高等学校教学用書

初等代数專門教程

下册

C. И. 諾窪塞洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

初等代数專門教程

下册

С. И. 諾渥塞洛夫著
赵慈庚等譯

高等教育出版社

本書系根据苏联“苏維埃科学”出版社（Советская наука）出版的諾渥塞洛夫（С. И. Новоселов）著“初等代数專門教程”（Специальный курс элементарной алгебры）1954年第三版譯出的。原書經苏联文化部高等教育署审定为师范学院教科書。

本書由北京师范大学数学系赵慈庚、董延闓、蔣鐸、严士健、郝鈵新、孙永生、袁兆鼎譯为中文。此書可以作为我国师范学院数学系初等代数复習及研究的課本或参考書，对于中学数学教师也是很好的参考書，

初等代数專門教程

下 册

С. И. 諾渥塞洛夫著

赵慈庚等譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号13010•300　開本850×1168 1/32　印張10 9/16　字數313,000　印數00001—13,000

1957年6月第1版　1957年6月北京第1次印刷　定價(8)￥1.10

下册目录

第五章　一次方程和一次不等式

§ 58. 綫性方程

定义　未知数的次数都是一次的方程叫做綫性方程。

若一个关于未知数 $x, y, \cdots, z$ 的方程:

$$F(x, y, \cdots, z)=0 \tag{F}$$

是綫性的，那末它的左边是一个关于未知数的一次多項式。

关于未知数 $x, y, \cdots, z$ 的綫性方程的一般形式是:

$$ax+by+\cdots+cz+d=0,$$

这里至少有一个未知数的系数不是零，因为当 $a=b=\cdots=c=0$ 时，左边不是一个一次多項式。但是今后(为了避免常常要加說明起見)我們將不把所有未知数的系数都是零的情形除外。

通常把数的被加項(常数項)移到右边，而把

$$ax+by+\cdots+cz=d, \tag{L}$$

当做綫性方程的标准形式。以下我們將討論以标准形式給出的綫性方程。

若某一个未知数的系数不是零，那末就說，这个方程含有这个未知数。若是这个未知数的系数等于零，那么就說，这个方程不含这个未知数。

綫性方程是在某一个数体上来討論的，就是說，假設它的所有系数 $a, b, \cdots, c, d$ 都是这个体里的数。

当在有理数体上討論綫性方程(L)时，通常將兩边用系数 $a, b, \cdots, c, d$ 的分母的最小公倍数去乘，然后再將这样得到的整系数方程約去系数的异于 ± 1 的公因数(假如有这样的公因数的話)。

有理数体上的綫性方程的标准形式指的是方程(L)，其中 $a, b, \cdots, c, d$ 是互素的整数①。

例

1. $$2x=5,\quad 3x-2y=4,\quad x+y-z=1$$

可以作为有理数体上的标准形式的綫性方程的例子；

$$\sqrt{2}x-y=1,\quad x+\pi y=\sqrt{2}$$

可以作为实数体上的例子；

$$(3+i)x-y+z+it=0$$

可以作为复数体上的例子。

前三个方程也可以看作实数体或复数体上的，而四、五兩方程也可以看作复数体上的。

2. 將有理数体上的方程

$$\frac{0.2x+0.1y}{2}-\frac{4x-y}{10}=\frac{3x+\frac{3}{2}}{30}+\frac{x-y}{5}$$

化为标准形式

解 我們有：

$$\frac{2x+y}{20}-\frac{4x-y}{10}=\frac{2x+1}{20}+\frac{x-y}{5};$$

乘以 20 得：

$$2x+y-2(4x-y)=2x+1+4(x-y);$$

最后得：

$$-12x+7y=1 \text{ 或 } 12x-7y=-1.$$

3. 方程

$$x^3-3x^2+2=(x-1)^3+2x$$

与一个綫性方程等价。我們有

$$x^3-3x^2+2=x^3-3x^2+5x-1,$$

因此得(將含 x 的項移到左边)

$$-5x=-3，\text{最后得 } 5x=3.$$

一个未知数的綫性方程，一个未知数的綫性方程具有以下形式：

---

① 在中学教科書中所習知的法則：“化去方程中的分数，約去公因数，將未知数移到一边而將已知数放在另一边”是对有理数体上的方程来說的。

$$ax=b, \tag{L}$$

此处 a, b 是給定体里的数。

情形 1°. $a\neq 0$. 在任何数体里，当 $a\neq 0$ 时方程(L)有唯一解(除法可施行):

$$x=\frac{b}{a}.$$

这个解也屬于方程的系数所在的数体。

情形 2°. $a=0, b\neq 0$。在这个情形下方程沒有解，事实上，对任何 x 来說，$0x=0$；因此，若 $b\neq 0$，則任何 x 都不能滿足方程(L)。

