经济应用数学
学习指导书

（第二版）

何良材　田玉芳　编著

重庆大学出版社

JINGJI YINGYONG SHUXUE

经济应用数学学习指导书

（第二版）

何良材　田玉芳　编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是与高等教育教材《经济应用数学》(何良材、何中市编著)配套的学习指导用书. 全书分三篇:微积分学、矩阵方法及其应用、概率统计基础. 每篇内容包含内容辅导与提要(含基本要求)、范例分析、习题解答、概念思考题.

本书可供高等教育财经与管理类有关专业使用,也可供工科少学时、文科、高等职业技术教育相关专业使用.

经济应用数学学习指导书
(第二版)
何良材　田玉芳　编著
责任编辑:刘茂林　　版式设计:刘茂林
责任印制:张立全
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400044
电话:(023) 65102378　65105781
传真:(023) 65103686　65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
重庆铜梁正兴印务有限公司印刷
*
开本:850×1168　1/32　印张:16.125　字数:433千
1999年8月第2版　　2003年5月第5次印刷
印数:14 001—15 000
ISBN 7-5624-2010-6/F·192　　定价:20.00元

编者的话

本书是与高等教育教材《经济应用数学》(重庆大学出版社出版,何良材、何中市编著)配套的学习指导用书.编写本书的目的在于:帮助读者更好地理解、掌握并深化教材的基本内容,同时本书也可供教师参考.

一、本书的基本内容

1. 内容辅导与提要——这部分对各篇内容梗概作了介绍,并指出了基本要求与重点,还向读者提出对基本内容应如何理解其要点以及注意之处,帮助读者将教材内容由“厚”变“薄”.

2. 范例分析——这部分不仅具有典型性、代表性,还具有知识的综合性,其深度、广度、难度略高于教材内容及例题,并注意一题多解的示范.这样作的目的在于:扩大读者的眼界,增强解题思路与能力,加深对教材内容的理解,同时也想满足有志报考研究生的读者及成人自考生的需要,对范例我们没停留在“解出了事”的作法上,而把重点放在对题目应如何分析思考,又该用什么知识(数学的,经济的,物理的……)和方法去解它,欲达“授人以渔”的目的.

3. 习题解答——这部分主要是便于读者,特别是不能直接参加面授的读者,如函授生、自学者……必要时参考.这里需要告诫读者的是,千万不能在作题前就急于去看题解,更不要照抄完成作业了事.如果读者经过再三的思考还无从下手的题目,可参看一下题解,最后还是必须独立亲手完成,这样才会有收益.

4. 概念思考题——这部分主要是编出一些有利于掌握、巩固、深化基本知识(包括概念、理论、方法)的客观题,它是对读者每

章学完后的一个自我检测，要求自觉完成，看看你掌握基本内容的深浅程度，同时也可从中发现问题，采取补救措施，达到学好的目的．

二、"四时"效应的学习方法

任何门类的学习，都必须辅之以良好的学习方法．因此在学习《经济应用数学》这门课程时，如果能对它的内容和方法事先有一个概略的轮廓，明确目的要求、重点难点、学习方法，这无疑将会有助于读者找到正确的途径去步步攀登．古人有"学而不思则罔(迷惑)，思而不学则殆(危险)"，"学而时习之"，"温故而知新"这些名言，核心是三个字：学、思、习，即对知识的积累、加工、运用．当今国外流行一种"SQ3R"学习方法(Survey Question Read Recite Review，即：浏览——提问——研读——复述——温习)，也蕴含此意，可资借鉴．真正要把知识学到手，关键是狠抓基本概念、基本理论与基本技能，另外还得讲求学习方法——苦读、深思、好问、巧记、多练．这就要求读者对教材要苦下功夫、细读深钻，对练习要独立思考、逐一解答．

这里向读者推荐一套行之有效的所谓"四时"效应学习方法．

1. 准时参加面授——教师对学生进行面授，这是目前教学中一个重要环节，一定要重视教师在授课中的口述、手记，通过耳听、眼看、脑思、笔记的多感官功能的协同作战，对学科中的基本知识认真理解，重点难点仔细剖析，这将对你的学习大有裨益．授课前按计划将内容粗略预习一遍，带着问题去课堂，往往会产生事半功倍的效果．

