张雄 刘岩 著
Zhang Xiong Liu Yan

无网格法

Meshless Methods

清华大学出版社 Springer

张雄　刘岩　著
Zhang Xiong　Liu Yan

无网格法

Meshless Methods

清华大学出版社
北京
Springer

内 容 简 介

本书以紧支试函数加权残量法为主线，系统地论述了目前现有的各种无网格方法的基本原理以及它们之间的区别与联系，建立了一些新型有效的无网格方法，如最小二乘配点无网格法、加权最小二乘无网格法、伽辽金最小二乘无网格法和伽辽金配点无网格法等。书中给出了作者用 C ++ 研制的面向对象的无网格法程序 OMLL，各章也都给出了相应的 MATLAB 程序，以帮助读者理解各种无网格方法的程序实现过程。

本书可供航空航天、力学、机械、土木及水利工程等方面的科学技术人员以及相关专业的高年级大学生、研究生和教师参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

无网格法/张雄，刘岩著. —北京：清华大学出版社，2004.8
ISBN 7-302-08467-X

Ⅰ. 无…　Ⅱ. ①张…②刘…　Ⅲ. 计算力学　Ⅳ. O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 032891 号

出 版 者：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　**客户服务**：010-62776969

责任编辑：杨　倩

印 装 者：三河市春园印刷有限公司

发 行 者：新华书店总店北京发行所

开　　本：153×235　**印张**：17　**插页**：1　**字数**：294 千字

版　　次：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 11 月第2 次印刷

书　　号：ISBN 7-302-08467-X/O・356

印　　数：1001～2000

定　　价：56.00 元

作者简介

张雄，1992年于大连理工大学工程力学研究所获计算力学专业工学博士学位，现为清华大学航天航空学院教授。兼任《计算力学学报》编委，International Journal of Computational Methods 编委，北京航空航天学会理事，国际计算力学协会会员。曾先后赴加拿大维多利亚大学、英国曼彻斯特大学、香港大学、美国加州大学洛杉矶分校、奥地利维也纳技术大学从事合作研究或参加学术会议。研究领域为计算动力学、航天结构及柔性多体系统动力学、高速碰撞动力学等。已发表论文70余篇，其中SCI收录10余篇，SCI他人引用30余次。

Abstract

The book addresses the fundamentals of various kinds of meshless methods and their differences and connections systematically from the weighted residual method with compactly supported functions point of view. Meanwhile, several new efficient meshless methods, such as the least square collocation method, meshless weighted least square method, Galerkin least square method and Galerkin collocation method, are developed. Many achievements described in the book are accomplished by the authors under the support of the National Natural Science Fund of China. The Object-oriented Meshless program OMLL developed in C ++ by the authors is discussed in the book, which can be downloaded from our website http://www. dynamics. tsinghua. edu. cn/xzhang/OMLL. Furthermore, MATLAB codes are given in each chapter to assist readers to comprehend the programming techniques for various meshless methods.

前　言

近几十年来有限元法取得了巨大的发展，成为工程数值分析的有力工具，解决了一大批有重大意义的科学和工程问题。然而，有限元法在分析高速撞击、金属加工成形、动态裂纹扩展、流固耦合和应变局部化等涉及特大变形的问题时也遇到了因网格畸变而产生的许多困难。

与有限元法相比，无网格法的近似函数不依赖于网格，因此在分析涉及特大变形的问题中具有很大的优势。近十年来无网格法的研究受到了高度重视，成为国际计算力学界的研究热点之一。在国家自然科学基金的资助下，国内许多单位也都对无网格法展开了研究。

目前无网格法的研究仍然处于起步阶段。国际上已提出了十余种无网格方法，研究论文主要散见于各类杂志、会议论文集中。目前国际上只出版了两本有关无网格法的专著，其中美国加州大学 SN Atluri 教授于 2002 年出版了专著 The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method，系统地介绍了其提出的无网格局部彼得罗夫伽辽金法。新加坡国立大学刘桂荣博士也于 2002 年出版了 Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method 一书。

本书以作者所在课题组在国家自然科学基金资助下取得的研究成果为基础，以紧支试函数加权残量法为主线，系统地论述了目前现有的各种无网格方法的基本原理以及它们之间的区别与联系，在此基础上建立了一些新型有效的无网格方法，如最小二乘配点无网格法、加权最小二乘无网格法、伽辽金最小二乘无网格法、伽辽金配点无网格法等。