情形 3°. $a=b=0$。在这个情形下，方程有形式 $0x=0$，而恒等地被滿足；它的解是給定的体中任何数 x。

例

1. 解方程

$$\frac{x-4}{5}+\frac{3x-2}{10}=\frac{2x+1}{3}-7.$$

解　化方程为标准形式:

$$6(x-4)+3(3x-2)=10(2x+1)-210,$$
$$15x-30=20x-200,$$
$$3x-6=4x-40,$$
$$-x=-34;\quad x=34①.$$

2. 解方程

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)+2.$$

解　化为标准形式:

$$(2+\sqrt{2})x=4+\sqrt{2},$$

由此得

$$x=\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(4+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{2}=3-\sqrt{2}.$$

---

① 在这里把解法写得很詳尽；随着熟練程度的提高，建議某些中間的計算用心算并且不用写得很詳細。

知道$\sqrt{2}$的近似值，就可以將方程的根計算到任意的精确度。例如，

$$x=3-1.41=1.59,\ \text{精确到 } 0.01\ (\text{过剩的})。$$

3. 解方程

$$x+\frac{1}{2}=i(x+1).$$

解 化为标准形式:

$$2(1-i)x=-1+2i;$$

由此得

$$x=\frac{-1+2i}{2(1-i)}=\frac{(-1+2i)(1+i)}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}i.$$

在例 1，2 及 3 里的方程是在有理数体，实数体与复数体上給出的，它們的解也分别屬于同样的体。

4. 方程

$$5x-15=2x-25+3x$$

沒有解；因为化为标准形式后得到矛盾方程

$$0x=-10.$$

多个未知数的綫性方程。 我們看关于未知数 $x, y, \cdots, z$ 的方程

$$ax+by+\cdots+cz=d. \tag{L}$$

情形 1°. 至少有一个未知数的系数不是零。在这一情形方程(L)有無限多解。例如，若方程含有未知数 x，即 $a\neq 0$，則它的一般解可以表成以下形式:

$$x=\frac{-by-\cdots-cz+d}{a}, \tag{x}$$

此处 $y, \cdots, z$ 是这个方程系数所在的体中的任意数。事实上，方程(x)与(L)等价，因为把(L)的被加項 $by, \cdots, cz$ 移到右边然后乘以异于零的数 $\frac{1}{a}$ 就可以得到(x)。方程(x)給出 x 的值經由其余未知数 $y, \cdots, z$ 的值的表达式，而 $y, \cdots, z$ 的值是可以任意选取的。

情形 2°. 所有未知数的系数都等于零:

$$a=b=\cdots=c=0,\ \text{但 } d\neq 0.$$

在这一情形方程沒有解。

情形 3°. 所有未知数的系数及常数都等于零:

$$a=b=\cdots=c=d=0.$$

在这一情形,方程被体中的任意数組$(x, y, \cdots, z)$恒等地满足。

所列举的情形穷尽一切可能情形,因此 1°, 2°, 3° 分别是所予方程有解,矛盾,化为恒等式的必要而且充分的条件。

几何解釋　由解析几何知道,两个未知数的方程

$$ax+by=c$$

若其中至少有一个未知数的系数不等于零,則表示一直綫;这个直綫上任意点都满足此方程①。

同样,方程

$$ax+by+cz=d$$

若其中至少有一未知数的系数不等于零,則表示空間的平面。

例

1. 方程 $2x-y=3$ 的一般解可以写作 $y=2x-3$,此处 x 是任意数,或

$$x=\frac{y}{2}+\frac{3}{2},\ \text{此处 } y \text{ 是任意数。}$$

2. 化方程

$$2(x-2y+z)+3x=x-4y-3$$

为标准形式,得

$$4x+2z=-3,$$

后一方程不含 y。一般解可以写作 $x=-\frac{1}{2}z-\frac{3}{4}$, 此处 y, z 是任意数,或 $z=-2x-\frac{3}{2}$, 此处 x, y 是任意数。

§ 59. 綫性方程組

設在一个数体上給出綫性方程組:

---

① 綫性方程 $ax+by=c$ 的圖象是直綫,这一論断的初等証明在中学代数教科書中已有了。

$$\left.\begin{array}{ll}a_1x+b_1y+\cdots+c_1z=d_1 & (1)\\ a_2x+b_2y+\cdots+c_2z=d_2 & (2)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_nx+b_ny+\cdots+c_nz=d_n & (n)\end{array}\right\}\qquad (\mathrm{L})$$

按照系数的値来判断方程組是否有解的法則以及一般解的公式是在高等代数課程中建立的。在初等代数里研究解和討論綫性方程組的初等方法，这些方法被叙述成規則，使得在每一具体情况下确定所予方程組是否有解以及如何求解。这样，初等代数給出在具体情况下解并且討論綫性方程組的方法。

我們只研究不是所有未知数的系数都等于零的情形。若是所有未知数的系数都等于零，那么关于研究方程組的問題直接就解决了：若是有一个常数項不是零。則方程組是矛盾的，若是所有的常数項都等于零，則方程組被恒等地滿足。

假若(L)中的某一个方程变为恒等式，那么这个方程便可以除去，而不破坏方程組的等价性。

§60. 三角形方程組

定义 若是綫性方程組的方程可以写成下列的形式(标准形式)，就叫做一个完全三角形方程組：

1°. 第一个方程只含一个未知数；

2°. 后面的每一方程可以含有前面方程中的未知数，并且除此之外还含有一个前面方程中所沒有出現的未知数。

在三角形方程組的标准写法中，当由前一方程轉到后一方程时，后面的方程仅比前一方程多一个新的未知数，并且第一个方程只含一个未知数。

完全三角形方程組的一般形式是：

$$\left.\begin{array}{ll}a_{11}x_1 & =d_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 & =d_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & =d_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & =d_n\end{array}\right\}, \qquad (\Delta)$$

此处"对角綫系数" $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 都不等于零。在完全三角形方程組中,方程的个数等于未知数的个数。

例 方程組

$$x=2,\quad y-u+z=0,\quad x-2y=4,\quad x-3y-z=1$$

是一个完全三角形方程組,它可以写成:

$$\begin{array}{ll}x & =2,\\ x-2y & =4,\\ x-3y-z & =1,\\ \quad y+z-u & =0.\end{array}$$

定义 若是一个綫性方程組对于某一組未知数而言是完全三角形方程組,并且方程組中还含有这一組未知数以外的未知数,那末就叫做一个截三角形方程組。

設一截三角形方程組对未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而言是完全三角形方程組。那么除此之外,在方程中还含有若干其他未知数,我們用 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 来表示。

截三角形方程組的标准写法是以下形式:

$$\left.\begin{array}{ll}c_{11}t_1+c_{12}t_2+\cdots+c_{1k}t_k+a_{11}x_1 & =d_1\\ c_{21}t_1+c_{22}t_2+\cdots+c_{2k}t_k+a_{21}x_1+a_{22}x_2 & =d_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ c_{n1}t_1+c_{n2}t_2+\cdots+c_{nk}t_k+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n & =d_n,\end{array}\right\} \quad (\bar{\Delta})$$

此处对角綫系数 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 都不等于零。

截三角形方程組中未知数的个数大于方程的个数。

例 方程組

$$\left.\begin{array}{ll} x-y+z+w=0, & z-u=0, \\ x+2y+3t+u=3, & x+t+u=1 \end{array}\right\}$$

是截三角形方程組；它对未知数 x, y, z, w 而言是完全三角形方程組，

$$\left.\begin{array}{lr} t+u+x & =1, \\ 3t+u+x+2y & =3, \\ -u \qquad\quad +z & =0, \\ \qquad x-y+z+w & =0. \end{array}\right\} \qquad (\bar{\Delta})$$

这个方程組也可以看作对于其他未知数的完全三角形方程組，比如，对于 t, z, y, w，这时便得到以下的标准写法：

$$\left.\begin{array}{lr} x+u+t & =1, \\ -u \qquad +z & =0, \\ x+u+3t \qquad +2y & =3, \\ x \qquad\quad +z-y+w & =0. \end{array}\right\} \qquad (\overline{\Delta'})$$

