本书为高中一年级数学课本的

配套练习。

供教师和学生在教学过程中使用，

也可作青年工人自学数学的参考书。

北京四中数学组　编

# 高中数学单元

# 练习 1

北京师范大学出版社

# 高中数学单元练习

## 第一册

北京四中数学组　编

北京师范大学出版社

# 再版说明

本书自出版以来，深受广大读者欢迎。同时，读者也提出一些宝贵的修改意见。为了使本书更好地为广大读者服务，提高学习效果，我们请作者做了修订。

这次修订保持了初版时的特点：每章配有精选的例题，借以重点演示，加强分析，给读者以启迪。练习题和单元练习题均以加强基本概念、基本技能与技巧为主，而不是搞怪、偏题。同时，这次修订又严格按照课本顺序编排，按年级分为三册，以有利于读者使用。

本书是中学数学教师和学生的较好参考书。本册供高中一年级上、下两学期使用。

**高中数学单元练习**

第一册

北京四中数学组　编

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

国营五二三厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：5.625　字数：118 千

1985 年 9 月第 1 版　1985 年 9 月第 1 次印刷

印数：1—106,000

统一书号：7243·330　定价：0.82 元

# 目　录

## 代数 三角部分

### 初中知识复习



### 第一章　幂函数　指数函数　对数函数



### 第二章　三角函数



### 第三章　两角和与差的三角函数

## 第四章　反三角函数和简单三角方程



# 立体几何部分

## 第一章　直线和平面



## 第二章　多面体和旋转体

## 答 案 或 提 示

### 代数　三角部分



### 立体几何部分

# 代数　三角部分

## 初中知识复习

### 一、数与式

**例 1**　化简：$|x-1|-|x+1|$.

**解：**

$$|x-1|-|x+1|=\begin{cases}2, & (x<-1);\\ -2x, & (-1\leqslant x<1);\\ -2, & (x\geqslant 1).\end{cases}$$

**例 2**　在实数范围内分解因式：

（1）$3x^2-x-1$；

**解法 1**：令 $3x^2-x-1=0$，

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6},$$

$$\therefore\quad 3x^2-x-1=3\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right);$$

**解法 2**：$3x^2-x-1=3\left(x^2-\frac{1}{3}x\right)-1$

$$=3\left(x^2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\right)-1$$

$$=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right]$$

$$=3\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right);$$

（2） $x^6+y^6$;

**解**：$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$$=(x^2+y^2)[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2]$$

$$=(x^2+y^2)(x^2+y^2+\sqrt{3}xy)(x^2+y^2-$$

$$-\sqrt{3}xy);$$

（3） $x^4-3x^2y^2+y^4$;

**解法 1**：$x^4-3x^2y^2+y^4$

$$=(x^2-y^2)^2-(xy)^2$$

$$=(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$$

$$=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}y\right)\times$$

$$\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}y\right);$$

**解法 2**：$x^4-3x^2y^2+y^4$

$$=(x^2+y^2)^2(-\sqrt{5}xy)^2$$

$$=(x^2+\sqrt{5}xy+y^2)(x^2-\sqrt{5}xy+y^2)$$

$$=\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}y\right)\times$$

$$\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}y\right);$$

（4） $x^4+x^2+1$;

**解**：$x^4+x^2+1=(x^4+2x^2+1)-x^2$

$$= (x^2+1)^2 - x^2$$
$$= (x^2+x+1)(x^2-x+1).$$

**例3** 分解因式：

（1）$x^2+3xy+2y^2-6x-7y+5$；

**解法1**：原式 $= (x+y)(x+2y)-6x-7y+5$
$$= (x+2y-5)(x+y-1);$$

**解法2**：原式 $= x^2+(3y-6)x+(2y^2-7y+5)$
$$= x^2+(3y-6)x+(2y-5)(y-1)$$
$$= (x+2y-5)(x+y-1);$$

**解法3**：原式 $= 2y^2+(3x-7)y+(x^2-6x+5)$
$$= 2y^2+(3x-7)y+(x-1)(x-5)$$
$$= (2y+x-5)(y+x-1);$$

**解法4**：原式 $= x^2+(3y-6)x+(2y^2-7y+5)$
$$x = \frac{-3y+6\pm\sqrt{(3y-6)^2-4(2y^2-7y+5)}}{2}$$
$$= \frac{-3y+6\pm(y-4)}{2},$$
$$x_1 = 1-y, \quad x_2 = 5-2y,$$

