大学数学名师导学丛书

概率论与数理统计名师导学

（文科）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

大学数学名师导学丛书

概率论与数理统计

名师导学

（文　科）

《大学数学名师导学丛书》编写组　编

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是以大学文科的《概率论与数理统计》的教学大纲为依据，结合大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测。

本丛书具有三“导”合一的特点：集中知识要点“导”学，典型例题与习题“导”讲，知识点学习和自测紧密“导”练。

本书适合学习《概率论与数据统计》的大学文科学生使用。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计名师导学(文科)/《大学数学名师导学丛书》编写组编. —北京：中国水利水电出版社，2004.7
(大学数学名师导学丛书)
ISBN 7-5084-2232-5

Ⅰ.概…　Ⅱ.大…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第068688号

书　　名	**概率论与数理统计名师导学(文科)**
作　　者	《大学数学名师导学丛书》编写组
出版、发行	中国水利水电出版社(北京市三里河路6号　100044) 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：sales@waterpub.com.cn 电话：(010) 63202266(总机)、68331835(营销中心)
经　　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京安锐思技贸有限公司
印　　刷	北京市优美印刷有限责任公司
规　　格	787mm×1092mm　16开本　7印张　125千字
版　　次	2004年8月第1版　2004年8月第1次印刷
印　　数	0001—6000册
定　　价	**9.50元**

《大学数学名师导学丛书》编写组

主　　编： 牛庆银

副 主 编： 董玉才

编写人员： 牛庆银　董玉才　杨万利

郑素文　刘文学　陈建华

前言

大学数学是理工科院校的重要基础课程。在教学改革后，由于授课时间的减少，很多学生陷入了“上课能听懂，课后解题却不知如何下手，考试更无所适从”的困境。为帮助学生摆脱困境，我们对辅导方式进行了积极创新，希望以有效的名师指导式辅导，使学生轻松学数学，牢固并灵活地掌握知识，从而取得优异的考试成绩。

本丛书根据目前大学数学教学大纲并参考最主流教材编写而成，由数位工作在教学一线的、教授级的中青年教师编写。内容简练明确，解决问题透彻明了，易学易用。本套丛书的结构特点是，在每章的开头，首先列出本章的知识要点，然后扼要论述知识要点分析和提出学习要求，随后通过丰富的典型例题，详细讲述解析方法和答案，最后附有极具针对性的习题与自测，学生灵活运用所学知识进行实践，使学生“知其然，更知其所以然”，巩固所学知识，从而能够协助学生顺利通过相应的日常学习和严格的考核。

本丛书具有三“导”合一的特点：

1）集中知识要点“导”学。通过把知识要点串联在一起，将大纲和知识要点分层讲解，方便学生查找，有的放矢地学习，避免遗漏。

2）典型例题与习题“导”讲。针对典型例题和习题，结合知识点进行精讲，给出多种解题思路、方法，使学生能触类旁通，从而轻松学习、解题和通过考试。

3）知识点学习和自测紧密“导”练。结合老师课堂练习必考和可能考的知识点以及考试要求，给出极具针对性的习题与自测，方便学生自我测试和掌握学习情况 。

由于编者水平有限，时间仓促，不妥之处在所难免，书中如有错漏之处，敬请广大读者批评、指正。

编　者

2004 年 6 月

目录

第一章 随机事件及其概率

一、知识要点

随机试验　随机事件　事件的集合与图示　事件的关系及其运算　概率的统计定义　概率的古典定义　概率的加法法则　条件概率　乘法法则　全概率定理　贝叶斯定理　事件的独立性　独立试验序列概型

二、知识要点分析

1. 随机事件

(1) 随机试验

是指满足以下三个特点的试验：

①在相同条件下试验可以重复进行；

②试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

③每次试验前不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果．

随机试验简称试验，用 E 表示．

(2) 随机事件

在每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量重复试验中却具有某种规律性的事件称为随机事件，通常用大写字母 A，B，C 等表示．

必然事件：在每次试验都必然发生的事件，称为**必然事件**，用 Ω 表示．

不可能事件：在每次试验都必不发生的事件，称为**不可能事件**，用 Φ 表示．

(3) 事件的集合与图示

对于试验的每一个基本事件，用只包含一个元素 ω 的单点集合 $\{\omega\}$ 表示；由若干个基本事件复合而成的事件，由包含若干个相应元素的集合表示，由所有基本事件对应的全部元素组成的集合称为**样本空间**．

事件间的关系和运算可以用集合论的知识来解释．

(4) 事件的关系和运算

设试验 E 的样本空间为 S. A，B，$A_i(i=1, 2, \cdots, n)$为 E 的子集.