2. 及时进行复习——艾宾浩斯的遗忘曲线告诉我们，遗忘的速度是先快后慢．因此在听课后，一定要抓紧时间及时进行复习，细读深钻，反复思考教材内容．俄国教育学家马甲斯基指出："应先巩固建筑物，而不是修补已崩溃的建筑物．"要把听课时一次次

“断层”勾连起来，把已出现的记忆缝隙“焊平”，从而建立知识的总体骨架．

3. 定时攻破难点——好的学习计划，要定时、定向、定量完成，要强迫自己在一定时间里完成既定的学习计划，对重点难点要各个击破，切忌拖延．

4. 定时定成作业——在认真复习教材内容的基础上，必须按时完成作业，通过解答习题来加深对所学内容的进一步理解．解题时要独立思考、严格认真、步骤完整、计算准确，切不可草率抄袭，更不能不做作业，还要禁忌“不复习就赶作业”的恶习．如果可能把所学知识用去解决一两个你身边的实际问题，就更为喜人．

本书各篇中的内容辅导与提要、范例分析、概念思考题三部分由何良材教授编写；习题解答由田玉芳老师编写．

由于作者水平有限，不妥与错误在所难免，恳请读者不吝赐教．

何良材　田玉芳

1999 年 6 月于重庆大学

目 录

第一篇　微积分学

第一部分　内容辅导与提要

本篇的主要内容就是研究函数及其微分和积分.

函数是微积分学研究的基本对象，它是变量之间的相互关系的抽象；极限是微积分学研究问题的主要方法，它是现实世界中各种变量的“变化趋势”的概括；函数的连续则是一种特殊的极限问题，且连续函数是微积分学研究的重点对象. 微积分学研究变量时，既要了解变量彼此间的对应规律(函数关系)，又要研究各变量的变化趋势(极限)，还要对各变量在变化过程中某一时刻的相互动态关系(谁快谁慢等等)作极其精细的分析. 导数与微分就是进行这些研究的有力工具. 定积分(从历史上看)则是为了计算平面上封闭曲线围成图形的面积面产生的，计算这类图形的面积，最终都可归结为计算具有特定结构形式的和式极限问题. 人们在实际中逐步认识到：这种特定结构形式的和式极限，不仅是计算图形面积的数学形式，而且也是计算许多其它实际问题(包括经济问题)的数学形式. 因此，无论在理论上或实际中，特定结构形式的和式极限 —— 定积分 —— 具有普遍意义.

一、基本要求与重点

基本要求：正确理解函数、极限与连续这三个概念及其内在联系；熟练使用数符号 $f(\quad)$；会用初等方法求一些常见的极限. 正

确理解导数作为变化率的概念，微分是函数增量的线性主部的概念，以及函数局部线性化的思想；熟练掌握初等函数的求导方法（包括一元函数的二阶导数，二元函数的偏导数）；能够熟练地使用罗彼达法则求未定式极限；能正确地判定并求出函数的极值（包括二元函数的极值）；会利用导数解决经济领域中的最值问题；会利用导数对某些经济函数作边际分析和弹性分析；理解原函数，不定积分，定积分（含二重积分）等概念并掌握其性质；熟练掌握求不定积分的基本方法 —— 换元积分法与分部积分法；理解积分上限函数及其求导定理；掌握定积分的计算方法，了解广义积分概念与求法；会用积分解决经济领域中某些实际问题；会解一阶可分离变量微分方程与线性微分方程.

重点：函数与极限，导数与微分，不定积分与定积分等概念；函数符号 $f(\quad)$ 的使用，初等函数的导数，不定积分的求法；罗彼达法则，极值，定积分的计算以及微积分学在经济分析中的应用（含边际分析，弹性分析和已知边际经济量求经济总量等问题）.

二、基本内容

1. 函数概念

函数定义　设在某变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于变量 x 的变化范围内的每一个值，变量 y 按一定的规律（对应法则）有确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，一般用记号

$$y = f(x)$$

来表示；其中 x 称为自变量，y 称为因变量；自变量 x 的取值范围称为函数的定义域，因变量 y 的相应取值范围称为函数的值域.

