科 學 譯 叢

——數 學：第4册——

# 三十年來的蘇聯數學

(1917—1947)

# 數 論

中國科學院出版

科 學 譯 叢

——數 學：第4冊——

# 三十年來的蘇聯數學
(1917—1947)

# 數 論

盖利芳特 (А. О. Гельфонд) 著
越 民 義 譯



中國科學院出版
1953年9月

科學譯叢

——數學：第4册——

數論

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

原文係 МАТЕМАТИКА В СССР ЗА ТРИДЦАТЬ ЛЕТ 一書中之一部分 Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы 1948 年出版

| | |
|---|---|
| 作者 | А. О. Гельфонд |
| 譯者 | 越民義 |
| 出版者 | 中國科學院 |
| 印刷者 | 北京新華印刷廠 |
| 發行者 | 中國圖書發行公司 |

書號：53042(數)04　　1953年9月初版

(京)0001—5,300　　定價：3,200 元

字數：42,000

# 前　　言

歐拉 (Euler) 是數論的創始人之一，他生平大部分住在俄國。從他以後，在數論的發展上，俄國的數學家也佔有很主要的地位。例如，關於用來表示小於所給數值的素數的個數之函數，П. Л. 切比雪夫 (Чебышев) 首先確定了它的一系列的性質，特別，他找到了這個函數的第一個估值。在數論方面的新方法和方向，則是 Е. М. 左洛塔留夫 (Золотарёв)，Г. Ф. 伏隆諾伊 (Вороной) 及 А. А. 馬爾科夫 (Марков) 所發現。

我們這篇短文是要對在引起俄國科學繁榮的十月社會主義革命之後，最近三十年間，蘇聯數學在數論方面的成就作一個敍述。由於文章的篇幅所限，我只打算對於蘇聯數學家所發展及獲得的方法與結果，對於整個數論的發展所起的作用，做到某種程度的描述。因此，在我的文章中，我也將要引述外國的學者們由於蘇聯數學家所發現的方法與事實而得到的一些很重要的結果。

# 目　　錄

## 第一節

在數論方面近三十年來所得到的最出色而光輝的結果，無疑的是屬於 И. М. 維諾格拉朶夫 (Виноградов)，許許多多解析數論及堆壘數論上的問題，都可以化歸到下列所謂的三角和數，即形如

$$\sum_{m}^{n} e^{2\pi i f(x)} \tag{1}$$

的和數的估值上去，此處 $f(x)$ 是 $x$ 的某一函數，$x$ 則跑過某一數列，首先，И. М. 維諾格拉朶夫[7] 在 1924 年指出了著名的華林 (Waring) 問題——即將所有的整數表示成有限定多個的自然數之已與方次之和的問題——可以藉助三角和數的估値來解決。對於將任何一個充分大的數目表示成整數羃的和所必需的最少可能項數，是決定於三角和數估値的精確度。繼續研究估計三角和數底方法，在 1934 年，И. М. 維諾格拉朶夫[37, 40, 50, 60] 對於估計形如 (1) 的三角和數，得出了更一般的方法，這種方法首先使得他有可能把對於將充分大的數目 $N$ 表示成整數的 $n$ 次羃之和所必需的項數之上界減少到

$$n(3\ln n+11),$$

以代替早先爲大家所知的階 $n2^n$ 的量。就是這個精深的方法，使得 И. М. 維諾格拉朶夫有可能去證明所有的奇整數皆可表示成三個素數之和，而解決著名的哥德巴赫 (Гольдбах) 問題。

哥德巴赫在 1742 年曾作了這樣的推測，就是所有充分大的奇數皆可表成三個奇素數之和，到 И. М. 維諾格拉朶夫的工作出現之前，所有想去證明這一推測的一切努力皆是不成功的。很有趣的來注意一下，哈代與李托武德 (Hardy and Littlewood) 利用他們用來證明希爾柏特—華林 (Hilbert-Waring) 定理的奇異級數方法，得以證明了哥德巴赫的推測，然而這個證明却有賴於 $L$-級數論上所謂的廣義黎曼 (Riemann) 假設的成立，而這個假設到今天仍然還未證明。

