

悬挂结构计算



中国建筑工程出版社

本书首先对悬挂结构的基本单元——单索的计算作详细介绍，然后分别叙述辐射式悬挂结构和索网的计算方法，并初步探讨了悬挂结构的振动计算。在辐射式悬挂结构计算一章提出的方法，可以求任意荷载下的精确解；在索网计算一章用薄膜比拟法建立索网的偏微分方程，并提供了几个近似解法；在振动一章提出了一个摄动解法；最后，介绍了余能法在索网应力分析中的应用。附录中以余能法为基础对有限单元法在索网应力分析中的应用作了简单的探讨。

书中有大量例题和练习题，书末还附有本书一些数学问题的说明，以帮助读者理解。

本书可供房屋结构专业的设计人员及大专院校师生参考。

悬挂结构计算

金 问 鲁

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：11 7/8 字数：313 千字

1975年7月第一版 1975年7月第一次印刷

印数：1—17,330 册 定价：1.00 元

统一书号：15040·3216

毛 主 席 语 录

我们必须打破常规， 尽量采用 先进技术， 在一个不太长的历史时期内， 把我国建设成为 一个社会主义 的现代化的强国。

中国人民有志气， 有能力， 一定要在
不远的将来， 赶上和超过世 界 先进水平。

在生产斗争和科学实验范围内，人类总是不断发展的， 自然界也总是 不断发展的， 永远不会停止在一个水 平上。因此， 人类总得不断地总结经验，有所发现， 有所发明， 有所创造， 有所前进。

前 言

悬挂结构是以悬挂在两支座上的悬索作为承重构件的一种结构，它可以由一系列悬索通过内环联系形成辐射式的系统，也可以由两组或多组相互交叉的悬索形成索网。因为悬索只受拉力，索的材料强度得以充分利用，不会失去结构的稳定；若采用高强度的材料，更可减轻结构自重、节约材料和跨越较大的空间。悬挂结构适用于大跨度的建筑物，如大型公共建筑、具有宽广空间的生产厂房以及桥梁等。本书只论述用于屋盖结构悬挂系统的应力计算。

早在1696年，我国古代劳动人民就已采用铁索建造了一座闻名世界的泸定桥。目前，高强度合金钢的生产和塑料纤维工业的发展，更有利于悬挂结构的采用。1961年北京建成了一座宏伟的北京工人体育馆，采用了双层辐射式悬挂结构，1963年杭州建成了一座浙江省人民体育馆，采用了马鞍形索网悬挂结构，其它地方也建造了不同类形的悬挂结构建筑物。作者曾参加过部分悬挂结构的计算工作，特将所得的体会整理成册，请广大工程技术人员指正。

悬挂结构的计算分析过程，也就是运用唯物辩证法分析矛盾和解决矛盾的过程。悬挂结构的基本单元是单索，单索具有柔性，它的荷载与变形成非线性变化，即它的形状和尺寸随荷载的性质不同而改变，成为变化体系。这是单索要解决的主要矛盾，也是悬挂结构要解决的主要矛盾。怎样解决这个矛盾呢？这就必须寻求非线性的应力与变形的协调条件。悬挂结构由很多单索组成，也就是具有很多的离散单元。根据高等数学在一定条件下把曲线视为直线并把直线视为曲线的处理，可将悬挂结构的离散单元转换为相应的连续体，按平衡条件和应力与应变关系来逐步建

立方程，加以解决。

悬挂结构形式很多，不同的形式还具有不同的矛盾。辐射式悬挂结构只有一个表征单索位置的自变量 θ ，建立的方程将是具有内环变位和索张力 $H(\theta)$ 两个未知量的非线性积分方程；鞍形索网则有两个变量 x, y ，建立的方程是索张力二维线性偏微分方程。建立方程后，还要用最简单的计算方法求得有一定精度的计算结果。本书对辐射式悬挂结构采用数值积分法和迭代法相结合求解；对于索网采用直接法、最小二乘法与余能法来求解；对假定的索网变位函数用单参数或多参数法求解；对振动问题，作者提出一个摄动解法，将每级摄动项化为线性的，以便求解。

