

中等专业学校教学参考书

代 数

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

中等专业学校教学参考书

代 数

工科中专数学教材编写组编

人民教育出版社

本书内容有简单函数及其图象，近似计算，二次函数及其图象，二元二次方程组，数列，幂函数，指数函数，对数，计算尺，复数，排列，组合，二项式定理等。书中附加“*”或小字排印的内容，可供某些专业选用

为了学生学习和教师选题的方便，把习题分成了复习问题、习题和总复习题二类，分插在各节、各章之后。其中复习问题可作为学生复习教材内容的参考，习题用于布置作业，总复习题是作为复习和提高综合运算能力用的。

本书可作工科中专用作教参参考书。

中等专业学校教学参考书

代 数

工科中专数学教材编写组编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷二厂印装

*

1963年6月第一版 1978年4月第10次印刷

书号13012·0158 定价0.70元

目 录

第一章 最简单函数及其图象	1
I. 函数及其表示法	1
§ 1-1 常量与变量	1
§ 1-2 函数与自变量	2
§ 1-3 函数关系的三种基本表示法	7
§ 1-4 函数图象的作法	10
II. 正比例与反比例	14
§ 1-5 正比例及其图象	14
§ 1-6 反比例及其图象	18
III. 一次函数及其图象	24
§ 1-7 一次函数	24
§ 1-8 一次函数的图象	26
§ 1-9 一次函数的根	29
总复习题一	33
第二章 近似计算	35
I. 近似数的概念	35
§ 2-1 引言	35
§ 2-2 数的化整	36
II. 近似数的准确度	38
§ 2-3 绝对误差及绝对误差界	38
§ 2-4 相对误差及相对误差界	42
§ 2-5 有效数字及可靠数字	44
III. 近似数的运算	50
§ 2-6 近似数的加法和减法	50
§ 2-7 近似数的乘法和除法	52
§ 2-8 近似数的乘方和开方	55
§ 2-9 近似数的混合运算	56
§ 2-10 预定准确度的计算	59
总复习题二	65

第三章 二次函数及其图象	68
§ 3-1 二次函数的概念	68
§ 3-2 函数 $y=ax^2$ 的图象和性质	69
§ 3-3 函数 $y=ax^2+c$ 的图象	73
§ 3-4 函数 $y=a(x-m)^2$ 的图象	74
§ 3-5 函数 $y=a(x-m)^2+n$ 的图象	77
§ 3-6 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象	78
§ 3-7 一元二次方程的图象解法	83
§ 3-8 一元二次不等式	87
总复习题三	92
第四章 二元二次方程组	94
§ 4-1 二元二次方程组的概念	94
§ 4-2 二元二次方程组的代入解法	95
§ 4-3 二元二次方程组的特殊解法	100
§ 4-4 二元二次方程组的图象解法	102
§ 4-5 二元二次方程组的应用问题	105
总复习题四	110
第五章 数列	113
§ 5-1 数列的概念	113
§ 5-2 等差数列	116
§ 5-3 等比数列	123
总复习题五	130
第六章 幂的概念的推广 幂函数 指数函数	133
I. 整指数	133
§ 6-1 零指数幂	133
§ 6-2 负整指数幂	134
§ 6-3 零指数幂和负整指数幂的运算	136
II. 分指数	139
§ 6-4 分指数幂	139
§ 6-5 分指数幂的运算	141
III. 无理指数	144
§ 6-6 无理指数幂的概念	144

IV. 幂函数	147
§ 6-7 幂函数及其图象	147
V. 指数函数	151
§ 6-8 指数函数及其图象	151
§ 6-9 指数函数的性质	153
总复习题六	156
第七章 对数	159
I. 反函数	159
§ 7-1 反函数的概念	159
§ 7-2 正函数与反函数图象间的关系	163
II. 对数的概念及一般性质	165
§ 7-3 对数的概念	165
§ 7-4 对数函数及其图象和性质	168
§ 7-5 积、商、幂的对数	173
§ 7-6 单项式取对数法	175
III. 常用对数	178
§ 7-7 常用对数的性质	178
§ 7-8 对数表(对数尾数表)	182
§ 7-9 反对数表(真数表)	183
* § 7-10 直綫补插法在对数上的应用	185
§ 7-11 首数是負数的对数的四則运算	188
§ 7-12 应用对数作計算的例子	190
§ 7-13 对数的換底	196
* § 7-14 指数方程和对数方程	199
总复习题七	204
第八章 計算尺	207
§ 8-1 計算尺的部件和尺标	207
§ 8-2 基本尺标	208
§ 8-3 C 尺及 D 尺上的刻度	210
§ 8-4 在 C 尺及 D 尺上的定数法和讀数法	210
§ 8-5 利用 C 尺和 D 尺作乘法	212
§ 8-6 利用 C 尺和 D 尺作除法	215