本书共分为 8 章。第 1 章简要论述无网格法的发展过程与现状，并对无网格法进行了分类；第 2 章论述了紧支试函数加权残量法的基本原理，并将其作为本书论述各种无网格法的主线；同时论述了目前无网格法中所采用的各种紧支近似函数，包括移动最小二乘近似、核函数近似和重构核近似、单位分解近似和 hp 云团、径向基函数和点插值法等；第 3 章论述了伽辽金型无网格法，如无单元伽辽金法(EFG)、重构核粒子法(RKPM)、hp 云团

法、单位分解法等的基本原理、各种积分方案、本质边界条件的处理方法、无网格块体-夹层模型以及有限元和无单元伽辽金法的耦合问题；第4章论述配点型无网格法，如有限点法(FPM)、最小二乘配点无网格法、伽辽金配点无网格法、Hermite配点法、光滑质点流体动力学法(SPH)、径向基函数无网格法、双重网格配点法等；第5章简要地论述了基于局部弱形式和边界积分方程的无网格法，如无网格局部彼得罗夫伽辽金法(MLPG)、局部边界积分方程法(LBIE)、边界节点法(BNM)、杂交边界点法(HBNM)、边界粒子法(BPM)等；第6章论述最小二乘型无网格法和伽辽金最小二乘无网格法；第7章论述面向对象的无网格法程序设计方法，并给出了作者所在课题组用C++研制的面向对象的无网格法程序OMLL(可从http://www.dynamics.tsinghua.edu.cn/xzhang/OMLL处下载)；第8章简要地论述了无网格法的应用情况。另外各章都给出了相应的MATLAB程序，以帮助读者理解各种无网格方法的程序实现过程。

本书在编写过程中，得到了清华大学陆明万教授的热情支持。大连理工大学钟万勰院士和北京大学袁明武教授对本书的出版给予了重要的支持。本课题组的博士生宋康祖、潘小飞、邢向华，硕士生陶三明、刘小虎、黄建明、苗红宇、胡炜等也为本书作了有益的贡献。作者对他们表示衷心的感谢。

我们在无网格法方面的研究工作先后三次受国家自然科学基金的资助(59509002:高边坡稳定性分析方法；19772024:紧支函数加权残量法的研究及其应用；10172052:高速碰撞问题的新型高效三维无网格法的研究)，在此表示衷心的感谢。

刘岩负责第3章第5节、第5章和第8章的编写，张雄负责其余部分以及全书的统稿工作。由于水平限制，书中难免有许多不足和不当之处，热切希望读者和同行专家批评指正。

作　者

2003年11月于清华园

目　　录

Contents

第1章 绪论

近几十年来，有限元法已成为计算力学中解决工程问题的主要数值计算方法。在用拉格朗日法求解金属冲压成形、高速撞击、裂纹动态扩展、流固耦合、局部化等涉及特大变形的问题时，有限元网格可能会产生严重扭曲，不仅需要网格重构，而且严重地影响解的精度；对高速冲击等动态问题，显式时间积分的步长取决于有限元网格的最小尺寸，因而网格的扭曲将使时间积分步长过小，大幅度地增加了计算工作量；对裂纹的动态扩展问题，由于裂纹的扩展方向不能事先确定，因而在计算过程中需要不断地重新划分网格以模拟裂纹的动态扩展过程；有限元近似基于网格，因此必然难于处理与原始网格线不一致的不连续性和大变形；复杂三维结构的有限元网格生成也是极具挑战性的问题。鉴于有限元的这些缺陷，近几年来国际上许多著名的计算力学学者，如T. Belytschko, W. K. Liu, S. N. Atluri, J.T. Oden, K. J. Bathe, O. C. Zienkiewicz等[1]-[3]都对无网格方法进行了大量的研究工作。无网格方法采用基于点的近似，可以彻底或部分地消除网格，不需要网格的初始划分和重构，不仅可以保证计算的精度，而且可以减小计算的难度。

对无网格法的研究可以追溯到20世纪70年代对非规则网格有限差分法的研究[4]-[6]，由于当时有限元法的巨大成功，这类方法没有受到重视。1977年Lucyt和Gingold等[7, 8]分别提出了光滑质点流体动力学(smoothed particle hydrodynamics，SPH)方法，并且成功地应用于天体物理领域中[9]。Johnson等[10]提出了归一化光滑函数算法，使其通过分片试验，可以正确模拟常应变状态，提高了SPH法的精度；Swegle，Dyka和Chen等[11]-[13]提出了SPH方法不稳定的起因及稳定化方案；Vignjevic等[14]提出了克服零能模态的具体方案；Monaghan[15]-[17]对SPH法进行了总结；SPH法已被应用于冲击波模