本书所述计算方法的探讨工作是在1962年完成的，其中错误和不妥之处，望读者提出批评。

目 录

前 言

第一章 单索计算理论	1
一、受垂直荷载时单索的平衡方程	1
1. 引 言	1
2. 平衡方程的推导	2
3. 平衡方程的讨论	2
4. 例 题	11
二、单索的应力——变形协调方程	13
1. 索长公式的推导	13
2. 应力——变形协调方程的推导	20
3. 例 题	22
三、单索问题的解法（基准态观念）	23
1. 应力——变形条件与求解 H 的方程	23
2. 近似求解法的基础	27
3. 基准态观念	28
4. 例 题	30
四、有关单索问题的讨论	33
1. 横向位移与交叉系悬索的关系	33
2. 例 题	35
习题一	49
第二章 辐射式悬挂结构计算	50
一、辐射式悬挂结构的荷载和变形	50
1. 辐射式悬挂结构介绍	50
2. 辐射式结构变位数目	52
3. 辐射式结构变位方程	53
4. 求解方法概述	54
二、单层辐射式结构计算理论	
——结构与荷载为轴对称的情形	56
1. 一般单层辐射式悬挂结构的方程	56
2. 伞状单层辐射式悬挂结构的方程	59

3. 例题	60
三、单层辐射式结构计算理论	
——结构荷载非轴对称情形	68
1. 变位的分析	68
2. 单位中心角内 $V(\theta)$, $Q(r, \theta)$, $D(\theta)$, $H(\theta)$, $R(\theta)$, $X(\theta)$, $Y(\theta)$ 的表达形式	71
3. 内环上承受的垂直合力、水平合力与合力矩的表达形式	74
4. 基本平衡方程	76
5. 内环缩为一点时平衡方程的简化形式	81
6. 求解方法	82
7. 例题	83
四、双层辐射式结构计算理论——轴对称情形	106
1. 结构形式	106
2. 基本方程	107
3. 解法	110
4. 例题	111
五、双层辐射式结构计算理论——非轴对称情形	114
1. 变位分析	114
2. 上下索水平张力、支座反力表示为中心角 θ 的函数	116
3. 平衡方程	120
4. 求解步骤	127
5. 特殊情况	128
6. 例题	130
六、讨 论	148
1. 解法的回顾	148
2. 某些推广	148
3. 两相交圆环辐射式悬挂结构算例	152
4. 内、外环变形对索张力的影响	159
习题二	160
第三章 索网的计算	161
一、薄膜比拟法与正交索网基本方程	161
1. 单索基本方程	161
2. 正交索网基本方程	162
二、索网方程求解方法	165
1. 单索问题解法	165
2. 索网问题解法	167

3. 例题	169
4. 差分方程解法	170
三、平面为矩形的鞍形索网计算	173
1. 矩形平面鞍形索网的假想变位与假想荷载	173
2. 决定单参数的公式	176
3. 采用单参数的算例	178
4. 决定三参数的公式	180
5. 采用三参数时的算例	184
6. 不对称荷载情况	195
7. 不对称荷载例题	199
四、平面为椭圆形的鞍形索网计算	202
1. 变位函数的假定	202
2. 基准态时的应力	204
3. 承受垂直荷载后横索和纵索所受的张力	204
4. 索网假想荷载 $Q(x, y)$ 的推求	206
5. 有关椭圆平面的几个定积分公式	207
6. 用最小二乘方法决定参数 C_0 的数值	209
7. 最小二乘方法例题	212
8. 用力矩法决定参数 C_0 的数值	214
9. 用力矩法决定三参数 C_0 、 C_1 、 C_2 的数值	215
10. 力矩法的例题	223
五、讨 论	226
习题三	227
第四章 悬挂结构振动理论	229
一、单自由度振动理论——摄动方法	229
1. 引 言	229
2. 单自由度自振基本方程	229
3. 非线性振动方程摄动解法	233
4. 例 题	238
二、单自由度振动理论的应用	
——求双层轴对称辐射式悬挂结构的自振形式	241
1. 内环的竖向振动	241
2. 上索中内力的变化	242
3. 上索有荷载的情况	243
4. 下索中内力的变化	243