① 事件的包含　在同一试验下的两事件 A，B，若 A 发生时 B 必发生，则称 A **包含** B，记作 $B\supset A$.

② 事件的相等　若 A，B 互相包含，即 $B\supset A$ 且 $A\supset B$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

③ 事件的并或和　设有两事件 A、B，定义一个事件 C 如下：

$$C=\{A\text{ 发生，或 }B\text{ 发生}\}=\{A，B\text{ 至少一个发生}\},$$

称事件 C 为 A 与 B 的**和事件**，记作 $C=A\cup B$.

设有 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，它们的和事件 C 定义为

$C=\{A_1$ 发生，或 A_2 发生，…，或 A_n 发生$\}=\{A_1$，A_2，…，A_n 至少一个发生$\}$.

记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，称为可列多个事件的和.

④ 事件的交（或积）　设有事件 A，B，定义事件 C 为

$$C=\{A，B\text{ 都发生}\},$$

事件 C 称为 A 与 B 的**积事件**，记作 $C=A\cap B$ 或 AB.

多个事件 A_1，A_2，…，的积事件定义为

$$C=\{A_1，A_2，\cdots，A_n\text{ 都发生}\},$$

记作 $C=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$$C=\{A_1，A_2，\cdots\text{都发生}\},$$

记作 $C=A_1\cap A_2\cap\cdots$，或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

⑤ 事件的差　设事件 A，B，定义事件 C 为

$$C=\{A\text{ 发生而 }B\text{ 不发生}\},$$

事件 C 称为事件 A 与 B 的**差事件**，记作 $C=A-B$，或 $C=A\overline{B}$.

⑥ 互不相容的事件　若事件 A，B 不能同时发生，即 $AB=\Phi$，则称 A，B **是互不相容的**，或称**是互斥的**.

⑦ 对立事件　若 A 为一事件，事件 $B=\{A$ 不发生$\}$，称 A 为 B 的**对立事件**，即 A，B 两事件满足关系 $A\cup B=S$，$AB=\Phi$，记作 $B=\overline{A}$.

⑧ 完备事件组　若事件 A_1，A_2，…，A_n 为两两互不相容的事件，并且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，称 A_1，A_2，…，A_n 构成一个**完备事件组**.

事件的运算具有以下性质：

① 加法交换律：$A\cup B=B\cup A$；

② 加法结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

③ 乘法交换律：$AB=BA$；

④ 乘法结合律：$(AB)C=A(BC)$；

⑤ 分配律：$A(B\cup C)=AB\cup AC$，$(A\cup B)C=(A\cup B)(A\cup C)$；

⑥ 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

2. **概率**

(1) 概率的统计定义

在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且一般来说，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的**概率**，记作 $P(A)$.

(2) 概率的古典定义

若试验结果一共由 n 个基本事件 E_1，E_2，…，E_n 组成，并且这些事件的出现具有相同的可能性，而事件 A 由其中某 m 个基本事件 E_{i_1}，E_{i_2}，…，E_{i_m} 组成，则事件 A 的概率可以用下式计算：

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}.$$

这里 E_1，E_2，…，E_n 构成一个等概完备事件组.

3. **概率的加法法则**

两个互斥事件之和的概率等于它们概率的和．即当 $AB=\Phi$ 时，

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

重要结论：

① 设两两互不相容事件 A_1，A_2,…，A_n，则有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

② $P(A)=1-P(\overline{A})$；

③ 若 $A\supset B$，则有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$；$P(A)\geqslant P(B)$；

④ 对任意两个事件 A，B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$

设 A_1，A_2．…，A_n 是 n 个事件，则

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=&\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)\\&+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)\\&+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\end{aligned}$$

4. 条件概率与乘法法则

(1) 条件概率

在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的概率，称为事件 A 在给定事件 B 下的**条件概率**，简称为 A 对 B 的条件概率，记作 $P(A/B)$，条件概率也是概率．有计算公式

