21世纪高等学校教材

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

第二版

胡细宝　王丽霞　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

概率论与数理统计

（第二版）

胡细宝　王丽霞　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容摘要

本书介绍了概率论与数理统计的基本概念、基本理论和方法。内容包括：随机事件及其概率，随机变量及其分布，多维随机变量及其分布，随机变量的数字特征，极限定理，样本及抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析及回归分析，每章均附有习题，供学生练习之用。

本书是高校工科、理科（非数学系）“概率论与数理统计”课程的教材。本书也可作为高等学校理工科各专业学生及教师的教材和教学参考书，也可供科技工作者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/胡细宝，王丽霞编著. —2版. 北京：北京邮电大学出版社，2004

ISBN 7－5635－0918－6

Ⅰ.概...　Ⅱ.①胡...②王...　Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 059712 号

书　　名：概率论与数理统计
编　　著：胡细宝　王丽霞
责任编辑：马相平
出版发行：北京邮电大学出版社
E-mail：publish@bupt.edu.cn
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真：010－62282185(发行部)010－62283578(传真)
经　　销：各地新华书店
印　　刷：国防科技大学印刷厂印刷
开　　本：787mm×960mm　1/16
印　　张：18.75
字　　数：360 千字
版　　次：2004 年 7 月第 2 版　2004 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 7－5635－0918－6/O・85　　　　定　价：23.00 元

前　言

在高等学校理工科专业的数学教育体系中，“概率论与数理统计”一直是一门很具特色又具重要地位的工程数学课。当前，改革之风正吹遍高等教育界，课程重组，内容改造与学时调整的呼声日益高涨，在此形势下我们对概率论与数理统计的教学进行了改革探索，本书的出版也是一个改革探索的结果。

面对科学技术的迅速发展以及对人才要求的提高，我们多年来一直在组织力量探索数学课程新的内容体系和教学方法。概率论与数理统计是理工科各专业学生必备的基础课，我们结合本课程特点及各专业的特点对概率论与数理统计的教学进行了大胆而有益的改革探索与实践，在此基础上编写出了这本教材。在编写过程中力图做到：(1) 培养学生对随机现象的理解及概率的直觉，注重数学观念的直观背景和数学概念的直观理解。比如在讲述概率论中独立性、相依性、条件概率等这些重要概念时，我们不仅花了较大篇幅论述其直观背景与直观含义，而且还举了许多实际例子。又如在介绍概率的公理化定义之前，我们全面介绍了概率的几种定义(统计定义、古典定义、几何定义)，使学生了解人类形成的丰富的概率思想。(2) 提高学生的数学修养及严密的思维能力，加强教材内容的系统性与严谨性。比如本书中我们较系统地介绍了概率的公理化定义并引入了概率空间这一现代概率论的理论框架，这样既可以使学生初步了解现代数学思想及处理方法，也可以使学生为进一步深造打下较好的理论基础。

本书由胡细宝、王丽霞、欧阳自根编写。编写过程中得到了姜炳麟教授、王玉孝教授、闵祥伟教授的关心与帮助，并得到了北京邮电大学出版社的大力支持，在此一并表示衷心的感谢。

限于编者水平，书中不足与错误在所难免，希望广大读者批评指正。

编者

目 录

第1章　随机事件和概率

本章将引入随机试验、随机事件、随机事件的概率诸概念. 由此引入概率论中的基本框架 —— 概率空间. 这里核心问题是随机事件的概率的概念和计算.

§1.1　随机试验、随机事件和样本空间

在自然界和人类社会中存在着两类现象，一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生的现象. 例如，"同性电荷互斥"，"在标准大气压下，纯水加热到 100℃ 必然会沸腾"，等等；另一类现象是非确定性现象，即在一定条件下可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果. 例如，在相同条件下抛一硬币可能是正面朝上，也可能反面朝上，其结果事先是不确定的. 用同一仪器在相同条件下测量某一物体的重量，每次称重的结果都略有差异. 炮手用同一门炮向同一目标射击，各次的弹道点不尽相同，等等. 这类现象和确定性现象有着本质的区别. 虽然表面上这类现象杂乱无章，然而人们经过长期的实践与观察发现这类现象是有规律可循的. 例如，大量重复抛一硬币得正面朝上与反面朝上的次数大体相同. 同一射手用同一门炮向同一目标射击，弹道点按一定规律分布. 气体的分子运动是杂乱无章的，但大量气体分子的运动有其规律性，等等. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性，就是我们以后所说的统计规律性.

