中等专业学校教学参考书

代　　数

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

中等专业学校教学参考书

代　　数

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

本书内容有简单函数及其图象，近似计算，二次函数及其图象，二元二次方程组，数列，幂函数，指数函数，对数，计算尺，复数，排列，组合，二项式定理等。书中附加“*”或小字排印的内容，可供某些专业选用

为了学生学习和教师选题的方便，把习题分成了复习问题、习题和总复习题三类，分插在各节、各章之后。其中复习问题可作为学生复习教材内容的参考，习题用于布置作业，总复习题是作为复习和提高综合运算能力用的。

本书可作工科中专用作教学参考书。

中等专业学校教学参考书

代　数

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

1963年6月第一版　1978年4月第10次印刷

书号13012·0158　定价0.70元

目　录

第一章　最簡单函数及其图象

I.　函数及其表示法

§1-1　常量与变量

在日常生活和生产实际中，我們經常要遇到各种量，如长度、体积、时間、速度、溫度、压力等等。这些量都可以用取定的同类量作为度量单位来测定它們的大小，并且用抽象的数来表示量得的結果。

当我們在某一个給定的問題中研究量的数值时，可以看到有些量常常保持着同一的数值，即它們是不变的量；另外一些量可以取不同数值，即它們是变动的量。

例 1.　某种鉛笔，每枝定价 5 分。这时售出的枝数及总錢数是变动的量；而单价是不变的量。

例 2.　設火車平均以 45 公里/小时的速度行駛。这时火車行駛的时間和路程是变动的量；而速度是不变的量。

例 3.　設三角形 ABC 的底边 AB 是固定的，頂点 C 在平行于底边 AB 的直綫 L 上移动（图 1-1），可以看出这时三角形的两个側边的长与每一个內角都是变动的量；但它們的高、面积以及內角和是不变的量。

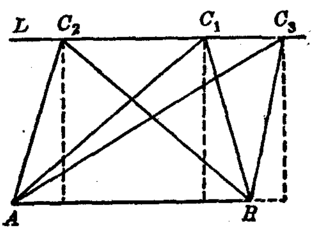

图　1-1

从上面所說的不变的量和变动的量的具体例子，我們給出下面的关于常量和变量的一般定义：

凡在問題所指定的条件下，保持同一数值的量叫常量，可以取各种不同数值的量叫**变量**。

因此在上面所举的各例中：鉛笔的单价、火車的速度，三角形的高、面积与內角和等都是常量；而鉛笔的枝数、总錢数，火車行駛的时間、路程，三角形側边的长与每一个內角都是变量。

必須注意，一个量究竟是常量还是变量，一般地說要取决于問題所給定的条件；同一个量在某种条件下是常量，而在別种条件下可能是变量。例如，在三角形 ABC 的底边 AB 固定的前提下，如果頂点 C 不在平行于 AB 的直綫 L 上移动，而在以 AB 为直徑的半圓周上移动（图 1-2），那末这时三角形的高和面积都不是常量而是变量，頂角 C 的角度却反而是常量了。

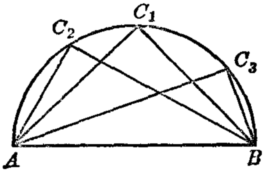

图 1-2

变量虽然可以取各种不同的数值，但根据所研究的問題的条件，一般地有着一定的变化范圍，并不是漫无限制的。例如：所买鉛笔的枝数，只能取大于零的整数；火車行駛的时間，只能取零和正数；凸多边形的內角和等于 $2d(n-2)$，其中边数 n 只能取等于或大于 3 的自然数。在这三个例子中如果不是像所說的那样，問題就沒有意义了。

