数学二考研题典丛书

数学二

考研题集

李大卫　刘国志　滕　勇　主编

NEUPRESS
东北大学出版社

数学二

考研题集

数学二考研题集

主　编　李大卫　刘国志　滕　勇
副主编　丁　韫　王晓慧
王学理　马　毅

东北大学出版社
·沈　阳·

图书在版编目（CIP）数据

数学二考研题集 / 李大卫，刘国志，滕勇主编 .— 沈阳 ：东北大学出版社，2004.3
ISBN 7-81054-869-7

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①李… ②刘… ③滕… Ⅲ. 数学—研究生—入学考试—试题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 090315 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部） 83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部） 83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市政二公司印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：140mm×203mm
印 张：10.125
字 数：263 千字
出版时间：2004 年 3 月第 1 版
印刷时间：2004 年 3 月第 1 次印刷
责任编辑：刘 莹 刘宗玉 责任校对：李 岩
封面设计：唐敏智 责任出版：杨华宁

定 价：12.00 元

前　　言

考研科目中“数学”以满分150分记入总成绩，在总分中的比重高达30%，“数学”科目的重要性由此可见一斑．正是出于这方面的考虑，加之数学本身概念抽象、计算繁复，我们从强化训练、提高应试能力出发，以帮助考生取得理想成绩为目的，编写出这套《数学考研题典丛书》．丛书分两个系列共六册，具体为：

数学一系列
- **高等数学考研题典**
- **线性代数考研题典**
- **概率论与数理统计考研题典**
- **数学一考研题集**

数学二系列
- **数学二考研题典**
- ⊙ **数学二考研题集**

题典（四本）分别以“数学一”、“数学二”试题为主要内容，题集（两本）有“数学一”、“数学二”试卷各24套，六本书都有全部试题的详解．之所以如此安排，是考虑积蓄力量多年的考生，他们在基础知识、解题方法基本掌握的基础上，还必须做一定数量的典型题，才能达到质的飞跃，向上提高一个层次．

本书为《数学二考研题集》．

若干年来，“数学二”成绩一直不太理想，加之总分由100分提高到150分，对考生提出了更高、更严的要求．针对这种情况，我们这些多年工作在数学教学第一线并从事考研辅导的教师进行了深入细致的分析，发现考生的基础知识比较扎实，但重点、难点把

握不准，因而实际应用能力差；相当部分的学生会解题但不熟练，尤其是方法不得当，题做对了但耗时较多，时间分配不合理，应得到分数得不到，总体体现为应试能力差；高等数学、线性代数两门课不平衡，个别考生偏科严重，最终结果是总成绩不理想.

综上所述，我们认为：对于学完数学课程，并进行了系统的考研复习、训练的考生来说，进入“实战演练”状态是十分必要的.这时候，能有一本模拟试题与真题各半的数学考研题集供考生演练，对考生的整体应试能力定是受益匪浅，这也是发现不足并及时调整、最终提高考试成绩最有效的途径.但对于这一套套模拟试题来说，如何能使其起到检验、提高之目的，并非易事.我们在总结多年数学教学、考研数学辅导经验的基础上，针对考生普遍存在的问题，精心编写出这本题集，旨在把最好的考研辅导书奉献给全国的考生，相信它一定能助广大考生一臂之力.

本书分为两部分，即模拟试题部分和真题部分，共有“数学二”模拟试题16套，“数学二”真题8套.模拟试题是严格按“全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”，并结合作者多年数学考研辅导及阅卷体会精心编写而成；真题部分为近10年来数学的考研试题.通过模拟试题与真题实际演练，一能增强考生对考试的总体了解，二能从中发现不足以调整方向，最终达到提高应试能力的目的.本书的特色之一是所有试题均给出详细解答，一部分给出解题思路和方法，指出易犯的错误并剖析原因.还向读者介绍了许多方便快捷的解题方法，有的还给出多种解法，这些方法是作者多年教学经验的总结，它会大大增进读者对数学的理解并有助于应试水平的提高.

建议考生最好能在考试前的冲刺阶段完成这24套题的演练；若确实没有时间，亦应做10套模拟试题、4套近年的真题.我们相信这一套套精心编写的模拟题以及真题，对考生整体水平的提高确有帮助，抽出一部分时间认真去做，一定会有事半功倍之效果.