在个别试验中其结果呈现出不确定性；在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，我们称之为随机现象. 概率论是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1. 随机试验

我们遇到各种试验. 在这里我们把试验作为一个含义广泛的术语. 它包括做一次科学实验，也包括进行一次测量，或一次抽样观察.

概率论中讨论具有如下特点的试验：

(1) 在相同条件下可重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且事先能明确试验的所有可能结果.

(3) 进行一次试验之前，不能确定会出现哪一个结果.

具有以上三个特点的试验称为随机试验，常用 E 表示. 随机试验简称为试验.

下面给出几个随机试验的例子.

E_1：抛一硬币，观察正反面出现的情况.

E_2：将一硬币抛三次，观察正面 H，反面 T 出现的情况.

E_3：将一硬币抛三次，观察正面出现的次数.

E_4：掷一骰子，观察出现的点数.

E_5：记录某寻呼台在午间 1：00 ～ 2：00 间接到的寻呼次数.

E_6：从一批电脑中，任取一台观察无故障运行时间.

E_7：向一平面区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 10\}$ 内随机投掷一点，观察落点 P 的坐标(假定点必落在 D 上).

由以上例子可知，随机试验是产生随机现象的过程，随机试验和随机现象是并存的. 我们也正是通过研究随机试验来研究随机现象的.

2. 随机事件

随机试验的某种结果称为随机事件，简称事件. 一般用大写字母 A,B,C 等表示. 例如在 E_1 中{出现正面}，{出现反面} 都是 E_1 的某种结果，它们都是 E_1 的随机事件，再如在 E_4 中{出现点数 1}，{出现偶数点}，{出现的点数不超过 3}，在 E_6 中{电脑的无故障运行时间超过 1 000 小时} 等也都是随机事件.

事件又分为基本事件和复合事件. 基本事件是指试验的一个基本结果. 这里所说的基本结果是指在试验的条件和观察目的下能直接观察到的简单结果. 例如在 E_4 中{出现点数 i}，$i = 1,2,3,4,5,6$ 都是基本事件，在 E_5 中{接到 1 次寻呼}，{接到 2 次寻呼}，…，{接到 n 次寻呼} 都是基本事件. 再如在观察某射手的射击结果时，{中靶}，{脱靶} 也是基本事件. 复合事件是由试验的若干个基本结果组成的事件. 例如在 E_4 中{出现偶数点}，{出现的点数不超过 3}，在 E_5 中{接到的寻呼次数超过 10}，在 E_6 中{电脑的无故障时间超过 1 000 小时} 等都是复合事件. 但应注意，区分事件为基本事件和复合事件是相对于具体试验的观察目的而言的，不可绝对化. 例如{正面恰好出现一次} 既是 E_2 的事件也是 E_3 的事件，它是 E_3 的基本事件而在 E_2 中它是复合事件. 在 E_6 中如规定电脑的无故障运行时间超过 1 000 小时为正品，当我们观察电脑是正品还是次品时，{电脑为正品} = {电脑无故障运行时间超过 1 000 小时} 则是一基本事件，再如当两位赌徒掷一骰子，以出现奇数点还是偶数点决定输赢的场合下，{出现奇数点} 及{出现偶数点} 都是基本事件.

随机事件中有两个极端情况：一个是每次试验中都必然发生的事件，称为必然事件，记为 Ω. 再一个是每次试验中都不发生的事件，称为不可能事件，记为 $\varnothing$. 例如在 E_4 中{出现的点数不超过 6} 是必然事件，{出现的点数超过 6} 是不可能事件. 必然事件和不可能事件已无随机性可言，但为了方便，把它们视为随机事件的特例. 正如微积分中常数可视为变量的特例.

3. 样本空间

为了用数学方法描述随机现象及随机事件，需要样本空间的概念.

试验 E 的所有基本结果构成的集合称为样本空间，记为 Ω，Ω 中的元素即 E 的基本结果称为样本点，记为 ω，即 $\Omega = \{\omega\}$.

例 1.1 给出随机试验 $E_1 - E_7$ 的样本空间.

