离散数学

眭碧霞 主编

21世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21 世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材

离 散 数 学

眭碧霞　主编

机 械 工 业 出 版 社

本书是结合作者多年的计算机教学经验及高职高专学生的特点编写而成的。主要内容包括数理逻辑基础、集合与关系、图论、代数系统等。本书从实际应用出发，注重培养学生分析问题、解决问题的能力，在内容编写上力求重点突出，论证明了，避免复杂的理论证明和公式推导。

本书还针对各个知识点列举了大量的实例加以说明。同时，每章后面还配有适量的习题。

本书既可作为高职高专计算机专业学生的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学 / 眭碧霞主编. —北京：机械工业出版社，2004.4
（21 世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材）

ISBN 7-111-14195-4

I. 离… II. 眭… III. 离散数学—高等学校：技术学校—教材 IV. 0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 021506 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策 划：胡毓坚
责任编辑：李利健
责任印制：李 妍

北京机工印刷厂印刷 · 新华书店北京发行所发行

2004 年 4 月第 1 版 · 第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 8.5 印张 · 204 千字
0 001—5 000 册
定价：13.00 元

出版说明

新世纪对高职高专教育提出了新的目标和要求，高职高专教育面临新一轮的改革和发展。为了进一步推进高职高专的教育改革，培养 21 世纪与我国现代化建设相适应的，具有较宽厚的文化基础底蕴，并能在生产、管理、服务岗位第一线工作的技术应用型人才，机械工业出版社与高职高专计算机科学与应用专业教材编委会联合组织了全国近百所院校的一线骨干教师，在交流、研讨的基础上，根据国家教育部的精神，以及高职高专教学改革的新思路编写了此套“21 世纪高职高专计算机科学与应用专业系列教材”。目前已出版了两轮，近 30 种教材。随着教改的深入，新技术的出现，新一轮的高职高专教材将陆续出版。

这套教材是在明确了高职高专学生培养目标的基础上，强化对学生实践能力和创新意识培养的指导思想下，应用现代高等职业技术教育的理念、方法和手段编写而成的。新的教材是将高职高专院校教学改革力度比较大，内容新颖，注重能力，体现创新的教材；或是将各院校急需使用，适合社会经济发展新课题的教材列入选题规划，进行修编或新编的。本系列教材力求体现“定位准确、注重能力、内容创新、结构合理和叙述通俗”的编写特色。新教材是由个人申报，经各院校推荐，编委会会同专家评选，出版社立项出版的。

望各高职高专院校积极选用本套系列教材，及时提出修改意见，不断提高教材的编写质量。

高职高专计算机科学与应用专业教材编委会

机械工业出版社

前　言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的理论基础。离散数学具有数学的特征，如抽象性、逻辑性等，又有自己的特点——其主要的研究对象是离散量。它用数学的方法来表示离散量，研究离散量之间的关系及特性。

离散数学是计算机及应用专业的一门核心课程。一方面，通过离散数学的学习，培养学生的抽象思维能力和逻辑推理能力，为学生今后的学习和工作打下坚实的基础；另一方面，也为计算机专业的后续相关课程，如数据结构、数据库原理、编译系统等，提供必要的数学基础。

本书内容包括：数理逻辑基础、集合与关系、图论和代数系统等。

本书是结合作者多年的计算机教学经验和高职高专学生的特点编写而成的。在内容选择和文字表述上力求通俗易懂、重点突出、简明扼要，避免了复杂的理论证明与公式推导，并结合实际应用，使学生易于接受。本书注重培养学生分析问题、解决问题的能力，并针对书中各个知识点，列举大量的例子加以说明。同时，每章后面还配有适量的练习题，使学生能更好地结合学习内容，举一反三，巩固和应用所学知识。

本书由常州信息职业技术学院眭碧霞（第1章）、张春平（第2章）、福建信息职业技术学院彭黎霞（第3、4章）编写，在本书的编写过程中得到了全国计算机专业指导委员会、机械工业出版社的大力支持，在此表示深深的谢意。

