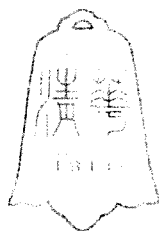


华夏英才基金资助项目

新型有限元论

龙驭球 龙志飞 岑松 著



清华大学出版社

华夏英才基金资助项目

新型有限元论

龙驭球 龙志飞 岑松 著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是华夏英才基金资助出版的专著,是龙驭球院士及其研究组 20 多年来在新型有限元方面研究成果的系统论述。全书共 20 章。除首尾两章外,其余 18 章分为 3 篇:第 1 篇是变分原理进展,介绍分区和含参变分原理 2 项成果;它们为构造新型有限元起理论指导作用。第 2 篇是有限元法进展初论,重点介绍广义协调元;这是在协调元与非协调元之间另辟的新路,使收敛问题得到合理解决,单元构造方案可以灵活优选,学科内容得到充实更新;广义协调元是新型有限元方面的主要成果,在本书中起核心作用。第 3 篇是有限元法进展续论,补充介绍 4 项成果,包括分区混合元法、解析试函数法、四边形面积坐标法和样条函数有限元法,在本书中起锦上添花作用。结合 7 项成果的论述,书中还介绍了相关的新单元,总共 108 个,汇集在一起,可供参考。

本书可作为高等学校力学、土木、机械等专业研究生和高年级本科生的教材和参考书,也可供相关领域教师和科技人员参考。

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13901104297 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

新型有限元论/龙驭球,龙志飞,岑松著. —北京:清华大学出版社,2004.8
ISBN 7-302-07862-9

I. 新… II. ①龙… ②龙… ③岑… III. 有限元 IV. O242.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 121534 号

出 版 者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦
<http://www.tup.com.cn> 邮 编:100084
社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

组稿编辑:徐晓飞

文稿编辑:梁广平

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:185×235 印张:35.75 插页:1 字数:671 千字

版 次:2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-07862-9/O·348

印 数:1~2000

定 价:88.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770175-3103 或(010)62795704

作者简介



龙驭球 教授，博士生导师。1926年生，湖南安化人。1948年清华大学土木工程系毕业后留校任教，1995年当选为中国工程院院士。

长期从事结构力学、壳体结构、有限元和变分原理的教学和科研工作。出版著作21本，发表学术论文200余篇。参加制定建设部1998年颁发施行的《钢筋混凝土薄壳结构设计规程》。代表性著作有《结构力学》、《变分原理·有限元·壳体分析》和《新型有限元引论》。首创科研成果有广义协调元、分区与含参变分原理、分区混合元、解析试函数法、四边形面积坐标法等。对剪切闭锁与畸变敏感等疑难问题提出新颖破解方案。

曾任教育部工科力学指导委员会主任委员，中国力学学会《工程力学》学报主编，中国土木工程学会第四届理事，1999年结构工程国际会议主席。现任国际学术期刊International Journal of Structural Stability and Dynamics和Advances in Structural Engineering编委。

获国家级奖和省部级奖20项。1999年以来，获国家科技进步二等奖(1999年)，第三届中国工程科技奖(2000年)，北京市教学成果一等奖(2000年)，国家级教学成果一等奖(2001年)，教育部优秀教材奖(2002年)和教育部科学技术一等奖(2002年)，并指导博士生获2002年全国优秀博士学位论文奖。

前 言

本书的酝酿过程经历了两个阶段、20 多个春秋。起初,于 1978 年出版教材《有限元法概论》之后,脑子里遗留不少亟待破解的学术疑难问题。从“学而后知不足”的格言引发出“著而后求创新”的感悟。经过 10 多年的师生切磋,相继在分区和含参变分原理、分区混合元、样条元、广义协调元等方面取得创新成果。1992 年着手整理,在 70 多篇论文基础上,出版专著《新型有限元引论》。这是第一阶段——由教材到专著的阶段。再过 10 年,广义协调元取得新发展,相继提出四边形面积坐标与解析试函数法,为剪切闭锁与梯形闭锁等疑难问题找到了破解方案。2002 年开始重新整理,在 200 多篇论文的基础上,撰写本书,作为有限元理论的一本专著。这是第二阶段——专著由单薄到厚重的阶段。两个阶段,三书更替,从中可以看到 20 多个年轮的依稀影子、“知不足”和“求创新”的不息轨迹。

