两者俱备。但愿这个附录在今天可以起一些作用，至少指出了这一方面的一些原則。

我曾說过（参看“立体几何”序），附录C中所讲关于切圓問題的方法，实际上归源于富写（Fouché）甚至龐斯雷（Poncelet），而关于面积問題，也拉尔（Gérard）有一个解法（和附录D所讲的不同）。我乘机提一下，关于面积的理論，方德涅（Fontené）曾持異議而又放弃了。

J. 阿达瑪

① 順便要談一下，我絲毫无意把平面几何和立体几何混合起来。我但愿这种混合是从純邏輯的观点得到支持的。对于我說，我們从教育的观点首先应当分散难点。“在空間看”本身就是严重的困难，我不认为应当把它在起初就和其他的困难加在一起。

第八版序

这一版与以前各版没有重要的变更,但有一点可以注意,即我們对于欧几里得公理的看法因晚近物理学方面的进展而大为修正: 鉴于科学思想上的这一进展,我应该修正附录 B 的结尾部分 (308, 308a).

为了更多地指出活絡系統 (systèmes articulés) (可参看 46a 备注 3°——譯者注) 的重要性,这一版作了一些修改.

J. 阿达瑪

目 录

譯者序	i
第一版序	ii
第二版序	v
第八版序	vii

緒 論

1. 体,面,綫,点	1	5. 綫段及其比較	3
1a. 几何軌迹	1	6. 平面	5
2~2a. 数学命题	2	7. 圓周	5
3. 全等图形	3	8~8a. 弧	6
4. 直綫	3	9. 直徑	7

第一編 直 綫

第一章 角		角的角平分綫	12
10~11. 角的比較	8	16. 銳角,鈍角,补角,余角	13
12. 对頂角的相等	9	17~18a. 角的度量	13
13. 弧与角	10	19. 过直綫外一点可以作它的 一条也只一条垂綫	16
14. 垂直綫. 过直綫上一点可 以作它的一条也仅一条垂 綫. 直角	11	19a. 关于直綫的对称	17
15. 由一点发出若干半綫所形 成各角的和	11	20~20a. 轉向	17
15a. 两相交直綫所形成的四个		习题 1~4	19
		第二章 三角形	
		21. 一般的多边形	19

22~22a. 三角形	20
23. 等腰三角形的性质	20
24. 全等三角形定律	22
25. 三角形的外角. 在任一三 角形中, 大边所对的角较 大, 反之亦然	23
26. 直綫段較有同样端点的折 綫为短	24
27. 包圍的和被圍的折綫	25
28. 設两三角形有两边分別相 等而夹角不等, 則大角的对 边較大	26
习题 5~15	27
第三章 垂綫与斜綫	
29~30. 垂綫与斜綫	28
31. 由一点到一直綫的距离	29
32~33. 距两已知点等远的点的軌 迹	29
习题 16~18	31
第四章 直角三角形全等定律. 角 平分綫性质	
34~35. 直角三角形全等定律	31
36. 角平分綫性质	32
习题 19~20	33
第五章 平行綫	

37. 內錯角, 同位角, 同旁內角	33
38. 平行綫	34
39. 过直綫外一点, 可引一直綫 平行于此綫	35
40. 过直綫外一点, 只可引一直 綫平行于此綫	35
41~42. 上列定理的逆定理	35
43. 边分別平行或垂直的角	37
44. 三角形的各角和	38
44a. 任意多边形的各角和	38
习题 21~25	39
第六章 平行四边形. 平移	
45~47. 平行四边形	40
48. 菱形, 矩形	44
49. 正方形	45
50~51. 平移	45
习题 26~32	47
第七章 三角形中的共点綫	
52. 各边的中垂綫	47
53. 高綫	48
54. 角平分綫	48
55~56. 中綫	49
习题 33~38	50
第一編习题 39~46	50

第二編 圓 周

第一章 直綫和圓周的交点	
57. 三点定一圓周	53
58. 直綫和圓周的交点; 圓周的 切綫	53
59. 切綫的普遍定义	54
60. 法綫	55
60a. 两圓周的交角	56
习题 47~49	56
第二章 直徑和弦	
61. 直徑是圓周的对称軸	56

62. 弦	56
63~64. 点到圓周的距离	56
65~66. 相等与不相等的弧与弦	58
67. 切綫与圓周有两个重合的 公共点	59
习题 50~54	60
第三章 两圓周的交点	
68~71. 两圓周交点的討論	60
72. 相切的两圓周有两个趋于 重合的交点	63