解 $\Omega_1 = \{H, T\}$

$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\}$

$\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}$

$\Omega_6 = \{t \mid t \geqslant 0\}$

$\Omega_7 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 10\}$

要注意的是：在描述各个不同的试验时，我们不仅要规定正要进行的程序，而且要规定什么是我们所观察的. 例如 E_2 和 E_3 同是将一硬币抛三次，但由于观察目的不同，它们视为不同的随机试验，因而它们的样本空间也不一样.

有了样本空间的概念后，我们可将随机事件表示为样本空间中的某些样本点组成的集合，即表示为样本空间 Ω 的子集. 例如 E_4 的样本空间为 $\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件 $A_i = \{$出现点数 $i\}$，$i = 1, 2, \cdots, 6$，$B = \{$出现偶数点$\}$，$C = \{$出现的点数不超过 3$\}$ 可表示为 Ω_4 的子集：$A_i = \{i\}$，$i = 1, 2, \cdots, 6$，$B = \{2, 4, 6\}$，$C = \{1, 2, 3\}$. 在 E_7 中事件 $A = \{$落点与原点的距离不超过 1$\}$ 可表示为 $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$，它是 Ω_7 的子集.

基本事件是样本空间的单点集. 复合事件是由多个样本点组成的集合. 必然事件包含一切样本点，它就是样本空间 Ω. 不可能事件不含任何样本点，它就是空集 $\varnothing$.

所谓事件 A 发生，是指在一次试验中，当且仅当 A 包含的某个样本点出现.

4. 事件间的关系及其运算

事件是一集合，因此事件之间的关系及其运算可用集合之间的关系和运算来处理. 下面我们通过例子加以说明.

例 1.2 从一批产品中任取 8 件，观察其中的正品件数，则这一试验的样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

我们引入下列随机事件

$A = \{$正品件数不超过 3$\} = \{0, 1, 2, 3\}$

$B = \{$取到 2 件或 3 件正品$\} = \{2, 3\}$

$C = \{$取到 2 至 5 件正品$\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$D = \{$取到的正品件数不少于 2 且不多于 5$\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$E=\{$取到的正品件数至少为 4$\}=\{4,5,6,7,8\}$

$F=\{$取到的正品件数多于 4$\}=\{5,6,7,8\}$

设Ω为试验E的样本空间,$A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$为随机事件,它们都是Ω的子集.

(1) 事件的包含与相等

若事件A发生必然导致事件B发生,则称事件B包含事件A.此时A中的样本点一定属于B.记为$A\subset B$.

如在例 1.2 中$B\subset A,F\subset E$.

显然对任意事件A都有$\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若事件A与B满足:$A\subset B$且$B\subset A$,则称事件A与事件B相等,记为$A=B$.

例如在例 1.2 中$C=D$.

(2) 事件的和

"事件A与事件B中至少有一个发生"是一事件,称该事件为事件A与事件B的和(并)事件,记为$A\cup B$.事件$A\cup B$是由A或B中的样本点组成的集合.

例如在例 1.2 中$A\cup C=\{0,1,2,3,4,5\}$.

一般地,"n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中至少有一个发生"这一事件称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的和事件,记为$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,或记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

当涉及无穷多个事件时,可把事件和推广到可列无穷(集合可列无穷是指集合中的元素与自然数集能建立一一对应的关系)多个事件的场合,我们引进$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示事件"$A_1,A_2,\cdots$诸事件中至少有一个发生".

(3) 事件的积

"事件A与事件B同时发生"是一个事件,称为事件A与事件B的积(交)事件,记为$A\cap B$或AB.积事件AB是由A与B的公共样本点所构成的集合.

例如在例 1.2 中,$AC=\{2,3\}$,$AF=\varnothing$.

与和事件情形相同,可把积事件的概念推广至n个事件及可列无穷多个事件的场合."n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$同时发生"这一事件称为$A_1,A_2,\cdots,A_n$的积事件,记为$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$或$A_1A_2\cdots A_n$,也可记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.在可列无穷的场合,用$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$表示"$A_1,A_2,\cdots$诸事件同时发生".

(4) 互不相容事件

若事件A与事件B不能同时发生,即$AB=\varnothing$,则称A和B是互不相容的或互斥的.基本事件是两两互不相容的.

例如在例 1.2 中,A与F互不相容,B与E是互不相容的.