本书主编为李大卫、刘国志、滕勇，副主编为丁韫、王晓慧、

王学理、马毅，参加编写的还有李建华、胡忠盛、李关民、张萍.

本书是作者们从事几十年数学教学、研究心血的结晶，今天把它奉献给立志考研的学子们，希望它能成为你们打开成功之门的一把“金钥匙”.

编　者

2004 年 1 月

第一部分　考研模拟试题

第一套

一、填空题　（4×6=24 分）

1. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\quad g(x)=e^x,$$

则 $f[g(x)]$的间断点是 $x=$______.

2. 当 $x\to 0$ 时，$e^{x\cos x^2}-e^x$ 是 x^n 的同阶无穷小，则 $n=$______.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx=$______.

4. 满足 $f(x)+2\int_0^x f(x)dx=x^2$ 的解 $f(x)=$______.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，则 x，y 满足的条件是______.

6. 向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,2,3,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,0,4,6,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,3,-2,-3,-1)$的线性关系为______.

二、选择题　（4×6=24 分）

1. 设周期为 4 的周期函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，又

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$在点$(5, f(5))$处的切线斜率为 $k=$【　　】.

(A) $\dfrac{1}{2}$；　(B) 0；　(C) -1；　(D) -2.

2. 设 $f(-x)=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$，在$(-\infty, 0)$内，$f'(x)>0$，且$f''(x)<0$，则在$(0, +\infty)$内，有【　　】.

(A) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$；　　(B) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$；

(C) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$；　　(D) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$.

3. 方程 $15x^4-20x^3+6x^2-12x+12=0$ 在区间$(-\infty, +\infty)$内【　　】.

(A) 没有根；　　(B) 仅有一个根；

(C) 共有二个根；　　(D) 共有三个根.

4. $\int |x| \mathrm{d}x=$【　　】.

(A) $\dfrac{x^2}{2}+C$；　　(B) $\dfrac{1}{2}x|x|+C$；

(C) $-\dfrac{x^2}{2}+C$；　　(D) $\dfrac{1}{2}|x|^2+C$.

5. 设 $f(x)$为可导函数，且 $f'(0)=1$. 对任意 x，y，恒有 $f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$，则 $f(x)=$【　　】.

(A) e^x；　(B) $x\mathrm{e}^x$；　(C) $(1-x)\mathrm{e}^x$；　(D) $(1+x)\mathrm{e}^x$.

6. 设线性方程组$\begin{cases}6x-ay & =-2ab\\ -2cy+3bz=bc & \\ cx \quad +az & =0\end{cases}$ 则【　　】.

(A) 当 a，b，c 取任意实数时，方程组均有解；

(B) 当 $a=0$ 时，方程组无解；

(C) 当 $b=0$ 时，方程组无解；

(D) 当 $c=0$ 时，方程组无解.

三、(10 分) 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{2x}+b, & x\leqslant 0, \\ \sin ax, & x>0, \end{cases}$$

当 a，b 为何值时，$f(x)$在$x=0$处可导？此时，若另有 $F(x)$在 $x=0$ 处可导，$F[f(x)]$在 $x=0$ 处是否可导？

四、(12 分) 设 $f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$，求 $f'(x)$.

五、(10 分) 讨论方程 $x\mathrm{e}^{-x}=a$ $(a>0)$的实根情况.

六、(9 分) 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，g 具有二阶连续导数，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

七、(12 分) 如图 1.1 所示，由宽为 am 的河引出一条宽为 bm 的运河，二条河成直角相交. 问能驶进这条运河的船的最大长度是多少？

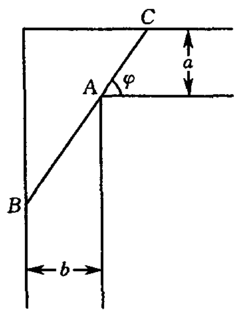

图 1.1

八、(10 分) 设某立体垂直于 x 轴，横截面的面积 $S(x)=Ax^2+Bx+C$ $(a\leqslant x\leqslant b)$，其中 A，B，C 为常数，证明该立体的体积为

$$V=\frac{H}{6}\left[S(a)+4S\left(\frac{a+b}{2}\right)+S(b)\right],$$

其中，$H=b-a$.

