新世纪财经院校经济数学教辅用书

线性代数

习题集

XIANXING DAISHU XITIJI

上海财经大学应用数学系 编

上海财经大学出版社

新世纪财经院校经济数学教辅用书

线性代数习题集

上海财经大学应用数学系　编

上海财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数习题集/上海财经大学应用数学系编. —上海：上海财经大学出版社，2004.9

(新世纪财经院校经济数学教辅用书)

ISBN 7-81098-168-4/O·004

Ⅰ.线… Ⅱ.上… Ⅲ.线性代数-高等学校-习题 Ⅳ.0151.2—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 055239 号

XIANXING DAISHU XITIJI

线性代数习题集

上海财经大学应用数学系 编

责任编辑 刘光本 封面设计 周卫民

上海财经大学出版社出版发行

(上海市武东路 321 号乙 邮编 200434)

网 址：http://www.sufep.com

电子邮箱：webmaster@sufep.com

全国新华书店经销

同济大学印刷厂印刷

上海浦东北联装订厂装订

2004 年 9 月第 1 版 2004 年 9 月第 1 次印刷

---

890 mm×1240 mm 1/32 5.5 印张 153 千字

印数：0 001—5 000 定价：11.00 元

前　言

线性代数以矩阵、向量、空间等作为主要研究对象，它所包含的理论知识是学生进一步学习和研究必要而且极为重要的基础。这门课程的特点是比较抽象，内容纵横交错，知识前后紧密联系。在教学过程中，我们经常发现一些学生对抽象的对象理解不透彻，他们能记住一些基本的定义和定理，却不能将这些定义和定理有机地融合在一起，在解题时表现出思维困难、推理混乱。理解抽象的概念、把握整个知识体系是一个渐近的过程，它需要对数学思想、方法和技巧的思考与消化，需要从不同角度、不同层面进行深入研究，其中有效的解题训练是一个不可缺少的基本环节。为了配合财经类《线性代数》的正常教学，我们编写了这本习题集。本书每章首先归纳了有关内容，选编了典型例题。在编写过程中，我们反复琢磨，并参照研究生入学考试的题型和难度认真选题。所以，该习题集既可以做一般教学的参考之用，也可以成为有志考研者的良师益友。

参加编写的有：董程栋（第一章），李志远（第二章），钱晓明（第三章），冉启康（第四章），张震峰（第五章），张远征（第六章）。上海财经大学应用数学系主任陈启宏教授、冉启康书记、杨晓斌副主任为这本书的编写作了不少指导，付出了心血。我系代数与几何教研室的同事们也给予了很多帮助。上海财经大学出版社给予了很大的支持，在此一并表示衷心的

感谢。

由于时间仓促，加上我们的水平有限，定会存在不足之处，恳请广大读者和同仁不吝赐教。

编　者

2004 年 8 月

于上海财经大学数学系

目　录

第一章　行列式

一、内容提要

(一)二阶、三阶行列式

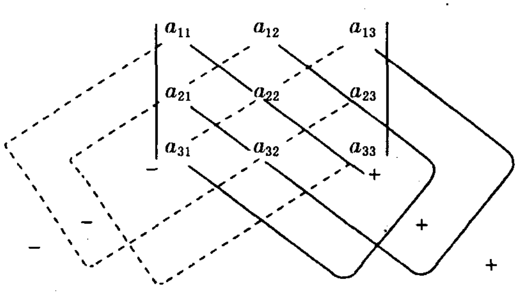
1. 二阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2. 三阶行列式定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

三阶行列式的每一项都是 3 个取自不同行不同列的元素的乘积，共有 3！ =6 项，其中 3 项的符号为正，另 3 项的符号为负，在三阶行列式的记号中，由实线相联的 3 个元素的乘积项带“＋”号，由虚线相联的 3 个元素的乘积项带“－”号，这种规则称为对角线法则。对角线法则仅适用于二阶、三阶行列式．



(二)排列和逆序

1. 排列的概念

将 n 个不同的元素排成一列,称为这 n 个元素的一个全排列,或称一个 n 级排列,简称排列.

n 个不同元素的所有 n 级排列的总数为 $n!$.

2. 逆序的概念

设 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 个不同自然数的一个 n 级排列,若 $j_s>j_t$,则称 j_s,j_t 这一对元素构成一个逆序.一个排列的逆序总数称为这个排列的逆序数,排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记做 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

3. 奇偶排列

逆序数为奇数的排列,称为奇排列;逆序数为偶数或零的排列,称为偶排列.

交换排列中任意两个元素,则改变排列的奇偶性.所有 n 级排列中($n\geqslant 2$),奇排列数与偶排列数各占一半.

(三)n 阶行列式的概念

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中,$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示取遍所有 n 级排列时,对形如 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的项求和.因此,n 阶行列式等于 $n!$ 项的代数和,每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,每一项的符号取决于该项中 n 个元素的列下标(行下标按自然顺序排列时)排列的奇偶性,即当排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时,该项取正号;当排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时,该项取负号.

(四)n 阶行列式的性质

1. 行列式与其转置行列式相等.

2. 互换行列式的两行(列),行列式改变符号.由此可得:若行列式中有两行(列)对应元素均相等,则此行列式的值为零.

3. 用数 k 乘行列式等于行列式的某一行(列)中的所有元素都乘以这个数 k.

由此可得:

(1) 行列式的某一行(列)中的所有元素的公因子可以提到行列式的外面.

(2) 若行列式的某一行(列)中的所有元素全为零,则该行列式的值为零.

4. 若行列式中有两行(列)对应元素成比例,则此行列式的值为零.