正确理解函数定义，要明确以下几点：

(1) 定义域与对应规律是确定函数的两个要素，缺一不可，因此两个函数相等是指：① 它们的定义域相同，② 它们在定义域内每一个自变量取值相应的函数值相同.

(2) 函数定义中只要求 y 有确定值与 x 对应，但并不要求一个 y 取值只相应于一个 x 的值，即使是所有 x 取值只对应于一个 y 值也是允许的，因而 $y = C$(常数) 也是 x 的函数.

(3) 表示函数的方法没有任何限制，因此，不要只认为函数就是式子，式子只是函数的一种主要表示形式，但并非唯一形式，表示函数还可以用图形、列表、语句等其它形式，而且，即使用式子表示函数，也不是非得用一个式子不可，它可以同时使用几个式子来表示一个函数，例如：

某种产品销售总收入 R 是年产量 x 的函数

$$R = R(x) = \begin{cases} 4x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 8, & 4 < x. \end{cases}$$

这就是用两个式子来表示的一个函数(注意：它不是两个函数). 用"语句法"表示函数的例子，如

$$y = [x].$$

表示 y 是 x 的最大整数部分，$y = [3.5] = 3$，$y = [-2.9] = -3$.

(4) 要细心弄清楚函数的定义域问题. 当函数用式子表示时，则一切能使这个式子有意义的 x 所取实数值的全体就是这个函数的定义域，在确定用式子给出的初等函数的定义域时，应非常熟悉基本初等函数的定义域，并注意运用下述结论：

① 偶次根式的定义域是使根号下的式子非负的那些 x 的取值.

② 分式的定义域是使分母不为零的 x 取值的全体.

③ 超越函数 $\log_a u$，$\tan u$，$\cot u$，$\sec u$，$\csc u$，$\arcsin u$，$\arccos u$ 均不是处处有定义，而仅仅是使它们有意义的自变量 u 的取值.

如果上述基本形式均不出现在式子 $y = f(x)$ 中，则 y 的定义域就是整个数轴，只有那些由于实际问题的特定条件而限制定义域的情况除外，如圆的面积 $S = S(r) = \pi r^2$ 中的 r 必为正数(或非

负数).

(5) 要注意 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 不同,前者 $f(x)$ 是函数记号,表示对 x 施以一系列的运算而最终是变量;后者 $f(x_0)$ 是函数值记号,表示一个数.

(6) 一般地,函数 $y=f(x)$ 的图形是 xoy 坐标面上一条平面曲线.

2. 初等函数

(1) 最简单的几类函数:把常数函数 $y=C$、幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为常数)、指数函数 $y=a^x(0<a\neq 1)$、对数函数 $y=\log_a x(0<a\neq 1)$、三角函数、反三角函数这六大类最简单的函数,称为基本初等函数.对于它们的定义域,图形及其一些函数特性要十分熟悉,因为基本初等函数是一切函数的基础.

(2) 反函数:在 $y=f(x)$ 中,将 y 看作自变量,x 看作 y 的函数,则由关系式 $y=f(x)$ 确定 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 称为函数 $f(x)$ 的反函数,习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$.(注意:$f^{-1}(x)\neq\dfrac{1}{f(x)}$) 在同一坐标系中 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形对称于直线 $y=x$.

$y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ 互为反函数,特别地,$y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 互为反函数.

(3) 复合函数:如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,同时 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,而且当 x 在某一范围内取值时,相应的值 u 可使 y 有意义,则称 y 是 x 的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 为中间变量,从结构形式上看,复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 无非就是将 $y=f(x)$ 中变量 x 扩大为 x 的函数 $\varphi(x)$ 罢了,所以我们又可形象地说,复合函数就是函数的函数.但要注意,在进行函数的复合时,$\varphi(x)$ 的值不能超出 $f(u)$ 的定义域范围,如 $y=\sqrt{u}$,$u=\ln x$ 就只能考查 $x\geqslant 1$ 的那些值,否则 $y=\sqrt{\ln x}$ 就没有意义.

(4) 初等函数：由基本初等函数经过有限次代数运算(加、减、乘、除以及乘方、开方运算)与复合而成的，且只用一个式子表达的函数称为初等函数. 初等函数是微积分学研究的主要对象，不能用一个式子表示的函数就不是初等函数，如分段函数就不是初等函数了.