§ 8-7 CI 尺及其用法	220
§ 8-8 数的位数定位法	222
§ 8-9 A, B 尺的刻度及其用法	227
§ 8-10 K 尺的刻度及其用法	233
§ 8-11 混合运算	235
§ 8-12 S 尺的刻度及其用法	238
§ 8-13 T 尺的刻度及其用法	239
* § 8-14 ST 尺的刻度及其用法	242
* § 8-15 应用计算尺计算的一些特殊例子	244
* § 8-16 重对数尺 $LL1, LL2, LL3$ 的刻度及其用法	250
* § 8-17 负重对数尺 $LLO, LLOO$ 的刻度及其用法	257
总复习题八	263
第九章 复数	265
§ 9-1 复数的概念	265
§ 9-2 复数的几何表示法	268
* § 9-3 复数的加法和减法	273
* § 9-4 复数的三角形形式	274
* § 9-5 复数的乘法	279
* § 9-6 复数的除法	281
* § 9-7 复数的乘方	283
* § 9-8 复数的开方	284
* § 9-9 复数的指数形式及其运算	290
总复习题九	295
*第十章 排列 组合 二项式定理	298
I. 排列、组合	298
§ 10-1 排列	298
§ 10-2 排列种数的计算公式	299
§ 10-3 组合	304
§ 10-4 组合种数的计算公式	305
II. 二项式定理	311
§ 10-5 二项式定理	311
§ 10-6 二项式定理的性质	314
总复习题十	317

第一章 最簡單函数及其图象

I. 函数及其表示法

§ 1-1 常量与变量

在日常生活和生产实际中,我們經常要遇到各种量,如长度、体积、時間、速度、溫度、压力等等。这些量都可以用取定的同类量作为度量单位来測定它們的大小,并且用抽象的数来表示量得的结果。

當我們在某一个給定的問題中研究量的数值时,可以看到有些量常常保持着同一的数值,即它們是不变的量;另外一些量可以取不同数值,即它們是变动的量。

例 1. 某种鉛笔,每枝定价 5 分。这时售出的枝数及总錢数是变动的量;而单价是不变的量。

例 2. 設火車平均以 45 公里/小时的速度行駛。这时火車行駛的時間和路程是变动的量;而速度是不变的量。

例 3. 設三角形 ABC 的底边 AB 是固定的,頂点 C 在平行于底边 AB 的直綫 L 上移动 (图 1-1), 可以看出这时三角形的两个側边的长与每一个內角都是变动的量;但它們的高、面积以及內角和是不变的量。

从上面所說的不变的量和变动的量的具体例子,我們給出下面的关于常量和变量的一般定义:

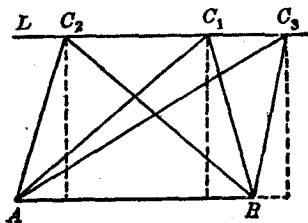


图 1-1

凡在問題所指定的條件下，保持同一數值的量叫常量，可以取各種不同數值的量叫變量。

因此在上面所舉的各例中：鉛筆的單價、火車的速度、三角形的高、面積與內角和等都是常量；而鉛筆的枝數、總錢數、火車行駛的時間、路程、三角形側邊的長與每一個內角都是變量。

必須注意，一個量究竟是常量還是變量，一般地說要取決於問題所給定的條件；同一個量在某種條件下是常量，而在別種條件下可能是變量。例如，在三角形 ABC 的底邊 AB 固定的前提下，如果頂點 C 不在平行於 AB 的直線 L 上移動，而在以 AB 為直徑的半圓周上移動（圖 1-2），那末這時三角形的