本书旨在作者比较熟悉的方面,对有限元和变分原理的一些进展做一展示,一种远非完备的展示。全书共 20 章。除绪论与回顾 2 章之外,其余 18 章分成 3 篇,分别介绍以广义协调元为主的 7 项学科进展。

第 1 篇是变分原理进展,介绍前 2 项学科进展。

(1) 分区变分原理(第 2 章)——其特点是引入分区概念,提出适应有限元需要的新型变分原理。

(2) 含参变分原理(第 3 章)——其特点是含有可选参数,使变分原理具有更广泛的优化空间。

第 2 篇是有限元法进展初论,以 8 章篇幅专门介绍第 3 项学科进展。

(3) 广义协调元(第 4 章~第 11 章)——首先,从理论上,广义协调元是在协调元与非协调元之间另辟新路,使非协调元收敛之谜得到合理的解决;并提出多种新型协调方案,包括点协调、边协调、周协调、SemiLoof 型、最小二乘型及它们的组合形式。其次,从应用上看,最初成功地应用于薄板弯曲问题,构造出一系列性能优异的薄板广义协调元;然后推广到其他领域,构造出一大批新单元,包括膜元、含旋转自由度膜元、厚薄板通用元、复合材料层合板元、压电复合材料层合板元、平板型壳元和曲面壳

元,使学科内容得到更新。

第3篇是有限元法进展续论,以8章篇幅分别介绍另外4项学科进展。

(4) 分区混合元法(第12章,第13章)——此法利用位移元与应力元的耦合互补,为断裂问题提供新颖解法。

(5) 解析试函数法(第14章,第15章)——此法体现了解析法与离散法的贴近交融,为解决剪切闭锁、梯形闭锁、奇点问题提供有效解法。

(6) 四边形面积坐标法(第16章,第17章)——此法标志着面积坐标传统方法已从三角形传统领域开拓出去。

(7) 样条函数有限元法(第18章,第19章)——此法标志着样条函数的优点已被有限元学科吸收过来。

在论述7项理论成果的同时,由这些成果直接导出的108个新单元也在书中做了或详或简的介绍(参看表20-2)。这108个单元的原始论文凌乱地散落于各种学术刊物,很不起眼。现在汇集在一起,不仅便于参考,而且形成阵势,为本书平添一点特色。

本书的出版得到华夏英才基金的资助。本书的基础研究工作更是得到多方的资助,其中得到5项国家自然科学基金的支持:

多参数广义变分原理和有限元研究(1986—1988,批准号:数85287)

新型有限元系列研究(1990—1992,批准号:58978341)

p型和h-p型广义协调元和分区混合元(1996—1998,批准号:59578031)

广义面积坐标理论及由薄板壳元构造厚板壳元的通用方法(1999—2001,批准号:59878022)

通用面积坐标法的新进展及其有限元新模式与新对策(2003—2005,批准号:10272063)

此外,还得到高等学校全国优秀博士学位论文作者专项基金、高等学校博士学科点专项基金、煤炭系统留学回国人员科技基金、清华大学基础研究基金和湖南大学基础研究基金等的支持。