對於各種型的函數 $f(x)$，И. М. 維諾格拉朶夫所得到的形如 (1) 的和數的估值，在許多領域中，如數論方面，如數學分析方面，立刻喚起進展。例如 Н. Р. 邱達可夫 (Чудаков) 依靠了 И. М. 維諾格拉朶夫的方法大大改進了關於表示素數數目的公式中之殘項，對於那種一定包含有無論是自然數列中或算術列中的素數之區間底長度，也得出了重要的新結果，Ю. В. 林尼克 (Линник) 曾指出 И. М. 維諾格拉朶夫的方法可以用來解决幾率論上很困難的問題，近年來，無論是在我們的或者是在外國的出版物上，出現了一系列的工作，引用 И. М. 維諾格拉朶夫的結果和方法去估計各種各樣在近世理論物理上需用的區域中的格子點的數目。

從 И. М. 維諾格拉朶夫的結果，可以導出形如 (1) 的三角和數的一般估值，於此，$f(x)$ 是一多項式：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_sx^s+\cdots\cdots+a_1x.$$

即設 $a_s(s>1)$ 爲一無理數，數目 $n$ 和所有的係數 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 爲任意固定實數，把 $a_s$ 幾近地表示如

$$a_s = \frac{a}{q} + \frac{\vartheta}{q^2}, \quad |\vartheta| \leqslant 1,$$

這對於無限多的 $q$ 皆是可能的，И. М. 維諾格拉朵夫證明了不等式

$$\left|\sum_{m}^{m+p} e^{2\pi i f(x)}\right| < p\left[\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{q}{p^s}\right]^{\rho}, \quad \rho = \frac{1}{10n^2 \ln n}$$

這個不等式比以前所知的一切結果皆好得很多。

對於一函數的分數部分，И. М. 維諾格拉朵夫證明了估值

$$\left|\sum_{m}^{m+p} \{f(x)\} - \frac{p}{2}\right| < \lambda\left[A^{\frac{2}{3}} + \frac{p}{A^{\frac{1}{3}}}\right], \quad \lambda > 0,$$

此處 $\lambda$ 是一與 $A$ 和 $p$ 有關的常數，而 $f''(x)$ 在所論的區間內則服從不等式

$$\frac{1}{A} \leqslant f''(x) \leqslant \frac{C}{A}, \quad C > 0,$$

此處 $C$ 爲一常數，此項估值對於那種在所給的區域內與某種格中的點相聯繫的物理問題，有着很重要的實用價值。

最後，我們應當說說許多與三角和數的估值有關的精緻工作，在這些工作裏，和數是就素數來求和的，我們也要說說與二次剩餘和二次非剩餘相關的工作。

И. М. 維諾格拉朵夫[4, 5] 在 1918 年曾經得到不等式

$$\left|\sum_{0 \leqslant a \leqslant n} \left(\frac{a}{p}\right)\right| < \sqrt{p} \ln p,$$

於此 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 是雅可必 (Jacobi) 記號。這個不等式確立了二次剩餘與二次非剩餘分佈的充分平滑性。它最初被用於從事研究二次剩餘和二次非剩餘的分佈的一系列工作。И. М. 維諾

格拉朵夫的研究也在若干外國學者的工作中被繼續着和利用着，其中應當提名的有蘭島 (Landau)、萬・德爾・柯爾普特 (van der Corput) 、達文普爾特 (Davenport)、華羅庚、迭克生 (Dickson)。藉助 И. М. 維諾格拉朵夫的方法，海爾布朗 (Heilbronn) 和達文普爾特曾經證明，所有充分大的整數皆可表成不超過 16 個四次方之和，而迭克生則找出了關於 $g(n)$ 的精確界限，這裏的 $g(n)$ 是表示足以將任何整數表成整數的 $n$ 次冪之和所需的最小項數。