拟[18]、流体动力学[19, 20]、水下爆炸仿真模拟[21]、高速碰撞等材料动态响应的数值模拟[10]-[25] 等领域。近几年来，我国的学者也开始关注SPH法，张锁春[27]对 SPH 方法进行了综述， 贝新源等[28]将SPH方法用于高速碰撞问题。

Nayroles等[29]于1992年将移动最小二乘近似(moving least square，MLS)引入Galerkin法中， 提出了漫射元法 (diffuse element method，DEM) [30]。Belytschko等[31]对DEM进行了两点改进，在计算形函数导数时保留了被Nayroles忽略的所有项，并利用拉格朗日乘子法引入本质边界条件，提出了无单元Galerkin法(the element-free glerkin method，EFG)，掀起了无网格法的研究热潮。这类方法比SPH方法计算费用高，但具有较好的稳定性。Belytschkohe等[32] 给出了EFG的误差估计，对EFG法中的数值积分方案以及近似函数的计算方法进行了深入研究[33]-[35]，并将EFG方法用于动态裂纹扩展的数值模拟[38]-[46]，克服了有限元方法在模拟裂纹扩展时需要不断进行网格重新划分的缺点；用MLS可以较容易地构造具有C^1连续性的函数，因此Krysl等[47]将EFG用于板壳分析中；Liu等[48]将EFG和边界元法相耦合，用于固体的应力分析；Belytschko和Hegen等[49, 50]，将EFG方法和有限元方法耦合以发挥各自的优势；Belytschko和Du等[51]-[53]将EFG用于三维撞击和流体晃动分析；Cordes等[54]将EFG方法用于相变问题的研究；张雄等[55]将EFG法的思想应用于节理岩体的分析中；为了避免使用背景网格，Beissel等[56]提出了节点积分方案，但计算稳定性较差；Smolinski等[179]给出了EFG法显式时间积分方案并用于求解扩散问题；周维垣等[57, 58]对EFG进行了详细介绍，并应用于拱坝开裂分析中；张伟星等[59]将EFG法应用于地基板的应力分析中；庞作会等[60, 61]也对EFG法进行了介绍，并将其应用于边坡开挖问题中；陈建等[62]采用EFG法计算含边沿裂纹功能梯度材料板的应力强度因子。研究表明，EFG法精度和收敛速度都高于有限元法，而且没有体积锁死现象，但EFG法计算量大，并且需要借助于背景网格进行数值积分。

Onate等[63]-[67]利用移动最小二乘法来构造近似函数，并采用配点格式进行离散，提出了有限点法(the finite point method，FPM) 。该方法不需要背景网格，效率高，主要应用于流体动力学领域。宋康祖等将其应用于弹塑性分析中[68]。

Liu等[69, 70]根据函数积分变换的思想，基于Galerkin法提出了重构核质点法(reproducing kernel particle method，RKPM),并结合小波(wavelets)的

概念，构造了多尺度重构核质点法(multi scale reproducing kernel particle method，MRKPM)[71]-[73]。MRKPM利用小波函数的多尺度分析思想，构造了一系列可同时伸缩和平移的窗函数，实现了RKPM的自适应分析。RKPM法已在大量问题的数值分析中得到了应用，如声学分析[74]、结构动力学[75]、流体动力学[76]-[79]、动态断裂和局部化[80, 81]、应力集中[82]、大变形[83]-[88]、金属加工成形[89, 90]、中厚梁板[91]和微机电系统[92]等。Chen[94]等人提出了应变光滑稳定方法，以消除Galerkin弱形式节点积分的不稳定性。Ohs[95]用重构核函数近似和配点法，提出了无网格配点法(meshless point collocation method，PCM)，并用于分析压电元件[96]。