对于变量所能取的值，我們給出下面的定义：

在所研究問題的具体条件下，变量所可能取的一切数值（即能使变量有意义的值），叫做这个变量的**可能取的值**。

§1-2 函数与自变量

1. 函数与自变量的定义

一个变量的变化并不是孤立的，往往是和另外一些变量的变化相互联系着的。在实际应用中，我們首先要研究一个变量的变化怎样引起另一个变量的变化。現在看下面的几个例子。

例 1. 設某种鉛笔每枝定价为 5 分。这时售出的枝数 x 的变化和总錢数 y 的变化是相互联系着的。对于枝数 x 的每一个可能取的值，錢数 y 就有一个确定的值和它对应，譬如：

$$x=1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 10,\quad 12,\cdots(\text{枝}),$$

$$y=5,\quad 10,\quad 15,\quad 25,\quad 50,\quad 60,\cdots(\text{分})。$$

显然，变量 x 和 y 之間有下面的相依关系：

$$y=5x.$$

例 2. 設火車平均以 45 公里/小时的速度行駛，显然它走的时間 t 愈多，所經过的路程 s 就愈长，并且对于时間 t 的每一个可能取的值，路程 s 就有一个确定的值和它对应，譬如：

$$t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3.5,\ 4,\ 10,\ 20,\ 30,\ 40,\ \cdots(\text{小时}),$$

$$s=0, 45, 90, 135, 157.5, 180, 450, 900, 1350, 1800,\ \cdots(\text{公里})。$$

显然变量 t 和 s 之間有下面的相依关系：

$$s=45t.$$

例 3. 长 12 厘米的彈簧，負荷量每增加 1 公斤，就拉长 2 厘米，那末在彈簧所能承受的負荷范圍內，每給定一个負荷量 P 的值，彈簧就有一个确定的长度 l 的值和它对应，譬如：

$$P=\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \cdots(\text{公斤}),$$

$$l=12, 14, 16, 18, 20, 22\ \cdots(\text{厘米})。$$

可以看出，变量 P 和 l 之間有下面的相依关系：

$$l=12+2P.$$

上面这些例子都說明两个变量之間是有一定的相依关系：当对一个变量給予一定的数值时，另外一个变量就有一个确定的值和它对应。对于变量間的这种相依关系，我們給出下面的定义：

如果对于变量 x 的每一个可能取的值，变量 y 都有一个确定的值和它对应，那末变量 y 就叫做变量 x 的**函数**。变量 x 叫自变量。x 与 y 之間的相依关系叫做**函数关系**。

对于前面所举的各例，我們就可以說：买鉛笔的总錢数 y 是枝数 x 的函数；火車在行駛中，路程 s 是时間 t 的函数；彈簧的总长度 l 是負荷量 P 的函数。

例 4. 圓面积 A 的大小和它的半徑 r 有关，并可用公式 $A=\pi r^2$ 表示。显然只要給出半徑 r 的任意一个正值，那末面积 A 就有一个确定的值和它对应。所以面积 A 是半徑 r 的函数。

应当注意，在函数关系中，哪个变量是自变量，哪个变量是自变量的函数，要根据所給問題的具体条件来决定。

譬如：由例 4 可知給定圓半徑的每一个值，圓面积就有一个确定值和它对应，所以圓半徑是自变量，圓面积是半徑的函数。反之，如果給定圓面积的每一个值，圓半徑就有一个确定值和它对应，所以圓面积是自变量，圓半徑是圓面积的函数。

2. 函数的定义域

我們已經知道变量在变化过程中，它的可能取的值一般地是有着一定范圍的，如果超出这个范圍，就会使研究的問題失去意义。在函数关系中，自变量的每一个可能取的值，不但

要使自变量本身有意义，同时还要使对应的函数也有意义。所以在研究函数关系时，首先要考虑自变量可能取的值的范圍。

例如：在例 1 中，鉛笔枝数 x 只能取大于零的整数；也就是說，只有当自变量 x 在大于零的整数范圍內变化时，問題才有实际意义。又如：在例 2 中，假設火車是在 1800 公里路程內行駛，那末时間 t 只能在 0 到 40 小时这个时間間隔內变化；也就是說，只有当自变量 t 在 0 到 40 之間变化时，函数 s 的相应数值在 0 到 1800 之間，这时問題才有实际意义。再如：在例 3 中，假設彈簧所能承受的負荷是 30 公斤重，如果負荷量 P 越出这个范圍，彈簧就有損坏的可能。这就是說，自变量 P 只能取 0 到 30 之間，包括 0 和 30 在內的任意值。