5. 弹性恢复力及振动方程	244
6. 例 题	246
三、单索与辐射式悬挂结构振动计算精确理论	250
1. 引 言	250
2. 单索与双层辐射式悬挂结构自振基本方程	250
3. 振动方程摄动解法	253
4. 例 题	259
四、索网振动计算	262
1. 索网振动方程	262
2. 近似解法	262
3. 例 题	264
第五章 余能原理在索网应力分析中的应用	265
一、余能理论简介	265
二、单索的余能原理	267
三、索网的余能原理	274
四、索网的近似求解法——余能法	281
1. 求解方案	281
2. 单参数算法——椭圆形平面鞍形索网算例	281
3. 单参数算法——矩形平面鞍形索网算例	287
五、平面为椭圆形的鞍形索网——三参数余能法的推导	293
附录一 Γ 函数与 β 函数	318
1. Γ 函数(伽马函数)	318
2. β 函数(贝塔函数)	319
3. $\iint x^m y^n dS$ 在椭圆面上的积分	320
附录二 有限单元法在索网应力分析中的应用	322
1. 索网问题的线性化	323
2. 矩形有限单元的引入	325
3. 考虑到非线性项的修正解	333
4. 例 题	335
5. 讨 论	342
附录三 一些数学问题的说明	344
附录四 变分计算的基本知识	355
附录五 索网变分原理的普遍化形式	360

第一章 单索计算理论

一、受垂直荷载时单索的平衡方程

1.1 引言

在本章中将研究单索的计算理论。因为将来研究的索网结构是承受垂直荷载的，所以在研究单索时也只考虑承受垂直荷载的情况。

如图 1-1(a)， OA 为一段悬索， O 点为悬索的一个支点， A 点为悬索中间的某个点，在 OA 段上承受着垂直分布荷载 $q(x)$ 。在 O 点处，支座的垂直反力、水平反力和索的张力分别为 R 、 H 和 F_0 。在 A 点处则对应地为 V 、 H 和 F 。

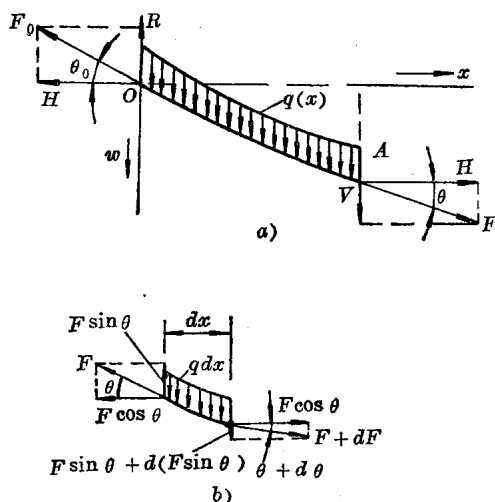


图 1-1 受垂直分布荷载时单索的平衡

2. 平衡方程的推导

图 1-1(b) 表示一水平距离为 dx 的微小索段，索在两端所受的张力 F 和索段所承受的垂直荷载 qdx 分别如图所示。根据静力平衡条件，由 $\Sigma H = 0$ 得