春风送暖,感激不尽。

龙驭球

2003年1月于清华园

主要符号

A, A^e	面积, 单元面积
B	单元应变矩阵
B_b	板弯曲问题单元弯曲应变矩阵
B_s	板弯曲问题单元剪切应变矩阵
$b_i, c_i (i=1, 2, \dots)$	单元几何参数 $b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j$
C	各向同性均匀板的抗剪刚度
C, D_s	板弯曲问题中剪切弹性矩阵
D, D_b	系统或单元的弹性矩阵, 板弯曲问题中弯曲刚度矩阵
D	各向同性均匀板的抗弯刚度
E	各向同性杨氏弹性模量
F, F_i	体力矢量及其分量
$F, F_{(\dots)}$	有限元插值基函数矩阵
G	各向同性剪切弹性模量
g_1, g_2, g_3, g_4	四边形形状特征参数
H, H_{pe}	交界处修正能量泛函的附加能量项
h	板壳或单元的厚度
$ J $	雅克比矩阵行列式
K^e	单元刚度矩阵
K_b^e, K_s^e	板弯曲问题中单元弯曲刚度和单元剪切刚度矩阵
K_I, K_{II}	I 型和 II 型裂纹的应力强度因子
L	边界外法线方向余弦矩阵
l, m, n	边界外法线方向余弦
$L_1, L_2, L_3 (L_4)$	三角形(四边形)面积坐标
M	板壳的弯矩场
M_n, M_{ns}	板壳中垂直于边界法向 n 的截面上单位长度的弯矩和扭矩
M_x, M_y, M_{xy}	板壳中垂直于 x 轴和 y 轴的截面上单位长度的弯矩, 垂直于 $x(y)$ 轴截面上单位长度的扭矩
N	板壳中面薄膜内力场

N_x, N_y, N_{xy}	板壳中面薄膜内力
N	有限元位移场形函数矩阵
n, s	边界的法向, 边界的切向
Q	板的剪力场
Q_n	板弯曲问题中垂直于边界法向 n 的截面上单位长度的剪力
Q_x, Q_y	板弯曲问题中垂直于 x 轴和 y 轴的截面上单位长度的剪力
q'	单元结点位移矢量(单元外部自由度)
$S, S_{(\dots)}$	连续体边界面(线), 内部交界面(线)
T, T_i	边(交)界面力矢量及其分量
U, V	系统或单元的应变能, 应变余能
u, u, u_i	位移场, 系统 x 方向位移, 位移矢量分量
$\bar{U}$	应变能密度
$\bar{V}$	应变余能密度
$V, V_{(\dots)}$	连续体及其各组成部分体积
V_n	薄板壳弯曲问题中垂直于边界法向 n 的截面上单位长度的横向等效剪力
v	系统 y 方向位移
$W, \delta W$	虚功
w	系统 z 方向位移, 或板的横向挠度
ε	系统或单元的应变向量
ε_{ij}	应变张量分量
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	系统或单元 x 方向和 y 方向的正应变
γ_{xy}	系统或单元平面内剪应变
$\gamma_{xx}, \gamma_{yy}, \gamma_x, \gamma_y$	板壳的横向剪应变
κ	板壳的曲率场
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	板壳中面在 x 方向和 y 方向的曲率, 在 x 方向和 y 方向的扭率
λ	有限元插值函数待定参数列阵
μ	泊松比
$\Pi, \Pi_{(\dots)}$	各种能量的泛函
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	按右手法则绕 x 轴、 y 轴和 z 轴的转角
σ	系统或单元的应力向量
σ_{ij}	应力张量分量
ξ, η	矩形单元局部坐标或四边形单元等参坐标
Ψ	板弯曲问题转角场
$\Psi_n, \Psi_s, \Psi_x, \Psi_y$	板弯曲问题中面法线转角

目 录

第 1 章 绪论——发展中的有限元法	1
1.1 有限元法的特点	1
1.2 有限元法与变分原理	2
1.3 有限元法的研究领域	3
1.4 有限元法新近进展	5
1.5 编写方针——按照有限元模式写有限元	7

第 1 篇 变分原理进展

第 2 章 分区变分原理	13
2.1 引言	13
2.2 弹性力学的分区变分原理	14
2.3 弹性薄板的分区变分原理	22
2.4 弹性厚板的分区变分原理	32
2.5 弹性扁薄壳的分区变分原理	40
2.6 分区混合能量偏导数定理	45
第 3 章 含参变分原理	50
3.1 引言	50
3.2 泛函变换的几种格式	51
3.3 含参变分原理	56
3.4 换元乘法	63