这个方程組不能認为是对于 x, y, t, w 的完全三角形方程組，因为方程 $z-u=0$ 不含这些未知数。

也不能認为这个方程組是关于 u, x, y, t 的完全三角形方程組。事实上，必須將 $z-u=0$ 作为第一个方程，但这时所有其余的方程（每一个）至少含有未知数 x, y, t 中的兩个。

定理 1°. 任何完全三角形方程組有唯一解。

2°. 任何截三角形方程組有無限多解。

証明 1°. 用代入法（§ 45）解方程組。第一个方程的解为

$$x=\frac{d_1}{a_{11}},$$

此处 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 可以在所予数体中取任意值。將 x_1 的值代入，便得到一个关于 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ 的三角形方程組：

$$a_{22}x_2=d_2-a_{21}\frac{d_1}{a_{11}},$$

$$a_{32}x_2+a_{33}x_3=d_3-a_{31}\frac{d_1}{a_{11}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=d_n-a_{n1}\frac{d_1}{a_{11}}.$$

由第一个方程中求出 x_2,并將其代入其余的方程中,便得到一个关于未知数

$$x_3, x_4, \cdots, x_n$$

的三角方程組等等。

作 n 步后,便得到一組完全确定的未知数的数值,这組数給出方程組(Δ)的唯一解。

2°. 將截三角形方程組($\bar{\Delta}$)写成以下形式:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 &&= d_1 - c_{11}t_1 - \cdots - c_{1k}t_k,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &&= d_2 - c_{21}t_1 - \cdots - c_{2k}t_k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &&= d_n - c_{n1}t_1 - \cdots - c_{nk}t_k.
\end{aligned}$$

若是未知数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 取某一組(任意的)値,

$$t_1 = t_1^{(0)},\ t_2 = t_2^{(0)}, \cdots, t_k = t_k^{(0)}.$$

那末就得到一个完全三角形方程組,它有唯一解

$$x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \cdots, x_n = x_n^{(0)}.$$

这样,对于未知数 t_i 的任意一組値,便有方程($\bar{\Delta}$)的一組唯一解与它对应,因此,($\bar{\Delta}$)有無限多解。

为了解截三角形方程組,只要把第一个方程就 x_1 解出:

$$x_1 = \frac{d_1}{a_{11}} - \frac{c_{11}}{a_{11}}t_1 - \cdots - \frac{c_{1k}}{a_{11}}t_k,$$

再將这个表达式代入組($\bar{\Delta}$)的其他方程里。

这样得到关于未知数 $x_2, x_3, \cdots, x_n$; $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的截三角形方程組;由这个方程組中求出 x_2,又得到一个关于未知数 $x_3, x_4, \cdots, x_n$; $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的截三角形方程組等等。最后得到一般解,其中未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表成未知数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 的綫性多項式;而后面的未知数可以取給定体中的任何値。

完全三角形方程組可以改写成以下的等价的方程組,分别把

这組中的第一个方程对 x_1 解出，第二个对 x_2 解出，第 n 个对 x_n 解出就得到这个等价方程組，

$$
\begin{aligned}
&x_1=\delta_1\\
&x_2=\delta_2+\alpha_{11}x_1\\
&x_3=\delta_3+\alpha_{12}x_1+\alpha_{22}x_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_n=\delta_n+\alpha_{1,\,n-1}x_1+\cdots+\alpha_{n-1,\,n-1}x_{n-1}.
\end{aligned}
$$

为了解这个方程組，只要將第一个方程的 x_1 的值代入第二个，再將 x_1 和 x_2 的值代入第三个等等。对于截三角形方程組来説，右边还將含有未知数 $t_1, t_2, \cdots, t_k$。

例

1. 解完全三角形方程組:

$$
\begin{aligned}
x\qquad\qquad &=2,\\
x-2y\qquad &=4,\\
x-3y-z\quad &=1,\\
y+z-u&=0.
\end{aligned}
$$

解 由第一个方程得 $x=2$，代入第二个方程得 $2-2y=4$，故 $y=-1$，將 $x=2$ 与 $y=-1$ 代入第三个方程，得 $z=4$，由最后方程求出 $u=3$。

所以，$x=2, y=-1, z=4, u=3$ 是方程組的唯一解。

2. 解截三角形方程組

$$
\left.\begin{aligned}
t+u+x\qquad\qquad &=1\\
3t+u+x+2y\qquad &=3\\
-u\qquad\quad +z\quad &=0\\
x-y+z+w&=0
\end{aligned}\right\}\qquad (\bar{\Delta})
$$