結合 И. М.維諾格拉朵夫的方法與關於 $L$-級數論的近代方法，И. М. 維諾格拉朵夫的弟子 Н. Г. 邱達可夫[2,15]得出了下面的重要結果：從某一 $N$ 開始，則在 $N$ 與 $N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 之間必存在素數；幾乎所有的偶數（就密度意義而言）皆可表示成兩個素數之和；末了，他又改進了素數分佈定律中的殘項。Н. Г. 邱達可夫更將他自己關於那種其中一定找得到素數的區間之結果推廣到屬於所給的算術列的素數的情形上去，他又大大地降低了那種數量 $N=N(D)$，這 $N(D)$ 是表示從它開始在區間 $N$ 與 $N+N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 中眞正地可以找到屬於差爲 $D$ 的算術列中之素數的一個量。

И. М. 維諾格拉朵夫的另外一個弟子 Б. Н. 舍加 (Сеган) [6, 9, 16, 17, 18, 19, 20] 巧妙地將華林定理推廣到非整數冪的情形。他證明了，存在着這樣的只與 $C$ 有關的 $r$，使得所有的整數 $N$ 皆可表作

$$N=\alpha+\sum_{k=1}^{r}x_k^{C}, \quad N>0,$$

的形式，這裏的 $C$ 是一任意實數，$x_i$ 是整數，而 $\alpha$ 則隨 $N$ 的增大而趨於零。他更把這命題推廣到利用整數的複數冪來表示形如 $n+mi$ 的整數之情形，並對項的數目 $r$ 得到了上界。

關於將任意數目 $N$ 用所給素數的任意次冪之積來作漸近表示的結果也屬於 Б. Н. 舍加。設 $N$ 爲整數，則

$$N=d\cdot p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l},$$

於此 $p_1, p_2, \cdots, p_l$ 是所給的整數，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l$ 則跑過整數列或素數列，$d$ 則隨 $N$ 之增大而確定地趨於 1。除了關於 $d$ 趨於 1 的程度的估值外，Б. Н. 舍加也得出了在關於 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ 的不同假設下，將 $N$ 表示成上述形狀的表示法的近似數目。最後的這一結果也曾爲其他作者所利用。

除此而外，對於一函數的分數部份，Б. Н. 加也得出了一系列有價值的結果。

И. М. 維諾格拉朶夫的弟子 К. К. 馬爾札尼夕威利 (Мерджанишвили)[1,2,3,5] 證明了，對於每一個所給的數目 $n$，存在着僅與 $n$ 有關的 $s$，使得對於幾乎所有的只是由某些不等式來聯繫着的整數 $N_1, N_2, \cdots, N_n$，方程組

$$N_i=x_1^v+x_2^v+\cdots+x_s^v;\quad v=1,2,\cdots,n,$$

常有不負的整數解 $x_1, x_2, \cdots, x_s$。К. К. 馬爾札尼夕威利利用了 И. М. 維諾格拉朶夫後來的方法，也得出了這方程組的解數之精確估值、他又將這定理推廣到 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 爲素數的情形上去。

在 1930 年，Л. Г. 史尼列爾曼 (Шнирельман) 在堆壘數論上開闢了一種與 И. М. 維諾格拉朶夫的方法完全相異的不根據

三角和數的研究方法。Л. Г. 史尼列爾曼的美妙而富有成效的觀念是在於在堆壘問題中，我們想用來表示任意所給的數目的那種整數列底密率是佔有重要的而且有時是有决定性的地位我們用$N(x)$來記在整數列$n_1, n_2, \cdots, n_s, \cdots$中，其不超過$x$的元素的數目。