∴ 原式 $= [x-(1-y)][x-(5-2y)]$
$$= (x+y-1)(x+2y-5);$$

**解法5**：设 $x^2+3xy+2y^2-6x-7y+5$
$$= (x+y+m)(x+2y+n),$$
$$= x^2+3xy+2y^2+(m+n)x+(2m+n)y$$
$$+mn,$$
$$\begin{cases} m+n=-6, \\ 2m+n=-7, \\ mn=5. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=-1, \\ n=-5. \end{cases}$$

$\therefore$ 原式 $=(x+y-1)(x+2y-5)$;

（2）$x^2-15y^2-6z^2+2xy+xz-19yz$;

**解**：原式 $=(x^2+2xy+y^2)+z(x+y)-2(8y^2+10yz+$
$+3z^2)$

$$=(x+y)^2+z(x+y)-2(2y+z)(4y+3z).$$

$$=(x+y-4y-2z)(x+y+4y+3z)$$

$$=(x-3y-2z)(x+5y+3z).$$

**例 4**（1）已知：$\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+z^2-z+\frac{1}{4}=0$，求：$(z+y)^x$的值。

**解**：$\because$ $\frac{1}{2}|x-y|+\sqrt{2y+z}+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=0$，

$$|x-y|\geqslant 0,\ \sqrt{2y+z}\geqslant 0,\ \left(z-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0,$$

$\therefore$ $x-y=0$，$2y+z=0$，$z-\frac{1}{2}=0$。

$\because$ $x=y$，$z=-2y$，$z=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ $x=y=-\frac{1}{4}$，

$\therefore$ $(z+y)^x=\left[\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)\right]^{-\frac{1}{4}}$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}$$

$$=\sqrt{2}.$$

（2）已知：$2\lg(x-2y)=\lg x+\lg y$，求：$\log_2\frac{x}{y}$的值。

解：$\because$ $x-2y>0$，$x>0, y>0$，且 $\lg(x-2y)^2=\lg xy$，

$x^2-4xy+4y^2=xy$，

$x^2-5xy+4y^2=0$，

$x=y$，$x=4y$，

当 $x=y$ 时，$x-2y=y-2y=-y<0$，舍去。

$\therefore$ $x=4y$，

$\therefore$ $\log_2\dfrac{x}{y}=\log_2\dfrac{4y}{y}=\log_2 4=2$。

**例 5** （1）求证：

$$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2.$$

证明：$\because$ 左式 $=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2$

$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(b^2x^2+$

$+2abxy+a^2y^2)$

$=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$，

$\therefore$ $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$；

（3）求证：$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$。

**证法 1**：将右式展开化为左式（略）；

**证法 2**：$\because$ 左式 $=(a^3+b^3)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3abc+c^3$

$=[(a+b)^3+c^3]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]$

$-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc$

$-ac)$。

$\therefore$ $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab$

$-bc-ac)$。

**例6**（1）若 $a$，$b$，$c$，$d$ 为正数，且 $a^4+b^4+c^4+d^4=$
$=4abcd$，　　求证：$a=b=c=d$。

**证明**：∵　$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-d^2)^2+(d^2-a^2)^2$
$=2(a^4+b^4+c^4+d^4)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2)$。
$=2(a^4+b^4+c^4+d^4)-2[(ab-cd)^2+(bc-ad)^2+4abcd]$
$=8abcd-8abcd-2(ab-cd)^2-2(bc-ad)^2$
$=-2(ab-cd)^2-2(bc-ad)^2\leqslant 0$，

且 $(a^2-b^2)^2\geqslant 0$，$(b^2-c^2)^2\geqslant 0$，$(c^2-d^2)^2\geqslant 0$，$(d^2-a^2)^2\geqslant 0$，