在函数关系中对于自变量可能取的值，也可簡称可取值，我們給出下面的定义：

自变量可能取的值的全体叫做函数的**定义域**。

例如：在例 1 中，函数的定义域为一切正整数；在例 2 中则为 $0 \leqslant t \leqslant 40$；在例 3 中则为 $0 \leqslant P \leqslant 30$。

由此可知一个函数的定义域要根据所給問題的具体条件来确定。

又如：設有函数 $y=x^2$，当 x 取任何实数时，y 都有确定的对应值，因此函数的定义域为一切实数。但若函数 $y=x^2$ 中的 x 表示一个正方形的边长，y 表示正方形的面积，那末函数的定义域就只能是一切正数了。

又如：設有函数 $y=\dfrac{12}{x}$，当 x 取一切正数或負数，即不为

零时，y 都有确定的对应值，因此函数的定义域为一切正数或负数。但若函数 $y=\frac{12}{x}$ 中的 x 和 y 分别表示一个矩形的长和宽时，那末函数的定义域就只能是一切正数了。

3. 函数的記号

通常“y 是 x 的函数”，我們用記号

$$y=f(x)$$

来表示。在这个記号中，括弧里的 x 表示自变量，f 不是一个量，而 $f(\ )$ 也只是一种記号，表示变量 y 与 x 之間的某一种函数关系，不能将它理解为 f 与 x 的乘积。有时我們也用記号 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$ 等来表示“y 是 x 的函数”。前面所举三例中的函数关系:

$$y=5x,\quad s=45t,\quad l=12+2P,$$

可分别記为:

$$y=f(x),\quad s=F(t),\quad l=\varphi(P).$$

現在我們再来介紹函数值的記号。

設 $y=f(x)$ 表示函数 $y=2x-3$，

在 $x=1$ 时，对应的函数值是 $y=2\times1-3=-1$，我們用記号 $f(1)$ 表示这个函数值，也就是

$$f(1)=2\times1-3=-1.$$

同样，以 $f(2)$ 表示在 $x=2$ 时函数的对应值，也就是

$$f(2)=2\times2-3=1.$$

一般地，在函数 $y=f(x)$ 里，当自变量 $x=a$ 时，函数 y 的对应值，就用記号 $f(a)$ 表示。

例 1. 設 $f(x)=3x^2+2x-1$，求 $f(2)$，$f(0)$ 和 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$。

解: $f(2)=3\times2^2+2\times2-1=15;$

$f(0)=3\times0^2+2\times0-1=-1;$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=$$

$$=-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}.$$

例 2. 設 $F(x)=3x^4-x^2+1$, 求证

$$F(-a)=F(a).$$

证明: $\because\quad F(a)=3a^4-a^2+1,$

$F(-a)=3(-a)^4-(-a)^2+1=3a^4-a^2+1,$

$\therefore\quad F(-a)=F(a).$

§ 1-3 函数关系的三种基本表示法

根据函数的定义，我們知道两个变量之間所构成的函数关系是依据函数的定义域和这两个变量之間所具有的某种对应規律而确定的。現在我們再来研究函数关系的表示方法。通常两个变量間的函数关系，可以用下面三种基本方法来表示:

(1)**解析法** 在上一节里，我們曾用

$$y=5x,\quad s=45t,\quad l=12+2P$$

等数学式子来表示变量之間的函数关系。像这样用数学式子来表示变量間函数关系的方法叫做**解析法**。这些数学式子叫做函数的**解析式**。

又如，我們已熟悉的公式

匀速的路程公式: $s=vt,$

圓面积公式: $A=\pi r^2,$

关于电流的安培定律：$I=\dfrac{E}{R}$

等，都是表示变量間函数关系的解析式。

用解析法表示的优点是簡单明了，就是由解析式能够清楚地看出两个变量之間的全部相依关系；并且可以知道当給定自变量的一个数值时，要經过怎样的运算才能得到函数的对应值。正因为这样，所以在科学研究上經常采用。但是这种方法也有它的缺点，就是在求函数值时，有时要作較复杂的計算，而且有的函数不可能用解析式来表示。