$$\frac{d}{dx}(F \cos \theta) = 0 \quad (1-1a)$$

由 $\Sigma V = 0$ 得

$$\frac{d}{dx}(F \sin \theta) dx + q dx = 0, \quad (1-1b)$$

根据 (1-1a) 式得知 $F \cos \theta = H$ 是一个常数。将 $F = H / \cos \theta$ 代入 (1-1b) 式可得

$$H \frac{d}{dx}(\tan \theta) = -q(x) \quad (1-2)$$

因为 $\tan \theta = \frac{dw}{dx}$ ，代入 (1-2) 式可得

$$H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x) \quad (1-3)$$

(1-3) 式为悬索的基本平衡方程式，以后将广泛应用。

3. 平衡方程的讨论

在 (1-3) 式中，单索的水平分力 H 和索的垂直变位函数 w 都是未知的，仅用 (1-3) 式不能完全求解，必须补充一个表征索张力变化和索长变化之间关系的应力——形变协调条件才可以求得完全的解。关于应力与形变关系的问题，将在下一节详细讨论，本节仅讨论平衡关系 (1-3) 式。这个方程在以后各章中应用很多，本节将较为详细地讨论。

在 (1-3) 式中，假定 H 是已知的，那么 (1-3) 式便成为 w 的二阶常微分方程，根据这个方程和两个支点处的边界条件，可以决定 $w(x)$ 的形式。以下将讨论两个情形：一个是两支点在同一高度上；另一个是两支点在不同高度上。讨论每一种情形时，

都写出相应的支座垂直反力 $R_A(R_B)$ 、索张力 F 以及水平反力 H 的关系。

1) 悬索两支座在相同高度上:

如图 1-2, A 、 B 两支点在相同高度上, 垂直变位的边界条件是: 在 $x=0$ 和 $x=l$ 处, 垂直变位等于零,

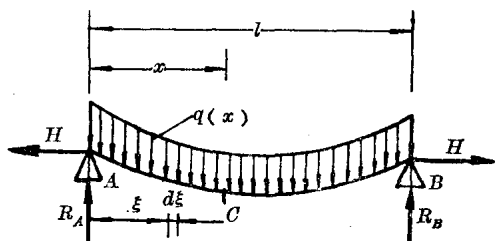


图 1-2 两支点在相同高度的单索

$$\text{即} \quad w(0)=0 \text{ 与 } w(l)=0 \quad (1-4)$$

根据平衡条件 $\sum M_A=0$ 得知

$$\int_0^l xq(x)dx = R_B l$$

$$\text{即} \quad R_B = -\frac{1}{l} \int_0^l qx dx \quad (1-5a)$$

同样根据 $\sum M_B=0$ 可得

$$R_A = -\frac{1}{l} \int_0^l q(l-x)dx \quad (1-5b)$$

可以看出, 悬索两端的垂直反力和简支梁两端的反力是相同的。

$$\text{根据 (1-3) 式, } H \frac{d^2 w}{dx^2} = -q(x)$$

经过积分后可得

$$H \frac{dw}{dx} \Big|_{x=\xi} = - \int_0^{\xi} q(\xi') d\xi' + C_1$$

再积分一次得

$$Hw(x) = - \int_0^x d\xi \int_0^\xi q(\xi') d\xi' + C_1 x + C_2 \quad (1-6)$$

对上式的两重积分可以采用部分积分法

$$\begin{aligned} \int_0^x d\xi \int_0^\xi q(\xi') d\xi' &= \xi \int_0^\xi q(\xi') d\xi' \Big|_0^x - \int_0^x \xi q(\xi) d\xi \\ &= x \int_0^x q(\xi) d\xi - \int_0^x \xi q(\xi) d\xi = \int_0^x q(\xi) (x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

将上式代入 (1-6) 式得

$$Hw(x) = - \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi + C_1 x + C_2 \quad (1-7)$$

根据边界条件, $w(0)=0$, $w(l)=0$, 可将 (1-7) 式写为

$$\left. \begin{aligned} Hw(0) &= C_2 = 0 \\ Hw(l) &= - \int_0^l (l - \xi) q(\xi) d\xi + C_1 l = 0 \\ \text{或} \quad C_1 &= - \frac{1}{l} \int_0^l (l - \xi) q(\xi) d\xi = R_A \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

(1-8) 式中最后一式的最后一步系由 (1-5 b) 式而得, 将从 (1-8) 式求得两个积分常数 C_1 、 C_2 代入 (1-7) 式, 得

$$Hw(x) = R_A x - \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \quad (1-9)$$