限于作者的水平，书中难免有错漏之处，敬请读者批评指正。

编　者

目　录

第1章　数理逻辑基础

数理逻辑是用数学的方法研究思维规律的一门学科。按其性质说，数理逻辑既是数学又是逻辑学。它研究数学中的逻辑问题，用数学的方法研究形式逻辑。命题逻辑和谓词逻辑是数理逻辑最基础的内容，它引进一套符号体系，简洁地表达各种推理的逻辑关系，从量的角度来研究思维规律。数理逻辑中，关于形式语言的研究，为建立计算机语言提供了基础；关于形式系统的语法、语义的研究解决了计算机软件的语言问题；计算机的线路可以用命题演算的公式来表示。机器证明、程序逻辑、程序正确性证明等无一不是数理逻辑研究的成果。因此，数理逻辑为机器证明、自动程序设计、计算机辅助设计等计算机应用和理论研究提供了必要的理论基础。

1.1　命题

1.1.1　命题的概念

人类的思维活动就是一个逻辑推理的过程，逻辑推理的一个重要内容是判断某一句话是否正确。这句话的表达要求精确，不容许含糊其辞、模棱两可、似是而非，也就是要求这句话能判断真假。一句话可以有不同的形式，如疑问句、祈使句、感叹句和陈述句等等，其中陈述句能判断真假。

定义 1.1　把一个能够判断真假的陈述句称为命题。一个命题，如果其中不再包含其他命题成分，那么就称为简单命题（或原子命题）；一个命题，如果其中包含其他命题，那么就称为复合命题。一个命题若被判断为真命题，则称该命题取真值为真，用“1”表示；若被判断为假命题，则称该命题取真值为假，用“0”表示。

【例 1-1】　下列叙述中哪些是命题。

（1）3 是素数。

（2）$x^2=1$。

（3）$x^2+1=0$ 有两个实根。

（4）这个题目很难。

（5）不准抽烟。

（6）你身体好吗？

（7）我正在说假话。

（8）北京是中国的首都。

（9）别的星球上有生物。

解：上面这些句子中，（1）、（3）、（8）是命题，它们是能判别真假的。（1）、（8）是真的，（3）是假的。（9）也是命题，它虽然在目前不能判断真假，但是从事物的本质而论，它本身是有真假可言的。

（2）、（4）、（5）、（6）、（7）都不是命题。（5）、（6）不是陈述句，当然不是命题；（2）对有些 $x(x = \pm1)$为真，而对另一些 x 为假，不能判断真假，因此不是命题；（4）中的“难”字没有精确的界限，无法判断真假，也不是命题；（7）也无法判断命题真假，因为，如果这句话是真的，按句子的内容“我正在说假话”，既然说假话，那么我的话（即“我正在说假话”）就不是真话，因此我并未说假话，这就与句子是真的发生矛盾。如果这句话是假的，那么我并未说假话，即说的是真话，这又导致与假定句子为假相矛盾，所以对（7）不能判断真假，因而不是命题。

在【例 1-1】的每个命题中都不再包含其他命题成分，它们都是简单命题，下面是复合命题的例子。

【例 1-2】 判断下列命题哪些是复合命题。

（1）我学英语，或者我学日语。

（2）我在学习，小王在打球。

（3）如果天气好，那么我去散步。

解： 上述 3 个命题都包含了两个简单命题，因此都是复合命题。

1.1.2 命题的表示

数理逻辑的特点是将逻辑推理变成类似数学演算的完全形式化的逻辑演算，为此，首先要把推理涉及到的各个命题符号化。

习惯上，命题用大写的英文字母表示，有时也可以用小写字母表示。

例如，P：今天是星期一。就是用字母 P 表示命题：今天是星期一。

例如，Q：今天是晴天。就是用字母 Q 表示命题：今天是晴天。

命题可以分为命题常元和命题变元。所谓命题常元指的是一个具体、特定的命题，因而这个命题的值是固定不变的，比如，命题 P 表示“雪是黑的”，它的真值永远取假，它是命题常元。所谓命题变元指的是这个命题的值是不固定的、可变的，因而它可以表示任何命题，只有当命题变元用一个特定的命题取代时，才能确定其真值。因此，命题变元不是命题。

由于在命题逻辑中不关心具体命题的含义，只关心其真值，因此，可以形式地给出命题变元和命题常元的定义。

定义 1.2 以真或 1、假或 0 为其变域的变元，称为命题变元；以真或 1、假或 0 为其值的称为命题常元。

1.2 命题联结词

在命题中，由两个命题通过联结词构成一个新的命题。例如，两个简单命题“我学英语”和“我学日语”通过联结词“或者”构成一个复合命题。这种联结词称为命题联结词或命题运算符。

下面，我们将介绍几种命题联结词。

1. 否定“¬”