(2)**列表法**　研究各种現象中变量之間的关系时，有时是把它們之間的对应值列成表格。譬如我們在物理实驗中，测定彈簧长度与其負荷量間的关系时，把測得的結果列成下表：

負荷量 P（公斤）	0	1	2	3	4	5	6
彈簧长 l（厘米）	12	14	16	18	20	22	24

表中第一行列出自变量（負荷量）的值，第二行列出函数（彈簧长度）的对应值。这样就能清楚地看出負荷量与彈簧长度之間的函数关系。

像这样用表格来表示函数关系的方法叫做**列表法**。

用列表法表示两个变量間函数关系的优点是对于表中自变量的每一个值，可以不通过計算，就能直接找到对应的函数值；缺点是表中不可能把所有的自变量值与函数对应值一一列出。

列表法在科学和技术上用处很大，如四位数学用表中的平方数表、立方数表、平方根表和立方根表等都是用这种方法

列出来的函数关系。

(3)**图象法**　图 1-3 是用自动計溫器所画出来的某一天 24 小时內溫度变化的图形。横軸上的綫段表示自变量时間 t 的钟点数，纵軸上的綫段表示对应的函数溫度 T 用摄氏表所量出的度数。从这种图象就能清楚地看出溫度 T 和时間 t 之間的函数关系。

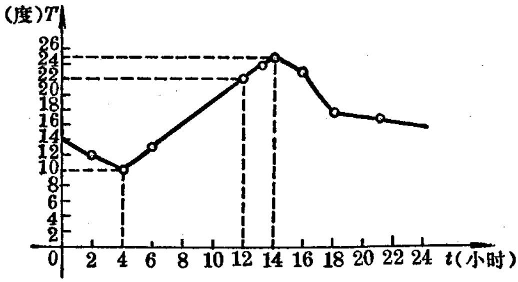

图　1-3

例如：从上图可以直观地看出这一天在 14 点钟时溫度最高为 25°C，在 4 点钟时溫度最低为 10°C，在中午 12 点钟时溫度为 22°C。

像上面这样，用图象来表示两个变量間的函数关系的方法叫做**图象法**。

用图象法表示函数关系，优点是可以明显地看出自变量变化时函数变化的情况；缺点是由自变量的值常常很难得到对应的函数的准确值。虽然这样，这种方法仍是研究函数常用的方法。

上面我們分别介紹了函数关系的三种基本表示法，它們都有着不同的优缺点，因此对于这三种方法的应用，就要根据

具体問題的需要与可能而灵活地采用。在数学上或其他科学应用上，为了便于研究函数变化的情况，有时可将这三种方法联合起来用，就是由已給的函数解析式，列出自变量值和对应函数值的表格，再作出它的图象。

§1-4　函数图象的作法

我們已学过平面直角坐标系的基础知識。对于平面上的任一点 P，就有唯一的一对数 (x, y) 和它对应；反过来，任意給出一对数 (x, y)，在平面上也就有唯一的一点 P 和它对应。这就是說平面上的点与一对数 (x, y) 之間有**一一对应**的关系。

利用坐标概念，可以把給定的自变量 x 的值作为点的横坐标，把函数 y 的对应值作为点的纵坐标，从而定出平面上的許多点，在一般情况下，順次連結所有这些点得到的平滑的曲綫或直綫，就是所給函数的图象。

例 1.　作函数 $y=x^2$ 的图象。

作法：第一步：**确定函数的定义域。**

函数 $y=x^2$ 的定义域为一切实数。

第二步：**列表。**

給自变量 x 以一系列的可能取的值，按从小到大的順序排列，求出函数 y 的每一个对应值得下表：

x	……	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3	…
$y=x^2$	……	9	4	1	0.25	0	0.25	1	4	9	…

第三步：**描点作图。**