上式右方第一项 $R_A x$ 表示由于支点反力 R_A 对坐标为 x 处的 C 点形成的力矩, 第二项 $-\int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi$ 为在 AC 段悬索上垂直分布荷载 $q(x)$ 对 C 点所造成的力矩。这两个力矩的和就是将悬索看作 A 、 B 两端为简支的简支梁时在 C 点的弯矩, 即有

$$M(x) = R_A x - \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi \quad (1-10)$$

将(1-10)式与(1-9)式比较, 可得

$$w(x) = \frac{M(x)}{H} \quad (1-11)$$

在以上两式中, $M(x)$ 为将悬索看做支承于 A 、 B 两点的简支梁时在坐标 x 处的弯曲力矩。

(1-11) 式也是本书用来求垂直变位 $w(x)$ 的基本公式, 和(1-3)式有同样重要的地位。在单索或辐射式悬挂结构情况中, 用(1-11)式较为方便, 而在索网情况, 则用(1-3)式较为方便。

(1-11) 式也可以从简单的静力平衡条件推导出来。推导的方法如下。

如图 1-3, 将 AB 段的悬索作为孤立体, 单独地取出来考虑它的平衡。

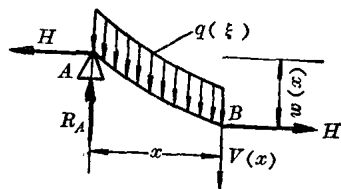


图 1-3 单索的孤立体

由于 $\Sigma M_B = 0$, 可得

$$M = M_1 + M_2 = Hw(x) \quad (1-12)$$

这里 $M_1 = R_A x$, $M_2 = - \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi$ (1-12a)

(1-12) 式所表示的意义是和(1-11)式完全相同的, 这样就可以从考虑平衡关系得到了(1-11)式的证明。

以后可以看到: 对于小挠度悬索, 常常假定悬索的张力 F 是和它的水平分力 H 是近似相等的, 即有

$$F \doteq H \quad (1-13)$$

实际上, 悬索的张力 F 沿着整个索长是变化的, 而它的水平分力 H 是一个常数, F 和 H 之间存在着如下关系 (见图 1-1)

$$H = F \cos \theta \quad (1-14)$$

对于小挠度悬索, $\theta \doteq 0$, $\cos \theta \doteq 1$, 所以 (1-13) 式成立。

为了更好地了解假定 (1-13) 式的近似度, 以便能够正确地

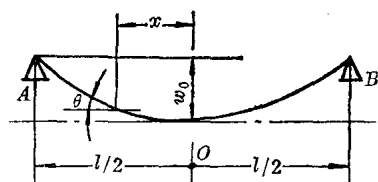


图 1-4 单索的抛物线型垂直变位

掌握 (1-13) 式的适用范围, 现考虑悬索的垂直变位为抛物线的情况 (图 1-4), 取索的中点为原点, 索的曲线方程是

$$w = Kx^2 \quad (1-15)$$

在索中点的最大垂直变位

w_0 是

$$w_0 = K \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} K l^2 \quad (1-16a)$$

$$K = \frac{4w_0}{l^2} \quad (1-16b)$$

在某点 x 处的倾角 θ 如下计算

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{dw}{dx} = 2Kx \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4K^2 x^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

从 (1-17) 可以得知: 当 $x=0$ 处, $\cos \theta = 1$, 在 $x=l/2$ 处 $\cos \theta$ 的数值最小, 为

$$\begin{aligned} \min \{ \cos \theta \} &= \cos \theta \big|_{x=l/2} = \frac{1}{\sqrt{1 + K^2 l^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 16(w_0/l)^2}} \end{aligned} \quad (1-18)$$