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

(2) 乘法公式

由条件概率的计算公式得

$$P(AB)=P(B)P(A/B).$$

相应地，关于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的乘法公式

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1\cdots A_{n-1}).$$

(3) 全概率定理

如果事件 A_1，A_2，…构成一个完备事件组，并且都具有正概率，则对任一事件 B，有

$$P(B)=\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i).$$

(4) 贝叶斯(Bayes)定理

如果事件 A_1，A_2，…构成一个完备事件组，并且它们都具有正概率，则对任一概率不为零的事件 B，有

$$P(A_m \mid B)=P(A_m)P(B \mid A_m)/\sum_i P(A_i)P(B \mid A_i), m=1,2,\cdots.$$

5. 独立试验概型

(1) 事件的独立性

如果 $n(n>2)$ 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任何一个事件发生的可能性都不受其他一个或几个事件发生与否的影响，则称 A_1，A_2，…，A_n 相互独立．

性质：

① 事件 A，B 独立的充分必要条件为

$$P(AB)=P(A)P(B);$$

② 若事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 中的每一对事件都相互独立；

③ 若事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i);$$

④ 若事件 A_1，A_2，…，A_n 相互独立，则有

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A}_i).$$

(2) 独立试验序列概型

进行 n 次试验，如任何一次试验中各结果发生的可能性都不受其他各次试验结果发生情况的影响，则称这 n 次试验是**相互独立的**.

若试验只有两个可能结果 A 与 $\overline{A}$，$P(A)=p$，$P(\overline{A})=1-p=q$，$(0<p<1)$，将试验独立地重复进行 n 次，称为 n **重伯努利试验**，也称为**伯努利概型**.

设一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率 $p_n(k)$ 为

$$p_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}，(k=0，1，2，\cdots，n).$$

其中 $q=1-p$.

三、学习要求

1. 了解随机事件的概念，掌握事件的集合与图示，掌握事件的关系与运算.
2. 理解概率的统计定义和古典定义，掌握概率的加法法则.
3. 掌握条件概率的概念，掌握乘法公式、全概率公式以及贝叶斯公式.
4. 理解事件的独立性的定义，掌握独立试验序列概型的计算.

四、典型例题与方法解析

例 1 设 A，B 是任意二事件，计算 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}$.

解 由分配律得

$$\begin{aligned}&(\overline{A} \cup B)(A \cup B)(\overline{A} \cup \overline{B})(A \cup \overline{B})\\ =&(\Phi \cup BA \cup \overline{A}B \cup B)(\Phi \cup \overline{B}A \cup \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{B})\\ =&(\Phi \cup B)(\Phi \cup \overline{B}) = B\overline{B} = \Phi,\end{aligned}$$

$P(\Phi)=0$，故 $P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=0$.

例 2 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$，求事件 A，B，C 全不发生的概率.

解 由 $P(AB)=0$，得 $P(ABC)=0$，于是

$$P(\overline{ABC}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$$

$$
\begin{aligned}
&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)\\
&\quad -P(BC)-P(AC)+P(ABC)]\\
&=1-\frac{3}{4}+\frac{2}{6}=\frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

故事件 A，B，C 全不发生的概率为$\frac{7}{12}$.

例 3 已知两事件 A，B 满足条件 $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A)=p$，求 $P(B)$.

解 由于

$$
\begin{aligned}
&P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(A\cup B),\\
&1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-p-P(B)+P(AB).
\end{aligned}
$$

由题设 $P(\overline{A}\overline{B})=P(AB)$，故 $P(B)=1-p$.

例 4 设事件 A，B，C 为两两相互独立的事件，满足条件：$ABC=\phi$，$P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，求 $P(A)$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B\cup C)=&P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)\\
&-P(BC)+P(ABC).
\end{aligned}
$$

由题设

$$
\begin{aligned}
&P(A)=P(B)=P(C),\\
&P(AC)=P(A)P(C)=P^2(A),\\
&P(AB)=P(A)P(B)=P^2(A).
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\frac{9}{16}=3P(A)-3P^2(A).
$$

解得 $P(A)=\frac{3}{4}$或 $P(A)=\frac{1}{4}$，又 $P(A)<\frac{1}{2}$，因而有 $P(A)=\frac{1}{4}$.

例 5 一批产品有 10 件正品和 2 件次品，从中任取两次，每次取一个不放回，求第 2 次抽出的是次品的概率.

解 设 $A_i=\{$第 i 次抽出的是次品$\}$，$i=1$，2，第 1 次抽出的可能是正品也可能是次品，故

$$
\begin{aligned}
P(A_2)&=P(A_1A_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1A_2)+P(\overline{A}_1A_2)\\
&=\frac{2\cdot 1}{12\cdot 11}+\frac{10\cdot 2}{12\cdot 11}=\frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

例 6 袋中共有产品 N 件，其中有 M 件是次品. 现从中随机地取 n

件，求

(1) 求其中恰有 m 件次品的概率；

(2) 求其中至少有 m 件次品的概率.