习题 55~59	63
第四章 圆周角性质	
73. 圆周角的度量	64
74. 弦切角的度量	65
75~76. 两割线所形成的角	66
77~78. 对给定线段的视角等于 已知角的点的轨迹	67
79~82. 圆内接四边形的性质	68
82a. 相等且有同向的角, 两边 各通过一定点, 则其顶点 的轨迹为一圆周	70
习题 60~72	70
第五章 作图	
83~84. 几何作图. 几何工具	71
85. 作图 1~3. 已知直线的 垂线. 角平分线	72
86~87a. 作图 4~9. 角和三角形	74
88. 作图 10. 过一已知点平 行于一已知线的直线	76
89. 三角板的应用	76
90. 作图 11~14. 圆周	77

91~92. 作图 15~17. 圆周的切 线	78
93. 作图 18. 两圆周的公切 线	80
94. 作图 19. 切于三已知线 的圆周	82
习题 73~91	84
第六章 图形的运动	
95. 有同一转向的全等图形	85
96~98. 平移, 旋转	86
99. 关于一点的对称	88
100~101. 全等且有同向的两形可 用平移和旋转互得. 两 图形的交角	88
102. 全等且有同向的两形可 用平移或旋转互得	89
102a~103. 另一证法(将运动分解成 对称)	91
104. 瞬时旋转中心	93
习题 92~97	94
第二编习题 98~123	95

第三编 相 似

第一章 比例线段	
105~107. 关于一般的比例	98
108~110. 线段的分割	100
111~112. 调和分割	102
113. 基本定理	103
114. 平行于三角形底边的直 线	105
115. 角平分线性质	105
116. 和两已知点距离之比等 于已知比的点的轨迹	107
习题 124~128	108
第二章 三角形的相似	
117. 引理	108
118~120. 相似定律	110

121. 一束直线在平行线上所 截的线段	112
习题 129~134	113
第三章 三角形的度量关系	
122. 射影	113
123~125. 直角三角形. 毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理	114
126~127. 任意三角形. 斯特瓦 特 (Stewart) 定理	115
128~130. 三角形中几条重要的线 的长度计算	117
130a. 外接圆半径	120
习题 135~147	121
第四章 在图中的比例线段. 根轴	

131~135. 一点对于圆周的幂.....122
136~138. 根轴(等幂轴).....125
139. 根心(等幂心).....126
习题 148~154127
第五章 位似与相似
140. 位似的定义.....127
141~142. 一般的性质.....128
143. 两圆的情况.....129
144. 和同一图形位似的两图 形彼此相位似.....130
145. 三圆周的相似轴.....132
146~149. 多边形的相似.....132
150. 自身对应的点.....135
150a. 縮放器.....137
习题 155~162137
第六章 作图
151. 作图 1~2. 比例綫段.....138
152. 作图 3~3a. 相似多边形.....139
153~156. 作图 4~9. 比例中項;綫 段 $X = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; 由和(或 差)及积所定的綫段; 外 内比.....140
157. 作图 10. 到两已知直綫

的距离成已知比的点.....145
158. 作图 11~13. 公切綫; 根 轴(等幂轴); 正交圓周 ...146
159. 作图 14~15. 切于已知 直綫或圓周并通过两已 知点的圓周.....147
习题 163~177148
第七章 正多边形
160~163. 正多边形的定义及存在...149
164. 正多角星(星状的正多边 形)151
165~170. 圓内接正多边形的作图; 正方形, 六边形, 三角形, 十边形, 五边形152
171~175. 十五边形.....157
176~178. 圓周的长度, 圓周长与 直徑之比.....161
179~179a. 圓弧的长度.....165
180~181. π 的計算. 周界法166
182~183. π 的計算. 等周法.....169
184. 計算的結果.....172
习题 178~189173
第三編习题 190~216174

第三編补充材料

第一章 綫段的符号

185~187. 关于符号的規定; 基本等 式.....177
188~189. 調和列点的性质.....179
190~191. 应用于位似以及一点对 于一圓的幂.....180
习题 217~222181

第二章 截綫

192~193. 关于截綫的定理. 逆定 理.....182
194~196. 应用: 完全四綫形三对頂

綫的中点; 透射的三角 形; 巴斯加 (Pascal) 定 理.....183
197~198. 过三角形的頂点且相交 于一点的三直綫在三角 形的边上所截的綫段.....186
习题 223~231188