設

$$\inf_{x\geq 1} \frac{N(x)}{x}=\alpha,\ \ \alpha>0;$$

換句話說，設$\frac{N(x)}{x}$的最大下界爲正。我們稱這一數$\alpha$爲數列$n_1, n_2, \cdots, n_s, \cdots$的密率。Л. Г. 史尼列爾曼曾經指出，若我們有着密率爲$\alpha$與$\beta$的兩個整數列，則由這兩個數列且必由這兩個數列中之數做成的偶和（парная сумма，即由每一集中各取一數做成的和——譯者）所成之集，其密率不小於$\alpha+\beta-\alpha\beta$，由此立刻可以推出，所有的自然數皆是有限密率的數列中有限定（即與被分解之數無關的）多個項之和。在利用B. 布朗（Брун）的某些結果證明了素數偶和所成之集，在某種廣義的意義上來說，具有有限密率之後，Л. Г. 史尼列爾曼首先在1930年解决了弱調的（ослабленной постановке）哥德巴赫問題。他證明了，所有的整數皆是有限定多個素數之和，此時1是算作素數。用同一方法，Л. Г. 史尼列爾曼證明了（例如）所有的整數皆是有限定多個形如$n_s^v$的數之和，於此$v>1$是一整數，而數列$n_1, n_2, \cdots, n_s, \cdots$則具有有限密率。

他又把用素數之和來表示整數的表示法類似地推廣到相對有限密率的素數上去。Л. Г. 史尼列爾曼的弟子Н. П. 洛馬諾夫

(Романов)[1,2,3] 證明了兩個有關某種數列的密率的精確結果。他證明由素數及整數的 $n$ 次冪作成的和所成的數列，或由素數與一整數幾何數列作成的和所成之數列具有有限密率。

近年來，Н. П. 洛馬諾夫勝利地研究出了算子 $\zeta$ 函數（операторая $\zeta$- функция）的一般理論，這種概念則是屬於 Л. Г. 史尼列爾曼，除此而外，對於獲致若干算術恆等式，他也構出了很一般的工具。

Д. А. 雷可夫(Райков)[5] 曾證明，若我們在直線上有兩列由線段作成的集。對於這兩個列，我們仿照如像對於數列所做的那樣，定義密率的概念，假設各列皆自零算起，則此二列之和的密率不小於其各密率之和，自然，我們得假定後者不超過 1。Д. А. 雷可夫所證明之定理，經 Л. Г. 史尼列爾曼把它有系統地陳述出來。在密率性質研究方面的其他結果也屬於 Д. А. 雷可夫。

Л. Г. 史尼列爾曼關於和敘列密率的研究爲許多數學家所繼續。特別 А. Я. 肯琴 (Хинчин) [28,29,31] 曾證明，若二系列的密率相等，則其和之密率大於或等於此二系列之密率和（自然，必須此和不超過 1）。隔了相當久之後，此定理又勿需假定密率之相等，即爲美國數學家滿(Mann) 及其後的阿爾丁(Artin) 及許爾克 (Scherk) 所證明。在 Л. Г. 史尼列爾曼工作之後，在敘列密率論方面，若干奇妙的結果即爲 Л. И. 沙特洛夫斯基(Шатроский)[1,2,3,4,5]、埃爾德夕 (Erdös)、畢塞柯偉奇 (Безикович)、蘭島及其他作者所得出。

## 第二節

關於古典的解析數論及堆壘數論方面，即僅依賴 $\zeta(s)$ 及 $L$- 級數的解析性質，特別是這些函數的零點的分佈的性質的，重要的結果當歸諸 Ю. В. 林尼克。人們早已知道，若廣義的黎曼假設得以眞正成立，就是說，若 $\zeta(s)$ 及所有級數 $L(s,\chi)$ 的一切零點皆眞正在直線 $Rs=\frac{1}{2}$ 上，則許多精深的解析事實及堆壘事實皆可證明，例如關於奇數的哥德巴赫問題及關於以 $D$ 為公差的算術數列中之最小素數的問題皆與一些這樣的事實有關。若廣義的黎曼假設成立，則我們特別可以證明，在任何算術數列 $Dx+l$ $(D,l)=1$ 中，可以找到素數 $p<D^{2+\varepsilon}$，這裏 $\varepsilon>0$ 對充分大之 $D$ 可以小至吾人之所欲。