若n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$中任意两个事件都互不相容,即$A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$,则称这$n$个事件互不相容.

(5) 对立事件

若 A,B 互不相容，且它们的和事件为必然事件，即 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$，则称 A 和 B 互为对立事件，或称 A 与 B 互为逆事件. 事件 A 的逆事件记为 $\overline{A}$. $\overline{A}$ 表示"A 不发生"这一事件.

例如在例 1.2 中 A 与 E 互为逆事件，即 $\overline{A}=E,\overline{E}=A$.

A 与 B 对立，是指事件 A 与事件 B 既不能同时发生又必然有一个发生，即在每次试验中 A 与 B 有且只有一个发生. 显然有

$$\overline{\overline{A}}=A,\quad A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega,\quad \overline{\Omega}=\varnothing,\quad \overline{\varnothing}=\Omega$$

由定义可知，对立事件必为互不相容事件，反之，互不相容的两个事件未必是对立事件.

(6) 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差事件. 记为 $A-B$.

例如在例 1.2 中 $A-B=\{0,1\},B-A=\varnothing,C-A=\{4,5\}$

差事件 $A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点组成的集合. 显然有

$$A-B=A\overline{B}=A-AB,\quad \overline{A}=\Omega-A$$

对于任意两事件 A,B，总有如下分解

$$A=AB\cup A\overline{B},\quad A\cup B=A\cup(B\overline{A})=B\cup(A\overline{B})$$

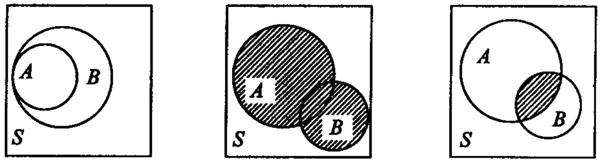
为了帮助大家理解上述概念，现把集合论中的集合的关系和运算与概率论中的事件的关系和运算对应起来，如表 1.1 所示.

表 1.1

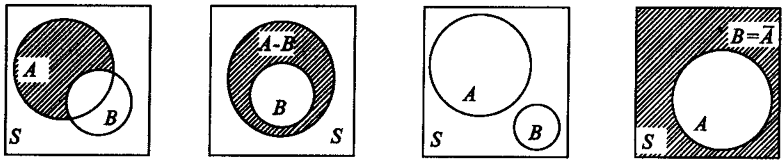
符　号	集合论	概率论
Ω	全　集	样本空间；必然事件
$\varnothing$	空　集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 B 包含 A	事件 B 包含事件 A (事件 A 发生则事件 B 必发生)
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和事件 (事件 A 与 B 至少有一个发生)
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交集	事件 A 与事件 B 的积事件 (事件 A 与 B 都发生)
$A-B$	集合 A 与集合 B 的差集	事件 A 与事件 B 的差事件 (事件 A 发生而 B 不发生)
$\overline{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的逆事件或对立事件 (A 不发生)
$AB=\varnothing$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容或互斥 (A,B 不能同时发生)

以上事件间的关系与运算可用文氏(Venn)图来直观地表示. 若用平面上的

一个矩形表示样本空间Ω,矩形内的点表示样本点,圆A与圆B分别表示事件A与事件B,则A与B的关系和运算如图 1.1(a) ~ (f) 所示.



(a) $A\subset B$　　(b) $A\cup B$　　(c) AB



(d) $A-B$　　(e) $AB=\phi$　　(f) $\overline{A}$

图 1.1

(7) 事件的运算律

事件的运算满足以下运算律:

(1) 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律:$A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$,

$$A\cup(BC)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$$

(4) 德·摩根(De Morgan)律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

一般地对有限个事件及可列无穷个事件有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i};\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}$$

例 1.3　设A,B,C为三个事件,试用A,B,C表示下列事件:

(1) A发生且B与C至少有一个发生;　(2) A与B都发生而C不发生;

(3) A,B,C中恰有一个发生;　(4) A,B,C中不多于一个发生;

(5) A,B,C不都发生;　(6) A,B,C中至少有两个发生.

解　(1) $A(B\cup C)$;　(2) $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$;

(3) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup AC\cup BC}$;

(5) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;

(6) $AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

例 1.4　试求事件"甲产品畅销而乙产品滞销"的对立事件.