3. 函数的特性

(1) 有界性：对函数 $y = f(x)$，如有正数 M，使 x 取其定义域内每一值时，都有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $y = f(x)$ 为有界函数，否则，称 $y = f(x)$ 为无界函数.

(2) 奇偶性：对函数 $y = f(x)$，如有 $f(-x) = -f(x)$，则称为奇函数；如有 $f(-x) = f(x)$，则称为偶函数. 经常运用的奇、偶函数的基本性质有：

① 两个奇(偶)函数的代数和仍为奇(偶)函数.

② 两个奇(偶)函数之积为偶函数；奇函数与偶函数的积为奇函数.

③ 若 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(t)$ 均为奇函数，则复合函数 $y = f[\varphi(t)]$ 为奇函数.

④ 若 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(t)$ 至少有一个为偶函数，则复合函数 $y = f[\varphi(t)]$ 为偶函数.

⑤ 若 $y = f(x)$ 为偶函数，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为偶函数.

(3) 周期性：若 $f(x + T) = f(x)$ ($T > 0$，且是最小者)，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

(4) 单调性：设 x_1, x_2 是 $y = f(x)$ 定义区间 (a,b) 内任意两点，若 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加(或单调减少).

函数的特性要结合基本初等函数来理解、领会，使其具体化，同时亦加深了对基本初等函数的印象.

4. 极限

极限是从静态认识动态、从近似认识精确、从有限认识无限的一种数学方法，它是研究整个微积分学的理论基础和基本方法，微积分学中的一些重要概念(如无穷小，连续，导数，定积分等)无非是一些特定的极限问题. 对于极限这一类关键性问题(概念，性质)必须很好地理解、掌握.

关于极限的概念，万事开头难，数列的极限是其它类型极限的开门钥匙，它的理解使得对其它类型极限的理解容易多了. 首先从直观上理解数列极限，其次，弄清数列极限抽象的严格定义(即 ε-N 定义)，从而在思想上形成一个概念：极限就是研究变量的变化趋势. 具体地说，变量 y 以 A 为极限，就是变量 y 向着常量 A 变，其接近 A 的程度 ① 越来越近，② 要好近就有好近，归结为"任意近"("无限趋近"). 以上理解数列根限的要点同样可用于函数极限的学习中，但要分清函数极限的两种情况，即 $x \to \infty$ 与 $x \to x_0$.

函数极限这一概念理解了，诸如无穷小，连续等概念就极为容易了，它们无非是一种特殊的极限而已. 事实上，无穷小量就是以零为极限的变量；函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续就是 $f(x)$ 在 x_0 处的极限值恰好等于其函数值，其分别用记号表示为 $\lim f(x) = 0$；$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，

极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是：

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

关于函数极限以及有关函数连续等问题，借助于图形来思考，既直观，又便于理解与解决问题.

5. 连续

函数与极限为我们用分析的方法研究函数奠定了基础，但是函数的种类极为复杂，那么应从研究什么类型的函数开始呢?微积分的发展史告诉我们，无论从理论上或实际问题中都应从连续函

数开始，这是因为，一方面在生产实际中所遇到的函数大多数是连续函数. 例如，工农业总产值的连续上升，人民收入水平的连续增加等等；另一方面，我们常常直接或间接借助于连续函数讨论一些不连续函数，于是连续函数就成为微积分学的主要研究对象. 读者对连续的定义，性质应有清晰的了解，特别是对初等函数在定义区间内都是连续函数，闭区间上连续函数的最值、介值定理，读者要能理解并能应用.

6. 导数与微分

称极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$(若此极限存在)为函数 $f(x)$ 的导函数，记为 $f'(x)$.

称极限$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$(若极限存在)为二元函数 $z=f(x,y)$ 对 x 的偏导数，记为 $f_x'(x,y)$.

称 $f'(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $y=f(x)$ 的微分，记为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$.

称 $f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$ 为二函数 $z=f(x,y)$ 的全微分，记为 $\mathrm{d}z=f_x'(x,y)\mathrm{d}x+f_y'(x,y)\mathrm{d}y$.