定义 1.3 设 P 是一个命题，利用“¬”和 P 组成的复合命题称为 P 的否命题，记为“¬

P”。当 P 取值为真时，$\neg P$ 取值为假；当 P 取值为假时，$\neg P$ 取值为真。一个命题的否定与此命题间取值的关系也可以用表 1-1 来表示。

“$\neg P$”读作“非 P”，它相当于日常语言中的“非”。例如，P 表示“今天早晨我在图书馆”，那么，$\neg P$ 表示“今天早晨我不在图书馆”。

2. 合取“$\wedge$”

定义 1.4 设 P 和 Q 是两个命题，由 P、Q 利用“$\wedge$”组成的新命题，记为“$P \wedge Q$”称为合取式复合命题。$P \wedge Q$ 的取值情况是：当且仅当 P 和 Q 均取值为真时，$P \wedge Q$ 才取值为真。因此，$P \wedge Q$ 的真值如表 1-2 所示。

表 1-1

P	$\neg P$
0	1
1	0

表 1-2

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

“$P \wedge Q$”读作“P 且 Q”。在日常语言中表示“并且”、“又”的意思。例如，P 表示“今天下雨”，Q 表示“今天下雪”，那么，$P \wedge Q$ 表示“今天下雨又下雪”。只有当 P、Q 都是为真时，$P \wedge Q$ 才为真。如果 P、Q 中有一个为假，例如，P 为假，即“今天不下雨”，显然“今天下雨又下雪”为假。

3. 析取“$\vee$”

定义 1.5 由命题 P 和 Q 利用“$\vee$”组成的复合命题，记作“$P \vee Q$”，称为析取式复合命题，读作“P 或 Q”。

例如，P 表示“今天早晨小张在读英语”，Q 表示“今天早晨小张在散步”，那么 $P \vee Q$ 表示“今天早晨小张或者在读英语或者在散步”。从这个例子可以看出，只要 P、Q 两个命题中有一个为真，那么 $P \vee Q$ 就为真。这是因为：若“今天早晨小张在读英语”为真，那么“今天早晨小张或者在读英语或者在散步”显然也是真话，而只有当“今天早晨小张在读英语”和“今天早晨小张在散步”都为假时，“今天早晨小张或者在读英语或者在散步”这句话才是假的。从而我们得到 $P \vee Q$ 的真值如表 1-3 所示。

需要注意的是，联结词“或者”与日常语言中的“或者”是有差异的，日常语言中的“或者”有不可兼或的意思。例如，“今天上午小张在图书馆或在教室听讲座”表示的是二者只能居其一，不会同时成立。而根据真值表，联结词的“或者”当 P、Q 同时为真时，$P \vee Q$ 也为真，两者可以同时成立。因此，“$\vee$”所表示的“或”是“可兼的或”。

4. 蕴含“$\rightarrow$”

定义 1.6 由命题 P 和 Q 利用“$\rightarrow$”组成的复合命题，记作“$P \rightarrow Q$”，读作“P 蕴含 Q”，称为蕴含式复合命题。

在日常语言中，“$P \rightarrow Q$”相当于“如果 P，则 Q”，其中 P 称为蕴含式的前件，Q 称为蕴涵式的后件。例如，P 表示“天下雨”，Q 表示“地会湿”，那么 $P \rightarrow Q$ 表示“如果天下雨，则地就会湿”。所以只有当 P 为真，Q 为假时，$P \rightarrow Q$ 才为假，因为 P 为真（天下雨），Q 为假（地不会湿），显然，“如果天下雨，则地不会湿”是一句假话。其他情况下，$P \rightarrow Q$ 都是真的，因为 P 为假（天没下雨），Q 为假（地也没湿），那么 $P \rightarrow Q$（如果天没下雨，地也没

湿）为真；如果 P 为假（天没下雨），Q 为真（地由于其他原因是湿的），那么 $P\to Q$（如果天没下雨，地也会湿）为真；如果 P 为真（天下雨），Q 为真（地会湿），那么 $P\to Q$（如果天下雨，地会湿）为真。由此可见 $P\to Q$ 的真值如表 1-4 所示。

表 1-3

P Q	$P\vee Q$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

表 1-4

P Q	$P\to Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	0
1 1	1

5. 等价“$\leftrightarrow$”