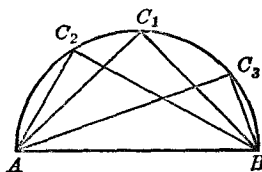


圖 1-2

高和面積都不是常量而是變量，頂角 C 的角度却反而是常量了。

變量雖然可以取各種不同的數值，但根據所研究的問題的條件，一般地有着一定的變化範圍，並不是漫無限制的。例如：所買鉛筆的枝數，只能取大於零的整數；火車行駛的時間，只能取零和正數；凸多邊形的內角和等於 $2d(n-2)$ ，其中邊數 n 只能取等於或大於 3 的自然數。在這三個例子中如果不是像所說的那樣，問題就沒有意義了。

對於變量所能取的值，我們給出下面的定義：

在所研究問題的具体條件下，變量所可能取的一切數值（即能使變量有意義的值），叫做這個變量的可能取的值。

§ 1-2 函數與自變量

1. 函數與自變量的定義

一个变量的变化并不是孤立的，往往是和另外一些变量的变化相互联系着的。在实际应用中，我們首先要研究一个变量的变化怎样引起另一个变量的变化。现在看下面的几个例子。

例 1. 設某种铅笔每枝定价为 5 分。这时售出的枝数 x 的变化和总錢数 y 的变化是相互联系着的。对于枝数 x 的每一个可能取的值，錢数 y 就有一个确定的值和它对应，譬如：

$$x=1, 2, 3, 5, 10, 12, \dots(\text{枝}),$$

$$y=5, 10, 15, 25, 50, 60, \dots(\text{分}).$$

显然，变量 x 和 y 之間有下面的相依关系：

$$y=5x.$$

例 2. 設火車平均以 45 公里/小时的速度行駛，显然它走的时间 t 愈多，所經過的路程 s 就愈长，并且对于时间 t 的每一个可能取的值，路程 s 就有一个确定的值和它对应，譬如：

$$t=0, 1, 2, 3, 3.5, 4, 10, 20, 30, 40, \dots(\text{小时}),$$

$$s=0, 45, 90, 135, 157.5, 180, 450, 900, 1350, 1800, \dots(\text{公里}).$$

显然变量 t 和 s 之間有下面的相依关系：

$$s=45t.$$

例 3. 长 12 厘米的彈簧，負荷量每增加 1 公斤，就拉长 2 厘米，那末在彈簧所能承受的負荷範圍內，每給定一个負荷量 P 的值，彈簧就有一个确定的长度 l 的值和它对应，譬如：

$$P=0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots(\text{公斤}),$$

$$l=12, 14, 16, 18, 20, 22 \dots(\text{厘米}).$$

可以看出，变量 P 和 l 之間有下面的相依关系：

$$l = 12 + 2P.$$

上面这些例子都说明两个变量之间是有一定的相依关系: 当对一个变量给予一定的数值时, 另外一个变量就有一个确定的值和它对应。对于变量间的这种相依关系, 我们给出下面的定义:

如果对于变量 x 的每一个可能取的值, 变量 y 都有一个确定的值和它对应, 那末变量 y 就叫做变量 x 的函数。变量 x 叫自变量。 x 与 y 之间的相依关系叫做函数关系。

对于前面所举的各例, 我们就可以说: 买铅笔的总钱数 y 是枝数 x 的函数; 火车在行驶中, 路程 s 是时间 t 的函数; 弹簧的总长度 l 是负荷量 P 的函数。

例 4. 圆面积 A 的大小和它的半径 r 有关, 并可用公式 $A = \pi r^2$ 表示。显然只要给出半径 r 的任意一个正值, 那末面积 A 就有一个确定的值和它对应。所以面积 A 是半径 r 的函数。

应当注意, 在函数关系中, 哪个变量是自变量, 哪个变量是自变量的函数, 要根据所给问题的具体条件来决定。

譬如: 由例 4 可知给定圆半径的每一个值, 圆面积就有一个确定值和它对应, 所以圆半径是自变量, 圆面积是半径的函数。反之, 如果给定圆面积的每一个值, 圆半径就有一个确定值和它对应, 所以圆面积是自变量, 圆半径是圆面积的函数。

2. 函数的定义域

我们已经知道变量在变化过程中, 它的可能取的值一般是有着一定范围的, 如果超出这个范围, 就会使研究的问题失去意义。在函数关系中, 自变量的每一个可能取的值, 不但