5. 若行列式的某一行(列)中的所有元素都是两个数的和,则此行列式等于两个行列式的和. 这两个行列式的这一行(列)的元素分别是对应的两个加数中的第一个数和第二个数,而其余各行(列)的元素与原行列式的相应的各行(列)的元素相同.

6. 把行列式的某一行(列)的所有元素的 k 倍加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变.

(五)行列式按行(列)展开

n 阶行列式 D 等于它的某一行(列)的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 而 n 阶行列式 D 的任一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases}D,(i=j)\\0,(i\neq j)\end{cases}$$

或 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases}D,(i=j)\\0,(i\neq j)\end{cases}$$

其中,A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(六)克莱姆(Cramer)法则

1. 若线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则该方程组有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中，$D_j(j=1,2,\cdots,n)$是将系数行列式 D 的第 j 列元素换成方程右端常数项$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，其余元素不变所得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad j=1,2,\cdots,n$$

2. 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组仅有零解；若该方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

二、典型例题

例 1 决定 k,l 使 $a_{2k}a_{35}a_{5l}a_{44}a_{12}$ 成为五阶行列式符号为负的项.

解 将此乘积中各元素的行标（第一个下标）按自然顺序排列得

$$a_{12}a_{2k}a_{35}a_{44}a_{5l}$$

则各元素的列标（第二个下标）的排列为

$$2k54l$$

若该排列为奇排列，则这一项的符号为负．显然，k,l 只能取 1 或 3. 若 $k=1,l=3$，则列标排列为 21543，其逆序数为 $\tau(21543)=4$ 为偶数；若 $k=3,l=1$，则列标排列的逆序数为 $\tau(23541)=5$ 为奇数．所以，列标排列 23541 为奇排列，此时 $a_{12}a_{2k}a_{35}a_{44}a_{5l}$ 即 $a_{23}a_{35}a_{51}a_{44}a_{12}$ 是五阶行列式中符号为负的项．

例 2　证明 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

证法一　（利用 n 阶行列式的定义）

由 n 阶行列式的定义可得

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

上式右边的 $n!$ 项中，仅当 $j_1=n,j_2=n,\cdots,j_{n-1}=2,j_n=1$ 时，对应的项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$ 不等于零，所以

$$D=(-1)^{\tau(nn-1\cdots21)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$$

证法二　（利用行列式的按一行（列）的展开定理）

将行列式 D 依次按第一列展开，得

$$D=a_{n1}(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-23} & \cdots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \\ a_{n-12} & a_{n-13} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$=a_{n1}(-1)^{n+1}a_{n-12}(-1)^{n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-34} & \cdots & a_{n-3n-1} & a_{n-3n} \\ a_{n-23} & a_{n-24} & \cdots & a_{n-2n-1} & a_{n-2n} \end{vmatrix}$$

$$=a_{n1}(-1)^{n+1}a_{n-12}(-1)^{n}a_{n-23}(-1)^{n-1}\cdots a_{2n-1}(-1)^{2+1}a_{1n}$$
$$=(-1)^{3+4+\cdots+n+(n+1)}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$$
$$=(-1)^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$$
$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix} = (klm+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证

$$\text{左边}=\begin{vmatrix} kc_1+a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2+a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3+a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}$$
$$=D_1+D_2$$

$$D_1=\begin{vmatrix} kc_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ kc_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ kc_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} c_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ c_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ c_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}$$
$$=k\begin{vmatrix} c_1 & ma_1+b_1 & lb_1 \\ c_2 & ma_2+b_2 & lb_2 \\ c_3 & ma_3+b_3 & lb_3 \end{vmatrix}=kl\begin{vmatrix} c_1 & ma_1+b_1 & b_1 \\ c_2 & ma_2+b_2 & b_2 \\ c_3 & ma_3+b_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$=klm\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$=klm\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1 & ma_1+b_1 & lb_1+c_1 \\ a_2 & ma_2+b_2 & lb_2+c_2 \\ a_3 & ma_3+b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & lb_1+c_1 \\ a_2 & b_2 & lb_2+c_2 \\ a_3 & b_3 & lb_3+c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{左边}=D_1+D_2=klm\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=(klm+1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\text{右边}$$

例 4 求多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a \end{vmatrix}$ 的根．

解

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-a & a & \cdots & a \\ a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & \cdots & a \\ x+(n-2)a & x-a & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-2)a & a & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-2)a & a & \cdots & a \\ 0 & x-2a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-2a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-2)a](x-2a)^{n-1}$$

所以，多项式 $f(x)$ 的根为

$$x_1=-(n-2)a, x_2=2a(n-1\text{ 重})$$

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b & \cdots & b \\ b & a_2 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \quad a_i = b, i=1,2,\cdots,n.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & -(a_1-b) & \cdots & -(a_1-b) \\ b & a_2-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-b)\begin{vmatrix} \dfrac{a_1}{a_1-b} & -1 & \cdots & -1 \\ b & a_2-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-b)\begin{vmatrix} 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{b}{a_i-b} & 0 & \cdots & 0 \\ b & a_2-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & 0 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{a_i-b}\right)\prod_{j=1}^{n}(a_j-b)$$

例 6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \frac{n(n+1)}{2} & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-n)^{n-2}(-1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)^{n-1}n^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n(n+1)}{2}n^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{(n-1)}(n+1)}{2}$$

例 7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}.$$

解法一 (利用按一行(列)的展开定理)

将 D_n 按第一列展开,得

$$D_n=a_1\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{2+1}a_2\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x\end{vmatrix}$$