解　设$A=\{$甲产品畅销$\}$,$B=\{$乙产品畅销$\}$. 则"甲产品畅销而乙产品滞

销”可表示为 $A\overline{B}$，$A\overline{B}$ 的对立事件为

$$\overline{A\overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cup B$$

即所求对立事件为“甲产品滞销或乙产品畅销”.

§1.2　事件的概率

随机事件的发生带有偶然性.但当我们多次做某一试验时，常常会察觉到某些事件发生的可能性要大些，而另一些事件发生的可能性要小一些.既然随机事件的发生的可能性有大小之别.我们自然想到该用一个数字 $P(A)$ 来标志事件 A 发生的可能性.较大的可能性用较大的数字标志，较小的可能性用较小的数字来标志.这个数字 $P(A)$ 就称为事件 A 的概率.

在此，我们只给了事件 A 的概率 $P(A)$ 的一种定性描述.至于概率的定量定义和具体算法在概率论的发展史上，人们针对不同类型的随机试验，从不同角度给出了不同的定义和算法.下面我们介绍概率论发展史上出现过的概率的统计定义，古典定义，几何定义.

1. 概率的统计定义

定义 1.2.1　设 E 为一随机试验，A 为 E 的一事件，在相同条件下将 E 独立地重复进行 n 次，以 n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中发生的次数，称 n_A 为 A 在这 n 次试验中发生的频数，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 的频率，记为 $f_n(A)$ 即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \tag{1.2.1}$$

例如将一硬币抛 100 次正面出现 52 次，那么“出现正面”这一事件在这 100 次试验中的频率为 0.52.

由定义，易见频率具有下列性质：

(1) 对于任一事件 A，有

$$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1 \tag{1.2.2}$$

(2)
$$f_n(\Omega) = 1 \tag{1.2.3}$$

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i) \tag{1.2.4}$$

事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度，一般地，A 发生的可能性愈大，在多次重复试验中 A 的发生会愈频繁，即 A 的频率 $f_n(A)$ 会愈大.反之若 A 的频率愈大表明 A 发生的可能性也愈大.因此频率与概率应有紧密的关系.在实际中常把频率作为概率的近似值.但频率作为概率的定义是行不通的.因为频率具有波动性，

即使同样进行了 n 次试验，频率 $f_n(A)$ 也会不同. 但人们经过长期实践发现，当试验次数 n 越大，频率的波动性会越小. 当 n 充分大时，频率会在某一个值附近摆动，n 越大摆动幅度越小. 这个值称为频率的稳定值，频率的稳定值反映了事件 A 发生的可能性大小. 针对这一事实，我们把事件 A 的频率的稳定值定义为事件 A 的概率. 这一定义称为概率的统计定义.

历史上著名的统计学家蒲丰(Buffon) 和皮尔逊(Pearson) 曾进行过大量抛硬币的试验，其结果如表 1.2 所示.

表 1.2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

可见出现正面的频率总在 0.5 附近摆动. 随着试验次数的增加，它会逐渐稳定于 0.5.

概率的统计定义的重要性，不在于它提供了一种定义概率的方法 —— 它实际上没有提供这种方法，因为你永远不可能依据这一定义确切地给出任何一个事件的概率. 其重要性在于两点：一是提供了一种估计概率的方法，例如在工业生产中依据抽取的一些产品的检验去估计产品的废品率；在医学上依据积累的资料去估计疾病的死亡率等. 二是它提供了一种检验理论正确与否的准则. 设想根据某一理论或假定算出了某事件 A 的概率为 p，这一理论或假定是否与实际相符？我们并无把握，于是我们可诉诸试验，即进行大量重复的试验以观察事件 A 的频率 $f_n(A)$. 若 $f_n(A)$ 与 p 接近，则可以认为试验结果支持了有关理论. 若相差较远，则可认为理论可能有误.

2. 古典概率

在随机试验中我们常遇见这样一类简单的随机试验：它的全部可能的基本结果只有有限个，而且从试验的条件和实施方法上去分析，我们找不到任何理由认为其中某一基本结果比任一其他基本结果更具优势(更易发生)，即可以认为每一基本结果发生的可能性相同. 例如考虑试验：掷一六面均匀的骰子，这一试验有 6 个基本结果而且可以认为出现每个点数的机会是均等的. 这类随机试验我们称之为古典概型，在古典概型中事件的概率是容易被合理地定义的.