第2篇 有限元法进展初论——广义协调元

第4章 广义协调元理论	67
4.1 协调元与非协调元——关于“协调”的思考	67
4.2 首批广义协调元——用边协调取代点协调	68
4.3 广义协调元的变分基础——二重性	70
4.4 能量法与权残法的综合——灵活性	73
4.5 广义协调元的收敛性	74
第5章 薄板广义协调元 I——总论	75
5.1 薄板元的广义协调条件及其等价形式	76
5.2 广义协调薄板元的一般列式	77
5.3 广义协调薄板元的几种构造方案	79
5.4 近期提出的广义协调薄板元	82
第6章 薄板广义协调元 II——边-点协调与 SemiLoof 方案	89
6.1 边协调方案——TGC-9 和 TGC-9-1 元	89
6.2 边-点协调方案——矩形元系列	97
6.3 边-点协调方案——三角形元系列	110
6.4 边-点协调超基方案——GC III-R12 和 GC III-T9 元	118
6.5 点协调超基方案——MB1-T9 和 MB2-T9 元	125
6.6 SemiLoof 协调方案	128
第7章 薄板广义协调元 III——周-点协调与最小二乘法方案	135
7.1 周-点协调方案——LR12-1 和 LR12-2 元	135
7.2 周协调条件的应用——ACM 元收敛性检验	139
7.3 周-点协调超基方案——BCIZ 元的检验与改进	144
7.4 最小二乘法方案——LSGC-R12 和 LSGC-T9 元	153

第 8 章 厚板广义协调元	156
8.1 厚板理论概述	156
8.2 厚板理论与薄板理论的比较	165
8.3 厚/薄梁单元	178
8.4 位移型厚/薄板元概述	181
8.5 广义协调厚/薄板元(1)——从假设(Ψ, γ)入手	182
8.6 广义协调厚/薄板元(2)——从假设(w, γ)入手	192
8.7 广义协调薄/厚板元——由薄板元到厚板元	201
第 9 章 复合材料层合板广义协调元	207
9.1 引言	207
9.2 基本理论	208
9.3 新型四边形层合板单元 CTMQ20	212
9.4 单元应力解的杂交化后处理	221
9.5 层合板的振动分析	225
9.6 数值算例	226
第 10 章 压电复合材料层合板广义协调元	236
10.1 引言	236
10.2 压电复合材料层合板一阶剪切变形理论	237
10.3 新型四边形压电层合板单元 CTMQE	240
10.4 单元应力解的部分杂交化后处理	244
10.5 数值算例	247
第 11 章 广义协调膜元与壳元	253
11.1 引言	253
11.2 广义协调等参膜元	253
11.3 含转角自由度的膜元——转角自由度定义及矩形和四边形元	260
11.4 含转角自由度的膜元——三角形元	269

11.5 平板型壳元——厚薄通用三角形元 GMST18	278
11.6 扁壳元——变分原理与薄膜闭锁问题	289
11.7 扁壳元——具有边中结点的三角形元 SST21	293
11.8 几何非线性壳元——三角形平板型壳元 GMST18	299
11.9 几何非线性壳元——矩形扁壳元 SSR28	302

第 3 篇 有限元法进展续论

第 12 章 分区混合元 I ——基本理论和裂纹问题	315
12.1 分区混合元法概述	315
12.2 分区混合元法的基本方程	317
12.3 二维裂纹问题	319
12.4 厚板裂纹问题	325
12.5 三维体表面裂纹问题	331
第 13 章 分区混合元 II ——V 型切口问题	339
13.1 平面 V 型切口问题	399
13.2 两种材料平面 V 型切口问题	348
13.3 两种材料反平面 V 型切口问题	354
13.4 厚板 V 型切口问题	358
13.5 三维 V 型切口问题	372
第 14 章 解析试函数法 I ——膜元与板弯曲元	383
14.1 解析试函数法及其再认识	383
14.2 解析试函数法构造 4 结点膜元	385
14.3 ATF 元破解梯形闭锁问题	386
14.4 厚板理论的基本解析解与破解剪切闭锁问题	390
14.5 解析试函数法构造厚薄板通用四边形元	391