在推导 (1-18) 式最后一步时, 采用了 (1-16b) 式的关系。假如知道了索的最大垂直变位和跨度的比值 w_0/l , 便可求出 $H/F = \cos \theta$ 的最大值和最小值, 用以比较 (1-13) 式的近似程度。现将根据 (1-18) 式计算如在各种 w_0/l 数值下所得的 H/F 比值列于表 1-1。

H/F 比值表

表 1-1

最大垂直变位: 跨 度 $w_0:l$	H/F 的最大值 $\max\{\cos\theta\}$	H/F 的最小值 $\min\{\cos\theta\}$ 根据(1-18)式计算	H/F 的平均值
0.05	1	0.98	0.990
0.10	1	0.93	0.965
0.15	1	0.86	0.930
0.20	1	0.78	0.890
0.30	1	0.64	0.820
0.40	1	0.53	0.765

从表 1-1 可以看出, 当 $w_0:l \leq 0.1$ 时, $F \doteq H$ 的近似假定是可以采用的; 当 $w_0:l > 0.15$ 时, 从 H/F 的平均值来看, 其误差要大于 5%, 用起来便有问题了。在实际问题中, $w_0:l$ 的值常常 ≤ 0.05 , 那么 $F \doteq H$ 的近似假定是非常精确的, 可以用来简化计算。

2) 悬索两支座不在相同高度上:

如图 1-5 所示, 悬索两支点 A 、 B 的高度差为 C , 在垂直荷重 $q(x)$ 的作用下, 索的垂直变位是 $w(x)$, 假定索拉力的水平分力 H 是已知的, 那么整个问题便成为静力学问题。

如图 1-5, A 、 B 两支点的垂直反力各为 R_A 和 R_B , 根据平

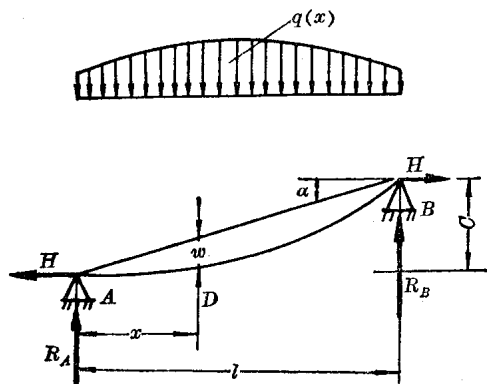


图 1-5 两支点在不同高度的单索

平衡条件 $\Sigma M_A = 0$,

$$\int_0^l xq(x)dx + HC - R_B l = 0$$

可得
$$R_B = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx + \frac{HC}{l} \quad (1-19)$$

令
$$V_B = \frac{1}{l} \int_0^l xq(x)dx \quad \left. \vphantom{\int_0^l xq(x)dx} \right\} \quad (1-20)$$

则
$$R_B = V_B + \frac{HC}{l}$$

在 (1-20) 式中, 从 V_B 的表示形式可以看出, V_B 恰好是将悬索 AB 看做简支梁时在支点 B 处的反力。根据同样方法可以求出悬索在支点 A 处的垂直反力 R_A 为

$$\left. \begin{aligned} R_A &= V_A - \frac{HC}{l} \\ V_A &= \frac{1}{l} \int_0^l q(x)(l-x)dx \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

在上式中, V_A 是将悬索 AB 看做简支梁时在支点 A 处的反力。

假定 H 为已知时, 求垂直变位 $w(x)$ 的形式。将图1-5中水平距离为 x 的一段悬索做孤立体, 考虑它的平衡。将 AD 段的悬索画如图1-6, 根据平衡条件 $\Sigma M_D = 0$, 可以写出

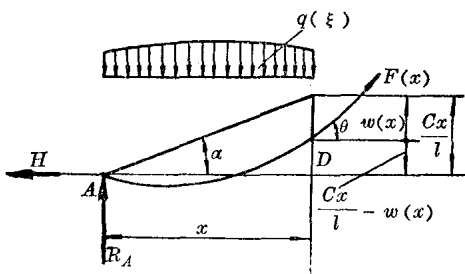


图 1-6 单索的孤立体