定义 1.2.2　若试验 E 具有如下特征：

(1) 有限性：试验只产生有限个基本事件，即样本空间中的样本点总数有限；

(2) 等可能性：每次试验中各个基本事件发生的可能性相同.

则称试验 E 为古典概型. 也称为等可能概型.

定义 1.2.3　设 E 是含有 n 个基本事件的古典概型，A 是由 m 个基本事件组成的随机事件，A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{m}{n} \tag{1.2.5}$$

由(1.2.5)式定义的概率称为古典概率，这种方法简单直观，不需要作试验. 但只能在特定的随机现象中使用. 由这一定义不难看出古典概率具有下述性质：

(1) 对于任一事件 A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1 \tag{1.2.6}$$

(2)

$$P(\Omega)=1 \tag{1.2.7}$$

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}P(A_i) \tag{1.2.8}$$

例 1.5　将一硬币抛三次，设事件 $A_1=\{$恰有一次出现正面$\}$，$A_2=\{$三次出现同一面$\}$，求 $P(A_1)$，$P(A_2)$.

解　我们考虑 §1.1 中 E_2 的样本空间

$$\Omega_2=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$$

而 $A_1=\{HTT,THT,TTH\}$，$A_2=\{HHH,TTT\}$.

Ω_2 中只含有有限个样本点，且由对称性知每个基本事件发生的可能性相同，故由式(1.2.5)，得

$$P(A_1)=\frac{3}{8},P(A_2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

注意，若我们考虑 §1.1 中 E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{0,1,2,3\}$. 如我们认为抛一次硬币出现正面与出现反面是等可能的，那么 E_3 中的各个基本事件发生的可能性会不相同. 因此不能用式(1.2.5)算出 $P(A_1)$.

当样本空间中的样本点较多时，我们一般不再将 Ω 中的样本点一一列出来，而只需分别求出 Ω 中与 A 中的样本点个数(即基本事件的个数)再由式(1.2.5)即可求出 A 的概率.

例 1.6　一袋中有 10 个球，其中 4 个红球，6 个白球，考虑两种取球方式：(a) 一次取一球，观察颜色后放回袋中，然后再取一球. 这种取球方式叫做有放回抽样. (b) 一次取一球，取后不放回袋中，然后再取. 这种取球方式叫做无放回抽样. 现从袋中连续取 3 球，试分别就上述两种方式下求：(1) 取出的 3 球全为白球的概率；(2) 取出的 3 球中 2 个红球 1 个白球的概率.

解　设 A,B 分别表示事件“取出的 3 球全为白球”，“取出的 3 球中 2 个红球 1 个白球”.

(a) 有放回抽样

从袋中取 3 个球，每种取法就是一个基本结果，由乘法原理易知样本空间中样本点总数为 $n=10^3$，A 中样本点的个数为 $m_1=6^3$，B 中的样本点的个数为 $m_2=C_3^2\times 4^2\times 6$，于是由式(1.2.5) 可得

$$P(A)=\frac{6^3}{10^3}=0.216,\quad P(B)=\frac{C_3^2\times 4^2\times 6}{10^3}=0.288$$

(b) 无放回抽样

样本空间中样本点总数为 $n=10\times 9\times 8$，A 中的样本点个数为 $m_1=6\times 5\times 4$，B 中的样本点的个数为 $m_2=C_3^2\times 4\times 3\times 6$，所以

$$P(A)=\frac{6\times 5\times 4}{10\times 9\times 8}=\frac{1}{6}\approx 0.167,\quad P(B)=\frac{C_3^2\times 4\times 3\times 6}{10\times 9\times 8}=0.3$$

例 1.7 设有 N 件产品其中有 D 件次品，今从中任取 n 件，问其中恰有 $k(k\leqslant D)$ 件次品的概率是多少？

解 设 A 表示事件“取到的 n 件产品中恰有 k 件次品”.

从 N 件产品取 n 件，每一种取法为一基本结果，因此样本空间的样本点的总数为 C_N^n，事件 A 中的样本点个数为 $C_D^k\,C_{N-D}^{n-k}$，于是所求概率为

$$P(A)=\frac{C_D^k C_{N-D}^{n-k}}{C_N^n}$$

例 1.8 将 n 只球随机地放入 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中去，试求下列事件的概率：

$A=\{$某指定的 n 个盒子中各有一球$\}$；

$B=\{$每个盒子至多有一球$\}$；

$C=\{$某指定的一个盒子中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个球$\}$.