定义 1.7 由命题 P 和 Q 利用“$\leftrightarrow$”组成的复合命题，记作“$P\leftrightarrow Q$”，读作“P 等价 Q”，称为等价式复合命题。

在日常语言中，“$P\leftrightarrow Q$”相当于“P 当且仅当 Q”，即 P 和 Q 互为充要条件。P 称为前件，Q 称为后件。例如，P 表示“两条直线平行”，Q 表示“同位角相等”，所以只要 P、Q 同为真或同为假时，$P\leftrightarrow Q$ 才是真。比如 P 为假（两条直线不平行），Q 为假（同位角不相等），那么 $P\leftrightarrow Q$（两条直线不平行当且仅当同位角不相等）是真的。只有 P、Q 中有一个为假，$P\leftrightarrow Q$ 就为假。比如 P 为真（两条直线平行），Q 为假（同位角不相等），那么 $P\leftrightarrow Q$（两条直线平行当且仅当同位角不相等）为假。因而 $P\leftrightarrow Q$ 的真值如表 1-5 所示。

注意，联结词蕴含和等价都是日常语言中相互词语（如果…，那么…，当且仅当）的逻辑抽象，它们之间是有区别的。在日常语言中，前件与后件之间存在因果关系，但是在联结词中则不一定要求如此。我们关心的是命题间的真值关系，即抽象逻辑关系，并不关心各个语句的具体内容。因此，内容上毫无关联的两个命题也能用联结词组成复合命题，例如，“如果 2+3=5，则南京是江苏省省会”；“上海是个大城市等价于鸟会飞”都是具有确定真值的命题。

上面给出了五个常用的命题联结词，另外还有三个联结词，下面给出它们的名称和真值。

6. 与非“$\uparrow$”

“与非”联结词记作“$P\uparrow Q$”，其真值如表 1-6 所示。

表 1-5

P Q	$P\leftrightarrow Q$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

表 1-6

P Q	$P\uparrow Q$
0 0	1
0 1	1
1 0	1
1 1	0

7. 或非“$\downarrow$”

“或非”联结词记作“$P\downarrow Q$”，其真值如表 1-7 所示。

8. 异或“$\oplus$”

“异或”联结词记作“$P\oplus Q$”，其真值如表 1-8 所示。

表 1-7

P Q	$P\downarrow Q$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	0

表 1-8

P Q	$P\oplus Q$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

1.3 命题公式

1.3.1 语句的符号化

前面已经介绍了几种命题联结词，我们可以从已知命题通过联结词构造出新的命题。由若干个简单命题通过命题联结词而构成的新命题就是复合命题。

下面我们举例说明如何将自然语言翻译成复合命题。

【例 1-3】 试将下列语句写成复合命题形式。

（1）如果你走路时看书，那么你的眼睛一定会近视。

（2）除非知道了癌症的病因并且找到了治癌的新药，否则癌症是不能治愈的。

（3）一个关系是等价的当且仅当它是自反的、对称的、传递的。

解：（1）令 P 表示“你走路”，Q 表示“你看书”，R 表示“你的眼睛近视”，则（1）语句可表示为：$(P\wedge Q)\rightarrow R$。

（2）令 P 表示“知道了癌症的病因”，Q 表示“找到了治癌的新药”，R 表示“治愈癌症”，则（2）语句可表示为：$\neg(P\wedge Q)\rightarrow\neg R$。

（3）令 P 表示“一个关系是等价”，Q 表示“一个关系是自反的”，R 表示“一个关系是对称的”，S 表示“一个关系是传递的”，则（3）语句可表示为：$P\leftrightarrow(Q\wedge R\wedge S)$。

【例 1-4】 设 P、Q、R 分别表示如下命题：P 表示“小王乘公共汽车”；Q 表示“小王在看书”；R 表示“小王在唱歌”，试用自然语言表达下列复合命题。

（1）$P\wedge Q\wedge R$。

（2）$(P\vee Q)\wedge\neg R$。

（3）$P\rightarrow(Q\vee R)$。

（4）$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$。

解：（1）$P\wedge Q\wedge R$ 表示命题“小王乘公共汽车并且在看书而且在唱歌”。

（2）$(P\vee Q)\wedge\neg R$ 表示命题“小王乘公共汽车或者在看书但他没有在唱歌”。

（3）$P\rightarrow(Q\vee R)$ 表示命题“小王乘公共汽车时，或者看书或者唱歌”。

（4）$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$ 表示命题“小王既没有乘公共汽车，也没有在看书，而是在唱歌”。