14.6	将三角形薄板元推广为厚板元的 ATF 法	394
第 15 章	解析试函数法 II——含裂纹和切口的奇异元	400
15.1	平面裂纹问题的基本解析解	400
15.2	解析试函数法构造含裂纹单元 ATF-MS	403
15.3	含裂纹单元 ATF-MS 的误差分析	405
15.4	单元和结构体系的零能模式分析	408
15.5	平面切口问题的基本解析解	412
15.6	解析试函数法构造含切口单元 ATF-VN	415
15.7	含切口单元 ATF-VN 的误差分析	418
第 16 章	四边形面积坐标 I——理论与公式	421
16.1	引言	422
16.2	四边形的两个特征参数及其特征条件	423
16.3	四边形面积坐标的定义	426
16.4	四边形面积坐标的两个恒等式	429
16.5	直角坐标、面积坐标、等参坐标的转换关系	430
16.6	微分公式	432
16.7	积分公式	434
16.8	面积分基本公式的证明	436
16.9	边积分基本公式的证明	440
第 17 章	四边形面积坐标 II——构造四边形元的新工具	441
17.1	等参元对网格畸变的敏感度分析	441
17.2	面积坐标法构造四边形元概述	443
17.3	面积坐标法构造 4 结点四边形膜元	446
17.4	面积坐标法构造含转角自由度的四边形膜元	454
17.5	面积坐标法构造 8 结点四边形膜元	460
17.6	面积坐标法构造四边形薄板元	465

17.7	面积坐标法构造四边形厚板元	473
17.8	面积坐标法构造四边形层合板元	478
第 18 章	样条元 I ——高层建筑结构分析	482
18.1	引言	482
18.2	样条梁单元	483
18.3	样条平面膜元	486
18.4	样条元分析剪力墙结构	487
18.5	样条元分析框筒结构	493
第 19 章	样条元 II ——板壳结构分析	498
19.1	薄板弯曲样条元	498
19.2	厚/薄梁和厚/薄板样条元	500
19.3	薄扁壳样条元	504
19.4	厚/薄壳样条元	505
19.5	几何非线性样条元	512
第 20 章	回顾与梳理	519
20.1	七项成果的立异	519
20.2	百余单元的标新	520
20.3	五宗疑难的破解	525
附录		527
结束语		531
参考文献		532

第 1 章 绪 论

——发展中的有限元法

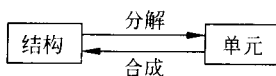
1.1 有限元法的特点

计算力学是根据力学中的理论,利用现代电子计算机和各种数值方法,解决力学中的实际问题的一门新兴学科。它横贯力学的各个分支,不断扩大各个领域力学的应用范围,同时也逐渐发展自己的理论和方法^[1.1]。

有限元法是计算力学的重要分支,是一种将连续体离散化以求解各种力学问题的数值方法。1960 年 Clough R W 首先使用了“有限元”这一名称。现在,有限元法已经成为处理力学、物理、工程等计算问题的有效方法之一^[1.2]。

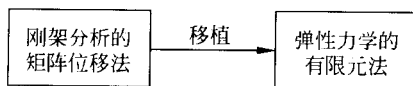
1.1.1 从方法论的角度看有限元法

(1) 有限元法是分析综合法的一种应用——先将结构分解为单元,再将单元合成结构,在一分一合中求得结构问题的解。



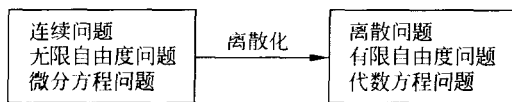
{ 分解——化整为零难化易
合成——积零为整复原型

(2) 从力学渊源看,有限元法是由刚架计算的矩阵位移法演变而来的——由刚架分析移植到弹性力学,矩阵位移法就变成了有限元法。



在移植中,讲究“移根不移叶”,“取神不取形”。这里,矩阵位移法与有限元法共同的“根”和“神”,就是分解合成法。

(3) 从数学角度看,有限元法是连续问题的一种离散化近似解法——把原来属于无限自由度的问题近似地按有限自由度的问题来处理,把原来的微分方程问题转化为代数方程问题。