Duarte和Oden等[97]-[99]利用移动最小二乘法建立单位分解（partition of unity）函数，由此构造权函数和试函数，再通过Galerkin法建立离散格式，提出了hp云(Clouds)法，并对这种方法进行了严格的数学论证。Mendoncça等[100]将该方法用于求解铁摩辛柯梁问题，Garcia等[101]将其用于求解厚板的弯曲问题，刘欣等[102]将其用于平面裂纹问题的自适应分析。Oden等[103]又将有限元形函数作为单位分解函数，提出了基于云法的新型hp有限元(new clouds-based hp FEM)。该方法需要借助于有限元网格，破坏了“无网格”的部分特性，但能很容易进行h、p和hp自适应分析。Liszka等[104]改用配点格式，避免了Galerkin格式中用于积分计算的背景网格，提出了hp无网格云团法(hp meshless clouds method)。

Babuska和Melenk等[105, 106]将单位分解法与有限元法相结合，提出了单位分解有限元法（partition of unity finite element method，PUFEM）和广义有限元法[107, 108]（generalized finite element method，GFEM）方法。该方法在标准有限元空间中加入一系列能够反映待求边值问题特性的函数（如由角点附近精确解的局部渐进展开而得到的奇异函数），并将这些特殊函数与单位分解函数相乘后和原有的有限元形函数一起构成了新的增广协调有限元空间。用该方法求解动态裂纹扩展问题时，可以处理任意裂纹形状，并且不需要重新划分网格[109, 110]。刘欣等[111]将单位分解法用于求解奇异问题。

Atluri等提出了局部边界积分方程法(loacl boundary integral equation method，LBIE) [112]-[114]和无网格局部Petrov-Galerkin法(meshless local Petrov-Galerkin method，MLPG)[115]-[118]。这两种方法都是用移动最小二乘法建立场函数的近似，用局部Petrov-Galerkin法建立无网格格式，积分时不需要背景网格。LBIE可以看成是MLPG的一种特殊情况，但需要进行奇

异积分计算。Liu等[119]将MLPG和有限元及边界元相耦合，充分发挥它们各自的优势。张见明等[120, 121]将用于杂交边界元的修正变分原理与移动最小二乘近似结合，提出了杂交边界点法，其输入数据只是求解域边界上的离散点。

径向基函数(radial basis functions,RBF)具有形式简单、各向同性等优点，数学界对其进行了大量的研究[123]-[147]，成功地应用于多变量插值中。Frank[122]比较了29种离散数据插值方法，发现Hardy提出的MQ函数[126]和Duchon提出的TPS函数的插值精度最高。这两类函数是常用的径向基函数。Kansa[130, 131] 将径向基函数引入配点法中，用以求解双曲、椭圆和抛物型问题。Kansa和Sharan[132]等人都发现MQ函数具有指数收敛性，而且计算效率极高。在Kansa的配点法中，系数矩阵是非对称的。Fasshauer[133]采用Hermite型方法，得到的系数矩阵在某些特殊的偏微分方程中是对称或反对称的。Wendland[134]将径向基函数引入Galerkin法中，建立了相应的无网格格式。Coleman[135]用径向基函数求解椭圆型边值问题。吴宗敏等[136, 137]和Franke等[138]证明了用径向基函数进行离散数据插值和求解偏微分方程的收敛性，并给出了误差估计。陈文[139, 140]采用径向基函数提出了边界点法，只需对求解域的边界用节点进行离散，而不需要离散求解域。Hon等人[141]采用径向基函数求解两相流问题。

将径向基函数引入配点法以求解偏微分方程具有许多优点，例如该方法是真正的无网格法，不需要任何网格；该方法与空间维数无关，其收敛率为$O(h^{d+1})$，其中h为配点密度，d为空间维数。然而径向基函数一般是定义在全求解域的，且得到的系数矩阵的条件数很大。目前已提出了多种方法解决这一问题，如采用区域分解法[142]、优化调整MQ函数的形状参数[143, 144]以及采用紧支径向基函数[145]-[147]。吴宗敏[145]给出了正定紧支径向基函数的构造法则，并构造了一系列正定紧支径向基函数；Buhmann[146]给出了基于TPS函数的正定紧支径向基函数；Wendland[147]给出的正定紧支径向基函数与吴宗敏的相似，但它们具有最少的自由度。张雄等[148, 149]将紧支距离函数应用于配点法中，建立了相应的无网格方法，用于求解固体力学问题。虽然紧支距离函数具有许多优势，但它们不能满足完备性条件，甚至不能正确描述常应变状态。宋康祖等[150]提出了满足完备性条件的紧支距离函数，并建立了相应的配点型无网格格式，大幅度提高了计算精度，但也增加了计算量。

基于Galerkin法的无网格法精度高，但它需要进行数值积分，不但计算