在复合命题中，我们用了括号，从最内层括号的联结词执行起，在没有括号时，五种联结词的执行的先后顺序是：最先“$\neg$”，然后“$\wedge$”或“$\vee$”，再“$\rightarrow$”或“$\leftrightarrow$”。

1.3.2 命题公式

在前面曾经说明，常用大写英文字母表示命题。用一个符号表示某个特定命题，称为命题常量，也可用同一个符号表示任意的命题，称为命题变元。若用“P”表示的命题，则“P”

的真值就是该实际命题的真值。若将“P”当作命题变元，只有用一个特定的命题取代“P”，这样才能确定它的真值。在这种情况下，“P”是一个命题公式。为求简便，常将命题公式称为命题。

设 P 与 Q 是两个命题变元，可用 P 与 Q 构成的若干复合命题如下：

P；$P\vee Q$；$(P\vee Q)\vee(\neg P)$；$P\vee(\neg Q)$。

以上给出的复合命题，是一些由命题变元 P 与 Q 构成的命题公式，为使命题公式具备单义性质，除联结词外，还应使用圆括号。如前所述，此处圆括号所具有的意义与初等代数和程序设计语言中所用的圆括号意义相同，就是说，应先化简最内部圆括号中的表达式。这样，$\neg(P\wedge Q)$指 $P\wedge Q$ 的否定；$(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$指 $P\wedge Q$ 与 $P\wedge R$ 的析取，$((P\wedge Q)\wedge R)\wedge(\neg P)$指 $(P\wedge Q)\vee R$ 与$\neg P$ 的合取，$(P\wedge Q)\vee R$ 指 $P\wedge Q$ 与 R 的析取。

为减少圆括号的数目，假设“否定”仅作用于邻接其后的命题。这样，就可将$(\neg P)\vee Q$ 改写成$\neg P\vee Q$，它表示否定仅作用于P。根据上述约定，$\neg(P\wedge Q)\vee R$ 表示$\neg(P\wedge Q)$与 R 的析取，这个否定仅作用于 $P\wedge Q$，而不作用于 R。

由此可见，命题公式是一个表达式，它由命题变元（有下标或无下标的大写英文字母）、联结词符号与圆括号组成，因而形成一个字符串。但由这些符号组成的字符串并不一定都是命题公式。以下将给出命题公式的定义，这种命题公式简称为公式，也称为合式公式。

定义 1.8 命题公式是当且仅当按下列规则生成的公式：

（1）孤立的命题变元是一个公式。

（2）若 P 是一个合式公式，则$\neg P$ 也是一个公式。

（3）若 P 与 Q 是合式公式，则$(P\wedge Q)$、$(P\vee Q)$、$(P\rightarrow Q)$与$(P\leftrightarrow Q)$都是公式。

（4）经过有限次使用规则（1）、（2）与（3），而得到的由命题变元、联结词符号与圆括号所组成的字符串是公式。

依据以上的定义，下列符号串是公式：

$\neg(P\wedge Q)$；$\neg(P\vee Q)$；$(P\rightarrow(P\vee Q))$；$(P\rightarrow(Q\rightarrow P))$；$(((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\leftrightarrow(P\rightarrow R))$。

但并不是由命题变元、联结词符号及圆括号所组成的每一个字符串都可构成公式，例如下列字符串就不是公式：

$P\rightarrow QP$；$\vee R\rightarrow P$；$P\rightarrow(Q\rightarrow P)$；$P\neg\wedge Q$

1.3.3 真值表

一个公式的真假可由公式中的每个命题变元所赋予的真值所确定，公式中所有命题变元的一组确定的取值称为公式的一组真值指派。含有 n 个命题变元的公式有 2^n 组不同的真值指派。对于每一组真值指派，通过联结词真值表，公式就有一个确定的真假，从而可以构造出公式的真值表来。

前面在定义各种联结词时，曾使用过真值表，以下将给出真值表的定义。

定义 1.9 对命题变元的每一种可能的真值指派，与由它们决定出命题公式的真值所列成的表，称为命题公式的真值表。

$\neg P$ 的真值表是将“P”看成一个命题变元，因而只会出现两种可能的真值。一般地说，在命题公式中，若有 n 个不同命题变元，为构成其真值表，就需考虑 2^n 个可能的真值指派，以下将举例说明构成真值表的基本方法。