要使自变量本身有意义，同时还要使对应的函数也有意义。所以在研究函数关系时，首先要考虑自变量可能取的值的范围。

例如：在例 1 中，铅笔枝数 x 只能取大于零的整数；也就是说，只有当自变量 x 在大于零的整数范围内变化时，问题才有实际意义。又如：在例 2 中，假设火车是在 1800 公里路程内行驶，那末时间 t 只能在 0 到 40 小时这个时间间隔内变化；也就是说，只有当自变量 t 在 0 到 40 之间变化时，函数 s 的相应数值在 0 到 1800 之间，这时问题才有实际意义。再如：在例 3 中，假设弹簧所能承受的负荷是 30 公斤重，如果负荷量 P 超出这个范围，弹簧就有损坏的可能。这就是说，自变量 P 只能取 0 到 30 之间，包括 0 和 30 在内的任意值。

在函数关系中对于自变量可能取的值，也可简称可取值，我们给出下面的定义：

自变量可能取的值的全体叫做函数的定义域。

例如：在例 1 中，函数的定义域为一切正整数；在例 2 中则为 $0 \leq t \leq 40$ ；在例 3 中则为 $0 \leq P \leq 30$ 。

由此可知一个函数的定义域要根据所给问题的具体条件来确定。

又如：设有函数 $y = x^2$ ，当 x 取任何实数时， y 都有确定的对应值，因此函数的定义域为一切实数。但若函数 $y = x^2$ 中的 x 表示一个正方形的边长， y 表示正方形的面积，那末函数的定义域就只能是一切正数了。

又如：设有函数 $y = \frac{12}{x}$ ，当 x 取一切正数或负数，即不为

零时, y 都有确定的对应值, 因此函数的定义域为一切正数或负数。但若函数 $y = \frac{12}{x}$ 中的 x 和 y 分别表示一个矩形的长和宽时, 那末函数的定义域就只能是一切正数了。

3. 函数的記号

通常“ y 是 x 的函数”, 我們用記号

$$y = f(x)$$

来表示。在这个記号中, 括弧里的 x 表示自变量, f 不是一个量, 而 $f(\quad)$ 也只是一种記号, 表示变量 y 与 x 之間的某一种函数关系, 不能将它理解为 f 与 x 的乘积。有时我們也用記号 $y = F(x)$, $y = \varphi(x)$ 等来表示“ y 是 x 的函数”。前面所举三例中的函数关系:

$$y = 5x, \quad s = 45t, \quad l = 12 + 2P,$$

可分別記为:

$$y = f(x), \quad s = F(t), \quad l = \varphi(P).$$

現在我們再来介紹函数值的記号。

設 $y = f(x)$ 表示函数 $y = 2x - 3$,

在 $x = 1$ 时, 对应的函数值是 $y = 2 \times 1 - 3 = -1$, 我們用記号 $f(1)$ 表示这个函数值, 也就是

$$f(1) = 2 \times 1 - 3 = -1.$$

同样, 以 $f(2)$ 表示在 $x = 2$ 时函数的对应值, 也就是

$$f(2) = 2 \times 2 - 3 = 1.$$

一般地, 在函数 $y = f(x)$ 里, 当自变量 $x = a$ 时, 函数 y 的对应值, 就用記号 $f(a)$ 表示。

例 1. 設 $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$, 求 $f(2)$, $f(0)$ 和 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 。

$$\text{解: } f(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1 = 15;$$

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 \times 0 - 1 = -1;$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \\ &= -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 2. 設 $F(x) = 3x^4 - x^2 + 1$, 求证

$$F(-a) = F(a).$$

证明: $\because F(a) = 3a^4 - a^2 + 1$,

$$F(-a) = 3(-a)^4 - (-a)^2 + 1 = 3a^4 - a^2 + 1,$$

$$\therefore F(-a) = F(a).$$

§ 1-3 函数关系的三种基本表示法

根据函数的定义, 我們知道两个变量之間所构成的函数关系是依据函数的定义域和这两个变量之間所具有的某种对应規律而确定的。現在我們再来研究函数关系的表示方法。通常两个变量間的函数关系, 可以用下面三种基本方法来表示:

(1) 解析法 在上一节里, 我們曾用

$$y = 5x, \quad s = 45t, \quad l = 12 + 2P$$

等数学式子来表示变量之間的函数关系。像这样用数学式子来表示变量間函数关系的方法叫做解析法。这些数学式子叫做函数的解析式。

又如, 我們已熟悉的公式

$$\text{匀速的路程公式: } s = vt,$$

$$\text{圓面积公式: } A = \pi r^2,$$

关于电流的安培定律: $I = \frac{E}{R}$

等,都是表示变量間函数关系的解析式。

用解析法表示的优点是简单明了,就是由解析式能够清楚地看出两个变量之間的全部相依关系;并且可以知道当给定自变量的一个数值时,要经过怎样的运算才能得到函数的对应值。正因为这样,所以在科学研究上经常采用。但是这种方法也有它的缺点,就是在求函数值时,有时要作较复杂的计算,而且有的函数不可能用解析式来表示。

(2)列表法 研究各种现象中变量之間的关系时,有时是把它們之間的对应值列成表格。譬如我們在物理实验中,测定弹簧长度与其負荷量之間的关系时,把测得的结果列成下表:

負荷量 P (公斤)	0	1	2	3	4	5	6
彈簧长 l (厘米)	12	14	16	18	20	22	24

表中第一行列出自变量(負荷量)的值,第二行列出函数(彈簧长度)的对应值。这样就能清楚地看出負荷量与彈簧长度之間的函数关系。

像这样用表格来表示函数关系的方法叫做列表法。

用列表法表示两个变量間函数关系的优点是对于表中自变量的每一个值,可以不通过计算,就能直接找到对应的函数值;缺点是表中不可能把所有的自变量值与函数对应值一一列出。

列表法在科学和技术上用处很大,如四位数学用表中的平方数表、立方数表、平方根表和立方根表等都是用这种方法

列出来的函数关系。

(3) 图象法 图 1-3 是用自动计温器所画出来的某一天 24 小时内温度变化的图形。横轴上的线段表示自变量时间 t 的钟点数, 纵轴上的线段表示对应的函数温度 T 用摄氏表所量出的度数。从这种图象就能清楚地看出温度 T 和时间 t 之间的函数关系。

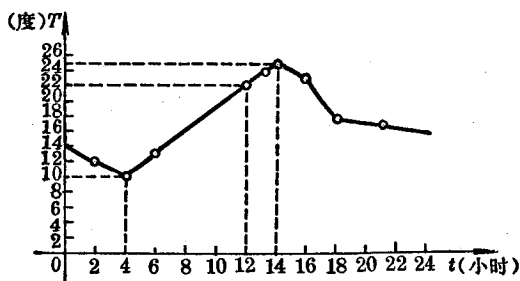


图 1-3

例如: 从上图可以直观地看出这一天在 14 点钟时温度最高为 25°C , 在 4 点钟时温度最低为 10°C , 在中午 12 点钟时温度为 22°C 。

像上面这样, 用图象来表示两个变量间的函数关系的方法叫做图象法。

用图象法表示函数关系, 优点是可以明显地看出自变量变化时函数变化的情况; 缺点是由自变量的值常常很难得到对应的函数的准确值。虽然这样, 这种方法仍是研究函数常用的方法。

上面我們分別介紹了函数关系的三种基本表示法, 它們都有着不同的优缺点, 因此对于这三种方法的应用, 就要根据

具体问题的需要与可能而灵活地采用。在数学上或其他科学应用上, 为了便于研究函数变化的情况, 有时可将这三种方法联合起来用, 就是由已给的函数解析式, 列出自变量值和对应函数值的表格, 再作出它的图象。

§ 1-4 函数图象的作法

我們已学过平面直角坐标系的基础知識。对于平面上的任一点 P , 就有唯一的一对数 (x, y) 和它对应; 反过来, 任意給出一对数 (x, y) , 在平面上也就有唯一的一点 P 和它对应。这就是說平面上的点与一对数 (x, y) 之間有一一对应的关系。

利用坐标概念, 可以把給定的自变量 x 的值作为点的横坐标, 把函数 y 的对应值作为点的纵坐标, 从而定出平面上的許多点, 在一般情况下, 順次連結所有这些点得到的平滑的曲綫或直綫, 就是所給函数的图象。

例 1. 作函数 $y=x^2$ 的图象。

作法: 第一步: 确定函数的定义域。

函数 $y=x^2$ 的定义域为一切实数。

第二步: 列表。

給自变量 x 以一系列的可能取的值, 按从小到大的順序排列, 求出函数 y 的每一个对应值得下表:

x		-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3	...
$y=x^2$		9	4	1	0.25	0	0.25	1	4	9	...

第三步: 描点作图。