∴　$a^2-b^2=0$，$b^2-c^2=0$，$c^2-d^2=0$，$d^2-a^2=0$，

∵　$a$，$b$，$c$，$d$ 为正数，

∴　$a=b=c=d$。

（2）已知：$y+\dfrac{1}{z}=1$，$z+\dfrac{1}{x}=1$，求证：$x+\dfrac{1}{y}=1$。

**证法1**：∵　$y+\dfrac{1}{z}=1$，∴　$y=\dfrac{z-1}{z}$，　　①

∵　$z+\dfrac{1}{x}=1$，∴　当 $z=1$ 时，$\dfrac{1}{x}=0$，满足这个式子的 $x$ 不存在，∴　$z\neq 1$，

∵　$z-1\neq 0$，∴　$x=\dfrac{1}{1-z}$，　　②

将①、②代入求证的左式 $=\dfrac{1}{1-z}+\dfrac{z}{z-1}=\dfrac{z-1}{z-1}=1$，

∴　$x+\dfrac{1}{y}=1$；

**证法 2**：消 $z$：$\begin{cases} y+\dfrac{1}{z}=1, & ① \\ z+\dfrac{1}{x}=1. & ② \end{cases}$

由①得 $z=\dfrac{1}{1-y}$，

由②得 $z=1-\dfrac{1}{x}$，

$$\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x},$$

$$x=(x-1)(1-y),$$

$$-xy-1+y=0,$$

$$xy+1=y,$$

$\because$ $y\neq0$，否则$\dfrac{1}{z}=1, z=1$代入②得$\dfrac{1}{x}=0$，这是不可能的。

$\therefore$ $x+\dfrac{1}{y}=1$。

（3）已知：$x$，$y$，$z$ 互不相等，$x$，$y$，$z$ 都不为零，$x^2+yz=z^2$，$y^2+zx=x^2$，求证：$y^2=xy+z^2$。

**证法 1**：$\because$ $x^2+yz=z^2$， ①

$y^2+zx=x^2$， ②

①＋②：$y^2+yz+zx=z^2$，

$y^2+(xy+yz+zx)=xy+z^2$，

由①得：$yz=(z+x)(z-x)$， ③

由②得：$y^2=x(x-z)$， ④

由③÷④得：$\dfrac{z}{y}=\dfrac{-z-x}{x}$，

$xz=-yz-xy$，即 $xy+yz+xz=0$，

$\therefore\quad y^2=xy+z^2$；

**证法 2**：$\because\quad x^2+yz=z^2$，　①

$y^2+zx=x^2$，　②

由①得：$yz=(x+z)(-x+z)$ 且$x\neq z$，

$\therefore\quad x+z=\dfrac{yz}{z-x}$，　③

$$\because\quad xy+yz+xz=\frac{yz}{z-x}\cdot y+xz$$

$$=\frac{y^2\cdot z}{z-x}+xz\ (\because\quad y^2=x^2-zx)$$

$$=\frac{(x^2-zx)z}{z-x}+xz$$

$$=\frac{(x^2z-z^2x)+xz(z-x)}{z-x}$$

$$=0,$$

由①+②得：$y^2+yz+zx=z^2$，

$y^2+(xy+yz+zx)=z^2+xy$，

$\therefore\quad y^2=xy+z^2$。

## 练　习　一

1. 判断下列命题是否正确，正确的在括号内画"√"，错误的画"×"：

(1) $a^2>0$，则 $a>0$。（　　）；

(2) 一个整数的倒数都小于这个整数。（　　）；

(3) 无限小数是无理数。（　　）；

(4) 对于任意的实数 $a$，$b$，$|a-b|=|b-a|$，

$|-a-b|=|a+b|$.　　( )；

(5) 任意两个正实数的积比这两个实数都大.　　( )；

(6) 若 $a-b<0$，则 $a<b$.　　( )；

(7) 若 $\frac{b}{a}>1$，则 $b>a$.　　( )；

(8) 若在实数范围内，一个数不是正数，则一定是负数.　　( ).

2. (1) 计算：$0.027^{-\frac{1}{3}}+\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}+256^{0.75}-(\sqrt{6}-1)^{0}-0.1^{-2}$；

(2)化简：$|\lg 0.01|+\cos 120^{\circ}+|1-\cos 45^{\circ}|-\sqrt{\lg^{2}\frac{1}{10}-\lg\frac{1}{100}+1}$.