【例 1-5】 构造命题公式 $P\vee\neg Q$ 的真值表。

解：为构成真值表，必须考察命题变元 P 与 Q 的所有可能的真值指派，并将这些真值指派填入表中。在表 1-9 中，第二列上是 $\neg Q$ 的真值，在第三列上是命题公式 $P\vee\neg Q$ 的真值。

表 1-9

P Q	$\neg Q$	$P\vee\neg Q$
0 0	1	1
0 1	0	0
1 0	1	1
1 1	0	1

由表 1-9 可看出，若命题变元的真值一经指派，则在真值表中就能找到由它们所对应的命题的真值。其方法是，沿着该命题变元的真值指派所在的行进行查找。

【例 1-6】 构造命题公式 $P\to Q$，$\neg P\vee Q$ 与 $\neg(P\wedge\neg Q)$的真值表。

解：使用上述方法，就可构成它们的真值表，如表 1-10 所示。

表 1-10

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\to Q$	$\neg P\vee Q$	$\neg(P\wedge\neg Q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

由表 1-10 可看出，命题公式 $P\to Q$ 与命题公式 $\neg P\vee Q$ 以及 $\neg(P\wedge\neg Q)$是等价的。

【例 1-7】 构成命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$的真值表。

解：用同样方法，能构成它们的真值表，如表 1-11 所示。

表 1-11

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\leftrightarrow Q$	$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

由表 1-11 可看出，命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与$(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)$是等价的。

【例 1-8】 构造命题公式$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$的真值表。

解：

表 1-12

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg(P\wedge Q)$	$(\neg P\vee\neg Q)$	$\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1

由真值表 1-12 可看出，对 P 与 Q 的所有可能的真值指派而言，给定命题公式的真值均为 1，并独立于命题变元 P 与 Q 的真值。这种独立性取决于命题公式的特别结构，下面将专门讨论这个问题。

【例 1-9】 设有命题 $\neg(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge R)$，试构造其真值表。

解：此公式含有三个命题变元 P、Q、R，因此有 $2^3=8$ 组真值指派，按 P、Q、R 取值顺序，8 个真值指派为（0，0，0）、（0，0，1）、（0，1，0）、（0，1，1）、（1，0，0）、（1，0，1）、（1，1，0）、（1，1，1）。对于每一组真值指派按联结词执行顺序，求得公式的真值，构成真值表如表 1-13 所示。

表 1-13

$P\ Q\ R$	$P\vee Q$	$\neg(P\vee Q)$	$P\wedge R$	$\neg(P\vee Q)\rightarrow(P\wedge R)$
0 0 0	0	1	0	0
0 0 1	0	1	0	0
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	1	0	0	1
1 0 0	1	0	0	1
1 0 1	1	0	1	1
1 1 0	1	0	0	1
1 1 1	1	0	1	1

【例 1-10】 给出公式 $\neg(P\wedge Q)$ 和 $\neg P\vee\neg Q$ 的真值表。

解：由于两个公式都只含有两个命题变元 P、Q，因而有 $2^2=4$ 组真值指派为：（0，0），（0，1），（1，0），（1，1）。它们的真值表如表 1-14、表 1-15 所示。

表 1-14

$P\ Q$	$P\wedge Q$	$\neg(P\wedge Q)$
0 0	0	1
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	0

表 1-15

$P\ Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$
0 0	1	1	1
0 1	1	0	1
1 0	0	1	1
1 1	0	0	0

由【例 1-10】可以看到，两个公式在不同的真值指派下，其对应的真值完全相同。就是说它们的真值表是相同的。两个公式如果它们的真值表相同，则可以说它们是相等的。对【例 1-10】的两个公式，就有如下关系：

$$\neg(P\wedge Q)=\neg P\vee\neg Q$$

1.3.4 命题公式的基本定律

两个公式是否相等可以用真值表给以验证，但是，这是一件十分麻烦的事情。一个公式有 n 个变元的话，每个真值表就有 2^n 行，命题变元较多时，计算量很大，需要花费很长的时间。此外，用真值表计算比较机械、呆板，不利于逻辑思维能力的培养和推理能力的提高。因此，我们一般采用称为“推导法”的方法，先用真值表的方法得到一些基本等式，称之为命题定律，然后利用基本定律推导而证明两个公式的相等。