解 (1)设"其中恰有 m 件次品"为事件 A_m，$m=0, 1, \cdots, l$，其中 $l=\min(n, M)$，从 N 件产品中取出 n 件，不同的取法共有 C_N^n 种，且这 C_N^n 种取法是等可能的.

使事件 A_m 发生的取法有 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$种，故所求事件的概率为

$$P(A_m)=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n.$$

(2) $$P(\text{至少有 } m \text{ 件次品})=\sum_{k=m}^{l} P\,(\text{恰有 } k \text{ 件次品})$$

$$=\sum_{l=m}^{l} C_M^k C_{N-M}^{n-k}/C_N^k, \quad (l=\min(n,M)).$$

例 7 从 1，2，…，10 共 10 个数字中任取一个，假定取得每个数字的概率都是$\frac{1}{10}$，取后还原，先后取出 k 个数字. 求下列事件的概率：

(1) $A_1=\{k$ 个数字全相同$\}$；

(2) $A_2=\{k$ 个数字中 5 恰出现 r 次$\}$；

(3) $A_3=\{k$ 个数字中最大者是$m\}$.

解 设试验 E 为取一个数字，有 10 个不同的基本事件. 依次取出 k 个数，每个数取出后还原，共有 10^k 种不同的结果.

事件 A_1 表示 k 个数字全不相同，故有利于 A_1 的基本事件数为 $10\cdot 9\cdot 8\cdot \cdots \cdot(10-k+1)$种，故

$$P(A_1)=10\cdot 9\cdot \cdots \cdot 8\cdot(10-k+1)/10^k.$$

在 k 个数中 5 恰出现 r 次的方式共有 C_k^r 种，其他 $k-r$ 次则是从剩下的 9 个数中任取，故

$$P(A_2)=C_k^r\cdot 9^{k-r}/10^k.$$

事件 A_3 是指 k 个数中的最大者是m，由于 k 个数是每次从 10 个数字中任取的，故 A_3 发生的可能情况有：k 个数中恰有一个数是 m，k 个数中恰有两个数是 m，…，k 个数均为 m，于是

$$P(A_3)=C_k^1\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{m-1}{10}\right)^{k-1}+C_k^2\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\left(\frac{m-1}{10}\right)^{k-2}$$

$$+\cdots+C_k^k\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{10}+\frac{m-1}{10}\right)^k-C_k^0\left(\frac{m-1}{10}\right)^k=\frac{m^k-(m-1)^k}{10^k}.$$

例 8 设在三次独立试验中事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于$\frac{19}{27}$，求事件 A 在一次试验中出现的概率．

解 设在每次试验中，事件 A 出现的概率为 P，则在三次独立试验中，A 至少出现一次的概率为

$$1-C_3^0P^0(1-P)^3=\frac{19}{27},$$

得 $P=\frac{1}{3}$. 故事件 A 在一次试验中出现的概率为$\frac{1}{3}$.

例 9 一盒中有 8 个铆钉，其中有 2 个次品，逐个取出，当取出 5 个时，求取到第 2 个次品的概率.

解 设所求概率事件为 A，

(方法一)仅考虑 5 次取出中次品出现的方式，共有 $n=C_8^2$ 种不同取法，A 色含基本事件数 $m=C_4^1\cdot 1$，则

$$P(A)=\frac{C_4^1\cdot 1}{C_8^2}=\frac{1}{7},$$

(方法二)考虑顺序抽取时，到第 5 次共有 $n=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$ 种不同取法，A 包含基本事件数 $m=4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 1$，所以

$$P(A)=\frac{4\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{1}{7}.$$

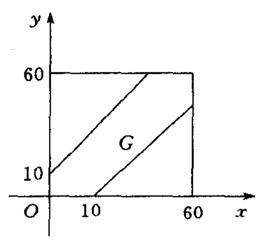
例 10 已知事件 A 发生的概率 $P(A)=0.5$，事件 B 发生的概率 $P(B)=0.6$ 及条件概率 $P(B\mid A)=0.8$，计算 $P(A\cup B)$.