3. 去掉绝对值符号，并使代数式的值不变：

(1) $|x^2+y^2|$；　(2) $|a-b|$；　(3) $-|-a+(-b)|$；

(4) $-|-m|$；　(5) $|ab|$；　(6) $-\left|-\frac{a}{b}\right|$.

4. 化简：

(1) 当 $-1<x<4$ 时，$|x-4|-|x+1|$；

(2) $|x+1|+|2-x|+\left|3x+4\frac{1}{2}\right|$.

5. 在实数范围内分解因式：

(1) $2x^2-2xy-y^2$；　(2) $5x^4-8x^2-4$；

(3) $15x^2-7x-36$；　(4) $x^4-7x^2+9$；

(5) $x^3+6x^2+11x+6$；

(6) $2x^4+x^3+4x^2+x+2$；

(7) $x^2+xy-6y^2+2x+11y-3$；

(8) $bc(b+c)-ac(a-c)-ab(a+b)$;

(9) $x^2(x-1)-y^2(y-1)$;

(10) $x^4+y^4+z^4-14x^2y^2-2y^2z^2-2x^2z^2$。

6．分解因式：

(1) $5a^4b-80b^5$;　　(2) $27x^3-27x^2+9x-1$;

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$;

(4) $(2x^2-3x+1)^2-22x^2+33x-1$;

(5) $(x-1)x(x+1)(x+2)+1$;

(6) $(x^2+4x+3)(x^2+12x+35)+15$;

(7) $(x^2+5x+8)(x^2+8x+8)+2x^2$;

(8) $6x^2-7xy-3y^2+x-7y-2$。

7．计算：$\dfrac{3x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}-\dfrac{3\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$。

8．(1) 已知：$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，求证：$a=b=c$;

(2) 已知：$a+b+c=0$，求证：$a^3+b^3+c^3=3abc$。

9．(1) 已知：$x=by+cz$，$y=cz+ax$，$z=ax+by$，

求证：$\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{b}{1+b}+\dfrac{c}{1+c}=1$;

(2) 已知：$x+y+z=0$，

求证：$\left(\dfrac{y-z}{x}+\dfrac{z-x}{y}+\dfrac{x-y}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y-z}+\dfrac{y}{z-x}+\dfrac{z}{x-y}\right)=9$。

10．(1) 已知：$\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$，

求证：$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$;

(2) 已知：$\dfrac{x}{(b-c)yz}=\dfrac{y}{(c-a)zx}=\dfrac{z}{(a-b)xy}$，

求证：$x^2+y^2+z^2=0$。

**11.** 无论 $x$ 为何实数，$\dfrac{ax^3-5x^2+bx+c}{2x^3-10x^2+3x-4}$ 的值为一常数，求：$a$，$b$，$c$ 的值，并求此式的值。

## 二、方程　不等式

**例 1**　解关于 $x$ 的方程 $ax-b=0$。

**解：**　$ax=b$

当 $a=b=0$ 时，$0x=0$，方程的解为全体实数；

当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，$0x=b$，方程无解；

当 $a\neq 0$时，方程有唯一解$x=\dfrac{b}{a}$。

**例2**　解关于 $x$ 的方程：$m^2(x-1)=x-(m+2)$，并指出当 $m$ 为怎样的实数时，方程有唯一的负数解。

**解：**

$$m^2x-m^2=x-m-2,$$
$$(m^2-1)x=m^2-m-2,$$
$$(m+1)(m-1)x=(m-2)(m+1),$$

当 $m=-1$ 时，$0x=0$，方程的解为全体实数；

当 $m=1$ 时，$0x=-1$，方程无解；

当 $m\neq\pm 1$ 时，方程有唯一的解，$x=\dfrac{m-2}{m-1}$。

∵　$x=\dfrac{m-2}{m-1}<0$，即 $(m-1)(m-2)<0$，

∴　当 $1<m<2$ 时，方程有唯一的负数解。

**例 3**　解关于 $x$ 的方程：