九、(12 分) 设有曲线连结点 $A(0,1)$与点 $B(1,0)$，它位于弦$\overline{AB}$的上方. 对曲线弧$\overset{\frown}{AB}$上任一点 P，曲线弧$\overset{\frown}{AP}$与弦$\overline{AP}$之间面积为x^3，x 为点P 的横坐标，求此曲线方程.

十、(9 分) 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=-1$，试证

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x)\geqslant 8.$$

十一、(10 分) 已知实对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{bmatrix}.$$

1. 试求满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵（且 $\boldsymbol{P}^{-1}\neq\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$）；

2. 试求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵.

十二、（8 分）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵，$|\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{B}|$，求证 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=0$.

第二套

一、填空题 （4×6=24 分）

1. 设 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{k+x}=$______.

2. 方程 $x^3-3x^2-9x+1=0$ 共有______个实根.

3. 设 $f(x)$连续，且 $\int_0^{x^2-1}f(t)\mathrm{d}t=1+x^3$，则 $f(8)=$______.

4. 设 $f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b>0$，$a>0$，$y(x)$是微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay=f(x)$的通解，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=$______.

5. 已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值为 1，1，2，对应的特征向量为 $\boldsymbol{P}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{P}_3=(2,0,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}=$______.

6. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=$______.

二、选择题 （4×6=24 分）

1. 下列运算中，正确者为【　　】.

(A) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2\sin x)^{\frac{1}{\tan x}}=e^2$； (B) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$；

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{x\ln(1+x)}=2$； (D) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2(e^x-1)}{x}=2$.

2. 设函数 $f(x)$对任意 x 均满足关系式$f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a，b 为非零常数，则【　　】.

(A) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$；

(B) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$；

(C) $f(x)$在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$；

(D) $f(x)$在 $x=1$ 处不可导.

3. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是 $g(x)$的【　　】.

(A) 低阶无穷小； (B) 高阶无穷小；

(C) 等价无穷小； (D) 同阶非等价无穷小.

4. 设 $f(x)$是以 l 为周期的连续函数，则其原函数【　　】.

(A) 是以 l 为周期的周期函数；

(B) 不是周期函数；

(C) 是以$\frac{l}{2}$为周期的周期函数；

(D) 不一定是周期函数.

5. 设 $y=f(x)$是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的解，且 $f(x_0)>0$，$f'(x_0)=0$，则必有 $f(x)$【　　】.

(A) 在点 x_0 取极小值；

(B) 在点 x_0 取极大值；

(C) 在点 x_0 的某邻域内单调增加；

(D) 在点 x_0 的某邻域内单调减少.

6. 以下各结论中，正确的是【　　】.

(A) 若方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式$|\mathbf{A}|=0$，则 $\mathbf{A}=0$；

(B) 若 $\mathbf{A}^2=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$；

(C) 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}^2$ 也是对称矩阵；

(D) 对任意的同阶方阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

三、(10 分) 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$.

四、(9 分) 设 $f(x)$在区间$[0,\ 1]$上连续，并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$，求$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

五、(9 分) 求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解，其中常数 $a>0$.

六、(10 分) 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\cos 2x-\cos 3x)}{x^2}, & x<0\\ 4, & x=0\\ \dfrac{b\sin x+\int_0^x\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求 a，b 的值. 此时，$f'(0)$是否存在？

七、(14 分) 计算下列各题

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$；

2. 求$\int_2^4\frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(3+x)}}\mathrm{d}x$.

八、(12 分) 设 $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$.

1. 求函数的增减区间及极值；
2. 求函数的凹凸区间及拐点；
3. 求渐近线.

九、(10 分) 半径为$\sqrt{5}$的圆与 x 轴相切，它沿 x 轴滚向抛物线 $y=x^2+\sqrt{5}$. 它在何处与抛物线相切？这时圆心的坐标是什么？

十、(10 分) 设 $f'(x)$在$[0, a]$上连续，且 $f(0)=0$，试证：

$$\left|\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{Ma^2}{2},$$

其中 $M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f'(x)|$.

十一、(10 分) 设有三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足$|4\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=3\boldsymbol{E}$，$|\boldsymbol{A}|>0$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为四阶单位矩阵，求 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征值.

十二、(8 分) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一向量组的极大线性无关组，而 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 也是该向量组的极大线性无关组.

第三套

一、填空题 （4×6=24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[\sin(\sin x)]}{\tan x}=$______.