解 由题设知道 $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=0.4$，故

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.6-0.4=0.7$$

例 11 甲、乙两人约定 7 点到 8 点之间会面，并约定先到者等候 10 分钟即可离去. 设想甲、乙两人各自随意地在 7 点到 8 点之间任一时刻到达，求甲、乙两人能会面的概率．

解 以 7 点作为原点，分钟作为单位，甲、乙到达的时间 x，y 构成平面 xy 上的点(x, y)，则点(x, y)在如图的正方形内，这个正方形就是全部可能的结果的集合. 由于甲、乙两人可各自随意地在 7 点到 8 点之间任一时刻到达，故理解为这正方形内任意一点的出现都是等可能的. 按照约定，只有当点(x, y)落入图中域 G 内时，两人才能会面，因此



$$P(\text{甲乙两人能会面}) = \frac{\text{域}\,G\,\text{的面积}}{\text{正方形面积}}$$
$$= \frac{60 \times 60 - 50 \times 50}{60 \times 60}$$
$$= \frac{11}{36}.$$

例 12 设两个事件 A 和 B 相互独立，都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，计算 $P(A)$.

解 由题设 A，B 互相独立，即

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

且 $P(\overline{A}\overline{B})=\frac{1}{9}$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，有

$$\begin{cases} P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1-P(A+B) = \frac{1}{9}, \\ P(A)-P(AB) = P(B)-P(AB). \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} 1-P(A)-P(B)+P(A)P(B) = \frac{1}{9}, \\ P(A) = P(B). \end{cases}$$

故

$$1-2P(A)+P^2(A)=\frac{1}{9}.$$

解得 $P(A)=\frac{4}{3}$ 或 $P(A)=\frac{2}{3}$，由于 $P(A)\leqslant 1$，故 $P(A)=\frac{2}{3}$.

例 13 有 n 个学生参加考试，共有 M 个考签($n \geqslant M$)，被抽过的考签看后立即放回，求在考试结束时至少有一个考签未被抽到的概率.

解 由于考签是看后放回，因此每个学生抽签都是在 M 个考签中抽取，抽到任一张考签的可能性均相同，共有 M^n 种可能性.

设 A_i 表示“第 i 张考签未被抽到”($i=1, 2, 3, \cdots, M$)，B 表示“考试结束时，至少有一张考签未被抽到”，则 $B=A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_M$，因此

$$P(B)=P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_M).$$

由加法公式

$$P(B) = \sum_{i=1}^{M} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant M} P(A_i A_j) + \cdots + (-1)^{M-1} P(A_1 A_2 \cdots A_M),$$

其中

$$P(A_1)=\left(\frac{M-1}{M}\right)^n,\quad P(A_1A_2)=\left(\frac{M-2}{M}\right)^n,\cdots,$$

$$P(A_1\cdots A_{M-1})=\left(\frac{1}{M}\right)^n,\ P(A_1A_2\cdots A_M)=0.$$

故

$$\begin{aligned}P(B)=&\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{M-1}{M}\right)^n-C_M^2\left(\frac{M-2}{M}\right)^n+C_M^3\left(\frac{M-3}{M}\right)^n\\&+\cdots+(-1)^{M-2}C_M^{M-1}\left(\frac{1}{M}\right)^n\\=&\sum_{i=1}^{M}(-1)^{i-1}C_M^i\left(\frac{M-i}{M}\right)^n.\end{aligned}$$

例 14 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号．求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率．

解 “不超过三次而接通”其含义是可能是第一次拨通，或是第一次未拨通，而第二次拨通，或是第一、二次均未拨通而于第三次才拨通．因此设事件 A_i 表示第 i 次拨通($i=1,2,3$)，而所求事件的概率为 $P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$．三者是互不相容的，而 A_1，A_2，A_3 是不独立的，所以

$$\begin{aligned}&P(A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\=&P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)\\=&P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2\mid\overline{A}_1)\\&+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)\\=&\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{10}.\end{aligned}$$

例 15 甲、乙两架飞机独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5．现已知目标被命中，求它是甲飞机射中的概率．

解 设 A={甲飞机射击}，B={乙飞机射击}，C={目标被击中}．则

$$P(A)=P(B)=0.5,\ P(C|A)=0.6,\ P(C|B)=0.5.$$

由贝叶斯公式知所求概率为

$$P(A|C)=\frac{P(AC)}{P(C)}=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}$$

$$=\frac{0.5\times0.6}{0.5\times0.6+0.5\times0.5}=\frac{6}{11}.$$

例 16 袋中装有 m 只正品硬币，n 只次品硬币(次品硬币的两面均印有国徽)，在袋中任取一只，将它投掷 r 次，已知每次都得到国徽，求这只硬币是