第三章 交比、調和綫束

199. 交比.....189
200. 基本定理.....189
201. 調和綫束.....190

202. 完全四边形的性质.....191	222. 互反的圆周.....205
203. 一点对于一角的极线.....192	223~226. 逆对应点及弦.....206
习题 232~236192	227~228. 与两已知圆周交成等角 的圆周.....207
第四章 对于圆的极与极线	习题 242~257209
204. 极线的定义与作法.....193	第六章 切圆问题
205. 关于共轭点的定理.....194	229~231. 第一解法.....212
206. 配极图形.....195	232~236. 约尔刚 (Gergonne) 解 法.....213
207~208. 应用于透射的三角形和 布利安双 (Brianchon) 定理.....196	习题 258~268217
209~210. 度量性质的变换.....197	第七章 圆内接四边形性质. 波色 列(Peaucellier)反演器
211. 极线的新定义与作法.....198	237~238. 托勒玫(Ptolemy)定理. 点在同一直线上的情况...218
212. 圆周上四点的交比.....199	239. 由弧 a 和 b 的弦计算弧 $a \pm b$ 的弦220
213. 应用于共轭弦.....199	240~240a. 圆内接四边形两对角线 的比;这两对角线以及外 接圆半径的计算.....220
习题 237~241200	241. 波色列反演器.....223
第五章 反形	241a. 哈特(Hart)反演器224
214~216. 定义. 反演圆. 对于直 线的对称作为反演的特 殊情况.....200	习题 269~271a226
217~218. 两已知点的反点所联线 段的方向和长度.....202	第三编补充材料习题 272~286226
219. 互反曲线的切线. 两已 知曲线的反形的交角.....203	
220. 直线的反形.....204	
221. 任意圆周的反形.....205	

第四编 面 积

第一章 面积的度量	255. 圆内接四边形的面积.....236
242~246. 定义.....229	习题 287~301236
247. 矩形的面积.....231	第二章 面积的比較
248. 平行四边形的面积.....233	256. 有一角相等的两三角形 面积之比.....238
249~251. 三角形的面积.....233	257. 两相似多边形面积之比...238
252~252a. 任意多边形的面积;梯形 的面积.....234	258. 斜边的平方.....239
253~254. 正多边形的面积;多边形 的面积;圆外切多边形 的面积.....235	习题 302~311240
	第三章 圆面积
	259~260. 圆面积定义.....241

261~262. 圓面积公式, 圓扇形的 面积.....243	264~266. 等积三角形及多边形.....245
263. 圓弧所圍的图形的面积...243	267. 化圓为方的問題不能用 規矩作图.....246
习题 312~318244	习题 319~323247
第四章 作图	第四編习题 324~342247

附 录

A. 关于几何上的方法 (268~295) ...250	(296~308a)270
(a) 求証定理.....250	C. 关于切圓問題 (309~312a)280
(b) 几何軌迹, 作图問題.....259	D. 关于面积概念 (313~319).....287
(c) 几何变换的方法.....262	E. 馬尔法提 (Malfatti) 問題 (320~324).....292
B. 关于欧几里得公設	
杂題以及各种竞赛試題 343~422302	
习题解答318	

緒 論

1. 各方面都有限界的空間部分称为体。

空間相邻两区域的公共部分称为面，一張紙可以給我們面的近似观念。事实上，面是在它兩側的两个空間区域的界限。严格地說，一張紙并不是面，因为这两个区域被紙的厚度所占的空間区域所隔开。假設紙的厚度无限减小，那就得到面的概念了。

一个面上相邻两区域的公共部分称为綫，这定义显然与下面的定义相当：两个面的交界称为綫。

我們所画的綫，給我們一个几何綫的观念，但只是一个近似的观念，因为它無論怎样細，总有寬度，而几何綫是沒有寬度的。

最后，一綫上相邻两部分所公有的称为点，或者說，点是兩綫的交界。点沒有大小。

点、綫、面和体的任何集合，称为图形。

1a. 几何軌迹 任一条綫上含有无穷多点。

綫可以看成是点移动的痕迹，当我们用尖銳的鉛笔或鋼笔在紙上画綫时，就是这种情况（这样得到的点，只要是充分細小，就可比拟为几何点）。仿此，面可以由移动的綫形成。

定义 一个可以占无穷多位置的点的全体所組成的图形（通常是綫或面），称为点的軌迹。