2. 设 $f(x)$二阶连续可导，则

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right]=\underline{\qquad}.$$

3. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\mathrm{d}t$，则 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x=$______.

4. 以 $y_1=\mathrm{e}^x$，$y_2=\mathrm{e}^{2x}\cos x$ 为特解的最低阶的常系数线性齐次微分方程是______.

5. 已知五阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，0，2，3，5. 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^3+2\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}$，则$|\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}|=$______.

6. 设 α，β，γ 为不相等的实数，则 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ \alpha & \beta & \gamma\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3\end{vmatrix}=0$ 的充要条

件是______.

二、选择题 （$4\times6=24$ 分）

1. 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$，其中 $y_1=x_2$，$y_2=x_4$，…，$y_n=x_{2n}$，…．设 a 为常数，则必有【　　】.

(A) 当$\{x_n\}$发散时，$\{y_n\}$发散；

(B) 当$\{y_n\}$收敛时，$\{x_n\}$收敛；

(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$；

(D) 当$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上二阶可导，且 $f(a)=A>0$，$f'(a)<0$，$f''(x)<0$ $(x>a)$，则方程 $f(x)=0$ 在$(a,+\infty)$内【　　】.

(A) 恰有一个实根；　　(B) 恰有二个实根；

(C) 没有实根；　　(D) 有三个实根.

3. 下列各广义积分中，收敛的是【　　】.

(A) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$；　　(B) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$；

(C) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$；　　(D) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，则必有 $F(x)=$【　　】.

(A) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$　　(B) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$

(C) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2;\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

5. 微分方程 $y''+3y'+2y=3xe^{-x}$的特解形式为【　　】.

(A) $y^*=Ae^{-x}$；　　(B) $y^*=Axe^{-x}$；

(C) $y^* = x(Ax+B)e^{-x}$； (D) $y^* = (Ax+B)e^{-x}$.

6. 设 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \cdots, 0, \frac{1}{2}\right)$. 矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ =【 】.

(A) $\mathbf{0}$； (B) $-\boldsymbol{E}$； (C) $\boldsymbol{E}$； (D) $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

三、(10 分) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos^2 t\,\mathrm{d}t, & x > 0, \end{cases}$$

试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.

四、(9 分) 求函数 $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ 的最大值和最小值.

五、(9 分) 设 $y = e^x$ 是微分方程 $xy' + P(x)y = x$ 的一个解, 求此微分方程满足条件 $y|_{x=\ln 2} = 0$ 的特解.

六、(12 分) 设曲线 L 的方程为 $y = f(x)$, 且 $y'' > 0$. 又 MT, MP 分别为该曲线在点 $M(x_0, y_0)$处的切线和法线, 已知线段 MP 的长度为 $\dfrac{(1+y_0'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''_0}$ (其中 $y'_0 = y'(x_0)$, $y''_0 = y''(x_0)$), 试推导出点 $P(\xi, \eta)$的坐标表达式.

七、(12 分) 求由曲线 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围成图形的面积.

八、(12 分) 在第一象限内, 求曲线 $y = 1 - x^2$ 上的点, 使该点处切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积最小.

九、(10 分) 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

十、(10 分) 设 $f(x)$, $g(x)$在$[a, b]$上连续, 且 $g(x) \geqslant 0$. 试证至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x .$$

十一、(10 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} - 8\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, 求出矩阵 $\boldsymbol{B}$.

十二、(8 分) 已知向量组(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$; (Ⅱ) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$; (Ⅲ) $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5$. 如果各向量组的秩分别为 R(Ⅰ) $=R$(Ⅱ)$=3$, R(Ⅲ)$=4$, 证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_5 - \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩为 4.

第四套

一、填空题 (4×6=24 分)

1. $\lim\limits_{x \to +\infty}(1+2^x+3^x)^{\frac{1}{x}} =$ ______.

2. 当 $|x| \leqslant 1$ 时, $\arcsin x + \arccos x =$ ______.

3. $\int_0^\pi x \cdot \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x =$ ______.

4. 设曲线 $y = x^a$ 与 $x = y^a$ $(a>0)$ 在第一象限所围平面图形的面积为 $\dfrac{1}{3}$, 则 $a =$ ______.

5. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$, 若 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩等于 1, 则 $a =$ ______.