1.1.2 从力学解法分类的角度看有限元法

力学问题的解法可分为下列三类:

- (1) 解析法;
- (2) 数值解法;
- (3) 半解析法。

常用的数值解法有下列五类(有限元法是其中的一个,不是最老、但却是影响最大的一个):

- (1) 有限差分法——将微分方程化为差分形式,求近似解;
- (2) 加权残值法——将微分方程化为加权积分形式,求近似解。加权残值法的五种常用做法是配点法、子域法、Galerkin 法、最小二乘法和矩法;
- (3) 有限元法——将微分方程问题化为能量驻值问题,并采用分片插值,求近似解;
- (4) 边界元法——只在边界上进行离散;
- (5) 无网格法——其近似函数建立在离散点上,而不需借助于网格。

常用的半解析法有下列三类:

- (1) Kantorovich 法;
- (2) 有限条法;
- (3) 有限元线法。

1.2 有限元法与变分原理

有限元法与变分原理之间有密切关系,现从有限元法的创立过程以及单元的分类方法来看两者的关系。

1.2.1 有限元法的创立与变分原理

能量变分原理是有限元法的理论基础,这是学术界的共识。但这个共识的形成,当初还有过一段曲折。

首先,应用数学界第一篇有限元论文是1943年出版的Courant R于1941年所作的报告“Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration”^[1.3]。他用变分原理和分片插值方法来求扭转问题的近似解。他在论文题目上把后来被称为有限元法的这种解法归结为“变分法”。由于电子计算机尚未出现,这篇论文没有引起应有的注意。

其次,工程技术界第一篇有限元论文是1956年Turner M J、Clough R W和Martin H C等人发表的论文“Stiffness and deflection analysis of complex structures”^[1.4]。他们把刚架的矩阵位移法推广用于弹性力学平面问题的近似分析,在题目上把这种解法归结为复杂结构的刚度法(或直接刚度法),随后Clough将其定名为“有限元法”^[1.5]。这些作者与当时的工程师一样,可能不太注意Courant那篇被冷落的论文,不太注意这里的直接刚度法与Courant的变分法有何联系。

最后,1963年开始出现的论文,包括Melosh R J的论文“Basis for derivation for the direct stiffness method”^[1.6],得出了如下结论:直接刚度法(即有限元法)的基础是变分原理,它是基于变分原理的一种新型Ritz法(采用分区插值方案的新型Ritz法)。这样就使数学界与工程界得到了沟通,获得了共识,从而使有限元法被公认为既有严密理论基础又有普遍应用价值的一种数值方法。

从1943年和1956年两种构思的独立提出,到1963年的交汇融合,正是有限元法创立的真实和曲折的过程。正是这种曲折体现出两者关系的密切难分。

1.2.2 单元的分类与变分原理

不同的单元对应于不同的变分原理。下面列出几种单元及其对应的变分原理:

- (1) 协调位移元(采用在单元间精确协调的位移试函数)——最小势能原理;
- (2) 非协调位移元(采用在单元间不精确协调的位移试函数)——分区势能原理;
- (3) 广义协调位移元(采用在单元间广义协调的位移试函数)——分区势能原理的退化形式;
- (4) 应力杂交元(采用应力试函数,满足平衡微分方程)——最小余能原理;
- (5) 混合元(采用混合试函数,含位移、应力和应变)——广义变分原理;
- (6) 分区混合元(部分单元采用位移试函数,其余单元采用应力试函数)——分区混合能量原理。

1.3 有限元法的研究领域

变分原理与有限元法的研究是我国学者的研究强项。胡海昌于1954年提出的弹性力学广义变分原理^[1.7]为有限元法的发展提供了理论基础;冯康提出的基于变分原理的