Ю. В. 林尼克[24,25]僅賴某些他所證明的結果，這些結果是關於大量的 $L$-級數底零點之密度及其分佈的，這些 $L$-級數的模的界已知是決定於 $D$ 的，證明了，在所有以 $D$ 為公差的算術數列中包含素數 $p<D^c$，於此 $C$ 為一絕對常數。這個定理在質的方面幾乎全部解決了關於在一算術數列中的最小素數的古典問題。

Ю. В. 林尼克又曾經把關於將奇數表示成三個素數之和的維諾格拉朵夫著名定理作了一個純分析的證明。上面所說的結果指出了由 Ю. В. 林尼克所研究出來的分析方法的力量。

在三元二次形式論中，很重要的結果也是屬於 Ю. В. 林尼

克[1,2,3,4,5,6,7,9,13]。他指出了，在很多情形中，可以用一族(род)正三元形式來表示的數集和可以用同族中單獨一類（класс）來表示的數集，從某處開始，是一致的。必須指出，由 Ю. В. 林尼克所確立的關於三元形式的事實，比起關於具有更多個變數的形式的事實來，是更難於到達的。對於這些事實的獲得，Ю. В. 林尼克特別是曾經克服了與四元數有關的一些重大困難。他又證明了所有充分大的整數皆是 7 個立方之和（前蘭島所證者爲 8 個)。

Ю. В. 林尼克又用 И. М. 維諾格拉朵夫的方法得到了一系列的三角和數的新的估值。又改進了埃拉多斯提尼（Eratosthener）的梳法。

在 Ю. В. 林尼克指導下工作的 А. 連依（Реьи）運用了特別是 Ю. В. 林尼克在埃拉多斯提尼梳法方面及狄里希來 $L$-級數的零點的分佈方面的研究，證明了一系列用素數和半素數*) 之和來表示數目的定理。例如，他曾確立了一個巧妙的事實：所有的偶數皆是一個素數和一個半素數之和。

В. А. 塔塔可夫斯基（Тартаковекий）[1–11] 曾經大大地補充了史密斯(Smith）和明考夫斯基（Minkowski）關於二次形式族的研究。靠了與哈代和李托武德在華林問題上的方法相類的分析方法，他證明了，對於具有四個或更多的變數的二次形式，所有可以用一族形式來表示的整數的全體和可以用此族中單獨一類來表示的整數的全體，從某一處開始是一致的。他進而又

*) 一個無窮數列 $\{p_n\}$，當其素因子的個數是一與 $n$ 無關的有限數時，稱爲半素數列。

對高次形式建立了類似的事實，此時爲了滿足這些性質，形式的變數的數目應大於某一與形式的次數有關的界。B. A. 塔塔可夫斯基更證明了方程

$$x^{2n}-ky^{2n}=1$$

除了平凡解外，不可能有多於一組的 $x$ 與 $y$ 的正整數解，於此 $k$ 與 $n\geqslant 2$ 爲正整數。

爲 B. 布朗所發展的埃拉多斯提尼桄法使得某些關於素數的古典問題，在弱調的提法上，即不是對於素數而是對於半素數而言，得到解決。這種方法在蘇聯數學家的工作中也得到更進一步的發展。我已經說過了一些這類的工作。B.A. 塔塔可夫斯基作了一個新的，更完全的，他稱之爲選擇近迫埃拉多斯提尼桄的方法的，也是這種方法的變體。運用這種方法，他證明了在一切算術數列 $Dx+l$ $(D,l)=1$ 中，對任何充分大的 $z$，存在着不少於

$$\frac{a}{\varphi(D)}\,\frac{z}{\ln z},\quad a=\text{常數}$$

多個不超過 $z$ 的素數或由兩個素因子所組成的數，而對於後面一種情形，每一個這樣的素因子皆是在 $z^{\frac{1}{2}-\delta}$ 與 $z^{\frac{1}{2}+\delta}$ 之間，此處 $\delta=0.01$。他又指出了用這種方法得到某些定理的可能性，例如由不多於四個素因子做成的數中，其兩兩之差可無限多次爲零。