对于导数与微分这两个重要概念，应理解以下各点：

(1) 导数是函数增量与自变量增量之比值　当自变量增量趋于零时的极限. 微分是函数导数与自变量微分之积. 容易看出，导数与微分两大概念是以极限为基础的，可以认为是一种特定的极限. 导数描述的是函数在点 x 处的变化快慢程度，讨论的是当一个函数的自变量发生变化时，引起函数自身所产生的变化率，因此，导数是研究变化率问题. 其基本思想方法是：**区间分小段，变用不变算，近似到精确，利用取极限**. 微分则是描述当自变量在某一点取得一个微小增量时，函数取得相应改变量的大小. 可以说成是：微分是函数增量的线性主部，即 Δy 与 $\mathrm{d}y$ 之差为 Δx 的高阶无穷小，亦即 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$.

(2) 导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处切线的

斜率.其切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$；微分 $f'(x_0)\mathrm{d}x$ 的几何意义是切线上的对应于横坐标改变量 Δx 这一段的纵坐标改变量，当 Δx 充分小时，有 $\mathrm{d}y\approx\Delta y$，这叫"以直代曲"(用切线代替曲线).

(3) 可导一定连续，连续不一定可导. 如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续，但左导数

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to x_0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to x_0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

右导数

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，所以 $f'(0)$ 不存在.

注：$f'(x_0)$ 存在的充要条件是：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. 即 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处左、右导数存在且相等.

(4) 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可微的充要条件是它在该点 x_0 处可导，且 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

注：函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是它在该点 x_0 处可微，且

$$f'(x_0)=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

故导数又称微商，可简单表示为

可导 ⇆ 可微.

从上面可以看出，导数与微分虽然有密切而不可分割的关系，但两者又是不同的两个概念，绝不能将二者概念相混淆，两者的共同点均是研究函数在某点附近的局部性态问题.

7. 不定积分与定积分

若对任一 $x \in I$(区间),均有 $F'(x) = f(x)$,则称函数 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 内的一个原函数;

在区间 I 内,$f(x)$ 的所有原函数称为函数 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分,记为 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

若在 I 内,$F'(x) = f(x)$,则

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

称乘积和式的极限 $\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 为连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分. 记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

对于定积分概念,读者应理解以下各点:

(1) 积分和式的极限存在(即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在) 要求:既与区间 $[a,b]$ 的分法无关,又与各 ξ_i 的取法无关. 因此,在借助于积分和式极限计算定积分时,可以只从方便着眼来选取区间 $[a,b]$ 的分法与各 ξ_i 点的位置. 例如,经常把区间 $[a,b]$ 分成 n 个相等长度的子区间,取各子区间的左端点 x_{i-1}(或右端点 x_i) 作为 ξ_i 来方便计算.

(2) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 既是一个特定形式的极限,因此它是一个数,这个数只由被积函数 $f(x)$ 与积分区间 $[a,b]$ 来唯一确定,而与积分变量用什么字母表示无关,即有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

综合(1),(2),定积分具有三无关,两有关的特性.

(3) 保证定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在的条件是$f(x)$在$[a,b]$上的连续性，连续函数的定积分一定存在，但连续条件仅仅是个充分条件，不是必要条件. 一些非连续的函数，例如：在$[a,b]$上只有有限个间断点的有界函数以及单调有界函数，它们的定积分也是存在的.

(4) 定积分的定义是在$a < b$时给出的，当$a > b$时，规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x.$$

即交换积分上、下限，其值仅差一个负号，特别地：

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

(5) $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,(a \leqslant x \leqslant b)$是关于变量$x$的一个“新函数”，习惯上称它变上限函数，即

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

而广义积分可理解为变上限(定积分)函数的一个极限过程.

(6) 定积分的基本思想方法可理解为：

化整为零无限分，以常代变得微分，积零为整微分和，无限积累是积分.

三、基本方法

1. 极限求法

对一些简单的基本极限题，要求读者能够计算，这里限于初等求极限方法，至于较难的极限(未定式极限)题，用高等求极限方法——罗彼达法则很易解决，那将作为导数的应用在下文给出. 初等求极限方法通常有以下几种：

(1) 利用极限定义，验证某常数为已知变量的极限，通常是直