(參看本节前面的例)。

解 由第一个方程得 $x=1-t-u$。

由第二个方程得:

$$y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t-\frac{u}{2}-\frac{x}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}t-\frac{u}{2}-\frac{1}{2}(1-t-u)=1-t.$$

由第三个方程得 $z=u$；最后，由末一个方程得

$$w=-x+y-z=-(1-t-u)+(1-t)-u=0.$$

所以方程組的一般解可以写成以下的形式:

$$x=1-t-u,\ y=1-t,\ z=u,\ w=0,$$

此处对未知数 u 与 t 可以給予任何数值。

所予方程組的一般解也可写成其他形式。將方程組写成($\overline{\Delta'}$)的形式，便得到以下的由 x 与 u 表示 t, z, y, w 的表达式：

$$t=1-x-u,\ z=u,\ y=x+u,\ w=0.$$

§ 61. 由兩个綫性方程消去未知数

我們看下面兩个方程

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & a_1x+b_1y+\cdots+c_1z=d_1\\ (2) & a_2x+b_2y+\cdots+c_2z=d_2\end{array}\right\}, \qquad (\mathrm{L})$$

簡写作

$$L_1(x, y\cdots, z)=d_1,\ \ L_2(x, y, \cdots, z)=d_2. \qquad (\mathrm{L})$$

定理　若(L)的每一方程都含有某一未知数，那末方程組(L)可以用与它等价的兩个綫性方程来代替，其中一个不含这个未知数。

后一方程的構成說是消去这个未知数。

証明　在于建立構成所求方程組的方法。下面給出兩种方法。

为了确定起見，我們假定(L)中每一方程都含有未知数 x（即 $a_1\neq0, a_2\neq0$），我們消去 x。

代入法　对方程組(L)应用代入法(§ 45)。把其中一个方程，比方說第一个就 x 来解，我們得到它的一般解：

$$x=\frac{d_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}y-\cdots-\frac{c_1}{a_1}z. \qquad (l_1)$$

按 § 45 里所說的規則，所求出的 x 的表达式应該代入第二个方程：

$$a_2\left(\frac{d_1}{a_1}-\frac{b_1}{a_1}y-\cdots-\frac{c_1}{a_1}z\right)+b_2y+\cdots+c_2z=d_2.$$

以 $a_1 \neq 0$ 去乘并且把数的被加項移到右边，得方程:

$$(a_1b_2-a_2b_1)y+\cdots+(a_1c_2-a_2c_1)z=a_1d_2-a_2d_1. \qquad (l_2)$$

上面这个方程

第一，是綫性的;

第二，不含 x;

第三，同方程 (l_1) 或者与 (l_1) 等价的方程 $L_1=d_1$ 放在一起，構成一个与(L)等价的方程組(§ 45, 定理 1)。

比較系数法　以 m_1 乘第一方程，以 m_2 乘第二个方程并且逐項相加:

$$m_1L_1(x, y, \cdots, z)+m_2L_2(x, y, \cdots, z)=m_1d_1+m_2d_2. \qquad (m_1)$$

若將这个方程与所予方程中的一个，比方說

$$L_1(x, y, \cdots, z)=d_1, \qquad (1)$$

放在一起，那么如果 $m_2 \neq 0$, 便得一个与原方程組等价的方程組(参考 § 45, 定理 II)。乘数 m_1 和 m_2 可以适当地选擇，使方程 (m_1) 中不含 x; 为此只須取 $m_1=a_2$, $m_2=-a_1$ 卽可。

通常，計算被布列成以下的样子:

$$\begin{array}{r|l} a_1x+b_1y+\cdots+c_1z=d_1 & a_2 \\ a_2x+b_2y+\cdots+c_2z=d_2 & a_1 \\ \hline (a_2b_1-a_1b_2)y+\cdots+(a_2c_1-a_1c_2)\,z=a_2d_1-a_1d_2 & \end{array}$$

(第一个乘以 a_2, 第二个乘以 a_1 并且相减)。

所得到的綫性方程不含 x 并且連同 $L_1=d_1$ 構成一个与(L)等价的方程組(§ 45. 定理 II)。

后一方法所以叫做比較系数法，是因为应用这个方法时，把已知方程用因子去乘，使所要消去的未知数的系数相等，然后再相减。

注　解整系数方程时，为了使系数相等，通常用把 a_1 和 a_2 补足成它們的最小公倍的因数(分别地)去乘方程。