A. A. 布赫夕塔布 (Бухштаб)[2-6] 也得到了埃拉多斯提尼桄法的重大改進。對於用來表示在列 $kn+l$ 中不大於 $x$ 而且是由小於或等於 $x^{\frac{1}{\alpha}}$ 的素因子所作成的數的數目之函數 $B_l(k,x,$

$x^{\frac{1}{\alpha}}$)及表示在列 $kn+l$ 中，不大於 $x$ 而且不爲小於或等於 $x^{\frac{1}{\alpha}}$ 的素數除盡的數之數目的函數 $\pi_l(k,x,x^{\frac{1}{\alpha}})$，他對變動的 $\alpha$ 得到了估值

$$B_l(k,x,x^{\frac{1}{\alpha}})=\frac{x}{k}\omega(\alpha)+O\left(\frac{x}{\sqrt{\ln x}}\right),\quad \alpha\geqslant 1,$$

$$\pi_l(k,x,x^{\frac{1}{\alpha}})=\frac{x}{\varphi(k)\ln x}\psi(\alpha)+O\left(\frac{x}{\ln^{3/2}x}\right),\quad \alpha\geqslant 2,$$

$$(k,l)=1,$$

於比 $\omega(\alpha)$ 與 $\psi(\alpha)$ 滿足某些積分差分方程，而且它們自己也能被很好地做出估計。在另外一些作者的工作中，A. A. 布赫夕塔布的這些結果得到了它的應用。由 A. A. 布赫夕塔布所加强了的 B. 布朗方法的價值，是在於在具有變數 $\alpha$ 的問題中，引入了精確的積分差分方程。

A. A. 布赫夕塔布又證明了企望着的，但早先尙未得到的定理，即所有的數目，從某處開始，皆可分解成二數之和，其中每一數皆是由不多於四個素因子所做成，又在由不多於四個因子做成的數目中，存在無限多個其差等於 2 者。

狄里希來關於在算術數列中素數爲無限多的著名定理之重要推廣，當屬諸 Н. Г. 切波塔留夫 (Чеботарёв)[1,3,4]。他證明了在一代數域中，存在着無限多個素理想數屬於所給的置換。這定理證明之困難，可以用這樣的事實來說明，那就是它並不曾爲像狄德肯德 (Dedekind) 和弗洛賓尼烏斯 (Frobenius) 這樣的數學家所克服。Н. Г. 切波塔留夫所發現的用來證明他的定理的方法其後曾爲阿爾丁用來證明非常重要的一般互逆律

(Общий закон взаимности)。

設$\xi_i=a_{1_i}x_1+a_{2_i}x_2+\cdots+a_{ni}x_n$，$i=1,2,\cdots,n$ 爲一組行列式等於1的實線性式，$b_1,b_2,\cdots,b_n$爲任意所給的實數。明考夫斯基曾經提出過這樣的假設：常存在滿足不等式

$$|(\xi_1-b_1)(\xi_2-b_2)\cdots(\xi_n-b_n)|\leqslant\frac{1}{2^n}$$

的整數組$x_1,x_2,\cdots,x_n$。在明考夫斯基假設的方向，一般對於任何$n$皆成立的結果是屬於 Н. Г. 切波塔留夫，到今天爲止，這在本質上還是唯一的結果。他證明了，常可找到整數組$x_1,x_2,\cdots,x_n$，使不等式

$$|(\xi_1-b_1)(\xi_2-b_2)\cdots(\xi_n-b_n)|\leqslant\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

成立。Н. Г. 切波塔留夫的不等式到後來只有極少的改進。

A. 3. 瓦爾菲什 (Walfisz)[1,15] 在他居留蘇聯的年代，成功地繼續着他以前著名的關於因子問題和計算多元空間橢體內整點問題之研究。他改進了他從前若干這類形式的問題之估值，並在解析數論和堆壘數論的若干問題上得出了一系列的新結果。