常用的关于¬、∧、∨的基本定律如下：

（1）交换律：$P \wedge Q=Q \wedge P$

$P \vee Q=Q \vee P$

（2）结合律：$P \vee (Q \vee R)=(P \vee Q) \vee R$

$P \wedge (Q \wedge R)=(P \wedge Q) \wedge R$

（3）分配律：$P \wedge (Q \vee R)=(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R)=(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

（4）同一律：$P \vee 0=P$

$P \wedge 1=P$

（5）互否律：$P \vee \neg P=1$

$P \wedge \neg P=0$

（6）双重否定律：$\neg (\neg P)=P$

（7）等幂律：$P \vee P=P$

$P \wedge P=P$

（8）零一律：$P \vee 1=1$

$P \wedge 0=0$

（9）吸收律：$P \vee (P \wedge Q)=P$

$P \wedge (P \vee Q)=P$

（10）德.摩根律：$\neg (P \vee Q)=\neg P \wedge \neg Q$

$\neg (P \wedge Q)=\neg P \vee \neg Q$

以上每一条定律都可以用真值表给以验证。【例 1-10】就验证了德.摩根律。同样，我们可以验证其他定律。

此外，关于联结词“→”和“↔”的两个基本定理，也可以用真值表来验证。

（1）$P \to Q=\neg P \vee Q$

（2）$P \leftrightarrow Q=(P \to Q) \wedge (Q \to P)=(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)=(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

这两个定理说明了联结词“→”和“↔”可以用¬、∧、∨来表达。我们称这两个式子为联结词化归公式。这两个式子在以后推导中经常用到。

下面，我们用推导法证明命题公式的相等。

【例 1-11】 证明 $(P \wedge (Q \wedge R)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge R))=Q \wedge R$。

证明：$(P \wedge (Q \wedge R)) \vee (\neg P \wedge (Q \wedge R))$

$=((Q \wedge R) \wedge P) \vee ((Q \wedge R) \wedge \neg P)$

$=(Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg P)$

$=(Q \wedge R) \wedge 1$

$=Q \wedge R$

证毕。

【例 1-12】 证明 $P \to (Q \to R)=Q \to (P \to R)=\neg R \to (Q \to \neg P)$。

证明：先证明第一个等式：

$P \to (Q \to R)$

$=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=\neg Q\vee(\neg P\vee R)$

$=Q\to(\neg P\vee R)$

$=Q\to(P\to R)$

再证明第二个等式：

$P\to(Q\to R)$

$=\neg P\vee(\neg Q\vee R)$

$=R\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$=\neg R\to(Q\to\neg P)$

证毕。

【例 1-13】 证明 $Q\vee\neg(\neg P\vee Q)\wedge P=1$。

证明： $Q\vee\neg(\neg P\vee Q)\wedge P$

$=Q\vee(\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg P)$

$=Q\vee((P\wedge\neg Q)\vee\neg P)$

$=Q\vee((P\vee\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg P)$

$=Q\vee(1\wedge(\neg Q\vee\neg P))$

$=Q\vee(\neg Q\vee\neg P)$

$=(Q\vee\neg Q)\vee\neg P$

$=1\vee\neg P$

$=1$

证毕。

1.4 永真式和永假式

前面曾介绍过，用特定的命题取代命题公式的命题变元，其结果是一个命题。所得命题的真值仅依赖于取代各变元的命题的真值。也就是说，真值表中命题的每一个记入值，仅依赖指派给各变元的命题真值，而独立于命题本身。表中不同的行，对应不同的指派的真值集合，这种指派有时称为变元赋值。对应公式中各命题变元的所有可能的真值指派，真值表列出所有命题的全部真值。

一般而言，一个命题公式的真值表的最后一列上，既有 1 也有 0。也就是说，用特定的命题取代公式中的各命题变元之后，该公式既能给出其值为真的命题，也能给出其值为假的命题。例如表 1-12 就存在这样若干特定结构的命题公式，即无论给各变元指派何种真值，这些命题公式所得的真值总是 1 或总是 0。

定义 1.10 给定一个命题公式，若无论给公式中各变元指派何种真值，公式所给出的真值恒为真，则称给定命题公式为重言式或永真式。

定义 1.11 给定一个命题公式，若无论给公式中各变元指派何种真值，公式所给出的真值恒为假，则称给定命题公式为矛盾式或永假式。

定义 1.12 给定一个命题公式，至少存在一个指派使其真值为真，则给定命题公式为可满足式。