解 n 个球中每个球都有 N 种放法，因而 n 个球放入 N 个盒子中共有 N^n 种放法，每种放法即为一基本事件，因此样本空间中的样本点总数为 N^n，而 A 中的样本点个数为 $n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$，B 中的样本点个数为 $C_N^n\cdot n!=A_N^n$，C 中样本点个数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$，于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}\qquad P(B)=\frac{A_N^n}{N^n}$$

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}$$

有许多问题和本例有相同的数学模型. 例如，假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于 1/365，那么随机地选取 $n(n\leqslant 365)$ 个人，他们的生日各不相同的概率为

$$p_1=\frac{A_{365}^n}{365^n}=\frac{365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}$$

至少有两人生日相同的概率为

$$p_2=\frac{365^n-365\cdot 364\cdots(365-n+1)}{365^n}=1-p_1$$

经计算可得下述结果

n	20	23	30	40	50	64	100
p_2	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.999 999 7

例 1.9　从 0,1,…,9 共 10 个数字中随机地有放回地接连取 4 个数字,并按其出现的先后排成一行. 试求下列事件的概率

(1) $A_1 = \{4$ 个数字排成一个偶数$\}$;

(2) $A_2 = \{4$ 个数字排成一个四位数$\}$;

(3) $A_3 = \{4$ 个数字中 0 恰好出现两次$\}$.

解　因为是有放回抽样,所以样本空间中样本点总数为 10^4.

若使 4 个数字组成偶数,则只需末位数字为偶数即可. 这有 5 种可能: 0,2,4,6,8,而前三位数字是任意的,有 10^3 种取法. 于是 A_1 中共含有 $C_5^1 \cdot 10^3$ 个样本点. 类似地可知 A_2 中样本点的个数为 $C_9^1 \cdot 10^3$, A_3 中样本点的个数为 $C_4^2 \cdot 9^2$,从而

$$P(A_1) = \frac{C_5^1 \cdot 10^3}{10^4} = 0.5 \quad P(A_2) = \frac{C_9^1 \times 10^3}{10^4} = 0.9 \quad P(A_3) = \frac{C_4^2 \cdot 9^2}{10^4} = 0.048\,6$$

例 1.10　(一个古老的问题) 一对骰子连掷 25 次. 问出现双 6 与不出现双 6 的概率哪个大?

解　设 $A = \{$出现双 6$\}$, $B = \{$不出现双 6$\}$,一对骰子掷 1 次,有 $6 \times 6 = 36$ 种结果. 掷 25 次共有 36^{25} 种结果,掷一次出现双 6 只有 1 种结果,不出现双 6 有 35 种结果,掷 25 次不出现双 6 共有 35^{25} 种结果,而至少有一次出现双 6 有 $36^{25} - 35^{25}$ 种结果. 因此

$$P(B) = \frac{35^{25}}{36^{25}} \approx 0.494\,5, \quad P(A) = \frac{36^{25} - 35^{25}}{36^{25}} = 1 - P(B) = 0.505\,5$$

所以出现双 6 的概率大.

这个问题在 17 世纪由帕斯卡解决. 他论证了在只押出现双 6 与不出现双 6 的押保中,押出现双 6 更有利.

例 1.11　(抽签与顺序无关) 袋中有 a 个白球 b 个黑球,现有 $a+b$ 个人依次从中取一球,求第 $k(1 \leqslant k \leqslant a+b)$ 个人取到白球的概率.

解　设想 $a+b$ 个人取到的球依顺序排成一列,那么每种排列就是一个基本结果,总共的基本结果数为 $a+b$ 个元素的全排列数 $(a+b)!$,第 k 个人取到白球即为第 k 个位置上排上一个白球有 a 种选择,而其余 $a+b-1$ 个球在其余 $a+b-1$ 个位置上任意排到,共有 $(a+b-1)!$ 种排法. 因此所求的概率为

$$p_k = \frac{a \cdot (a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

这个结果与 k 无关. 这就是抽签与顺序无关,人们常采用抽签这种方法来体现公平