高級中學

代數

（自然科組）

編著者　林致平

遵照　教育部五十一年七
月修正中學課程標準編著

第四冊

正中書局印行

183

中華民國五十四年九月臺初版
中華民國五十八年八月臺四版

新正中本教科書　高級中學代數（自然科組）

（全四册）第四册　基本定價　七角三分
（外埠酌加運費匯費）

編著者　林致平
發行人　李潔
發行印刷　正中書局
（臺灣臺北市衡陽路二十號）
海外總經銷　集成圖書公司
（香港九龍亞皆老街一一一號）
海風書店
（日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地）

內政部登記證　內版臺業字第〇六七八號(4816)旭

編輯大意

一、本書遵照　教育部民國五十一年七月修正公布之中學課程標準高中代數(自然科組)教材大綱編輯。適於以自然學科爲主之教學需要。

二、本書分編爲第一、二、三、四册，供高中第二、三兩學年四個學期之用。

三、本書內容，凡　部頒本科課程標準所訂綱目，均經列入。取材週到縝密，理論務求謹嚴，解說極爲詳晰，尤注意數學觀念之養成。

四、全書編述由淺入深，循序漸進，首對代數之基本法則，加以複習，俾收溫故知新之效；其屬初中代數所不述或述而未詳者，多增例題，藉使讀者對理論與應用，均能諳熟。

五、本書習題，數量豐富，均經審慎編撰，難易互見，具有觸類旁通，相互引證之效。讀者按步練習，對於原理、法則當能自然加深了解，運用自如。

六、本書編排，疏漏難免，尚望教學諸君，不吝賜教，俾臻完善，毋任感幸。

編者謹誌

中華民國五十三年三月

第四册目錄

（自然科組）

第十八章 方程式論

第十九章 高次方程式

第二十章 行列式

第二十一章 消去法

第二十二章 無窮級數

中英文名詞對照表

第十八章

方 程 式 論

18.1 一元 n 次方程式 凡一元 n 次有理方程式，均可化爲下列之形式：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

其中 x 表示未知數；$a_0, a_1, a_2,\cdots\cdots, a_n$ 爲無公約數之常數係數，而 $a_0\neq0$.

或化爲下列之形式：

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \qquad (2)$$

其中 $b_1, b_2,\cdots\cdots b_n$ 爲常數係數。

各項之係數均異於 0 的方程式，稱爲**完全方程式**；否則，稱爲**不完全方程式**。一元 n 次完全方程式，共有 $n+1$ 項。本章內方程式之係數，除另加說明者外，均爲有理數。

在本章以後各節中，所謂方程式，除另有說明者外，係指形如 (1) 或 (2) 之一元 n 次方程式；且爲簡便計，常以 $f(x)$ 表示 (1) 或 (2) 左邊之多項式。

(一) 基本定理及有理根

18.2 方程式之根 若一數 a 合於 $f(a)=0$, 則 a 稱爲 $f(x)=0$ 之根。由此定義，可推得方程式 $f(x)=0$ 有下列之性質：

(1) 若 $a_n=0$（或 $b_n=0$），則 $f(x)=0$ 有一根爲零，若 $a_n=a_{n-1}=0$（或 $b_n=b_{n-1}=0$），則有二根爲零，餘類推。

(2) 若 $f(x)$ 各項係數之代數和爲零，則 $f(x)=0$ 有一根爲 1.

(3) 若 $f(x)$ 各項係數的符號相同，則 $f(x)=0$ 無正實根。

此乃因不論 x 爲任何正實數，均不能使 $f(x)$ 之值等於 0 之故。例如下列之方程式無正實根：

$$x^3+2x^2+1=0$$

(4) 若 $f(x)=0$ 爲完全方程式，而其係數之符號係正負相間，則此方程式無負實根。

此乃因不論 x 爲任何負實數，均不能使 $f(x)$ 之值等於 0 之故。例如下列二方程式均無負實根：

$$f(x)=x^3-2x^2+3x-1=0$$

$$\phi(x)=2x^4-8x^3+5x^2-x+1=0$$

當 $x<0$ 時，$f(x)$之值恆小於 0；$\phi(x)$ 之值恆大於 0.

18.3 方程式之基本定理

定理一 若 $f(x)$ 爲一次式 $x-a$ 與另一多項式之積，則 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之根。反之，若 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(x)$ 爲一次式 $x-a$ 與另一多項式之積。本定理亦稱因式定理。

【證】 若 $f(x)=(x-a)\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 爲一多項式，則 $f(x)=0$, 而 a 爲 $f(x)=0$ 之根，其理至爲明顯。

反之，設 $f(a)=0$, 則

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x)-f(a)\\&=a_0(x^n-a^n)+a_1(x^{n-1}-a^{n-1})+\cdots\cdots+a_{n-1}(x-a)\\&=(x-a)\{a_0(x^{n-1}+x^{n-2}a+\cdots\cdots+a^{n-1})\\&\qquad+a_1(x^{n-2}+\cdots\cdots+a^{n-2})+\cdots\cdots+a_{n-1}\}\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 爲 $x-a$ 與一個 $n-1$次多項式之積。(如$f(x)$爲二次式，則 $\phi(x)$ 爲一次式。)

例　解 $x^3-2x^2+2x-1=0.$

【解】 由觀察，知 1 爲原方程式之一根。分解因式，得原式左邊$=(x-1)\ (x^2-x+1)$。解 $x^2-x+1=0$, 得

$$x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i),$$

故原方程式之根爲 1 與 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}\,i)$。

定理二　任一 n 次方程式，至少必有一根。

本定理之證明屬於高等數學範圍，玆從略。

定理三　任一 n 次方程式，必有 n 個根，且僅有 n 個根。

令 $f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0.$　　(1)

據定理二，方程式 $f(x)=0$ 至少有一根。令此根爲 a_1, 則據 § 18.3之定理，得

$$f(x)=(x-a_1)\,\phi_1(x).$$

$\phi_1(x)$ 爲 $n-1$ 次之多項式。同理，方程 $\phi_1(x)=0$ 亦必有一根。令此根爲 a_2, 則

$$\phi_1(x)=(x-a_2)\,\phi_2(x).$$

而 $f(x)=(x-a_1)\ (x-a_2)\,\phi_2(x)$

$\phi_2(x)$ 爲 n-2 次之多項式。繼續用同一推理至 n 次，可得

$$f(x)=(x-a_1)\ (x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n)\qquad(2)$$

由此式得知，當 x 等於 $a_1,\ a_2,\ a\ ,\cdots\cdots a_n$ 等 n 個數中之任何一數時，$f(x)$ 之值均等於 0. 故方程式 $f(x)=0$ 有 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots a_n$ 等 n 個根。

而當 x 不等於 $a_1,\ a_2,\cdots\cdots a_n$ 等 n 個數之任一數時，(2) 式右邊諸因式之值不爲 0, 亦即 $f(x)$ 之值不等於 0. 故 $f(x)=0$ 之根不

能多於 n 個（參閱 § 13.2 定理一）

如已知一方程式之諸根，用本定理，可求得此方程式。

例 已知一方程式根爲 -2, 0, $\frac{1}{2}$, 與 1, 求此方程式。

【解】 所求之方程式爲

$$f(x)=(x+2)\ (x-0)\ (x-\frac{1}{2})\ (x-1)=0.$$

即 $$2x^4+x^3-5x^2+2x=0.$$

18.4 **重根** 方程式之諸根中，可有等值者，等值之根，稱爲重根，如有二根等值，則稱爲有二重根；如有三根等值，則稱爲有三重根；餘仿此，重根可爲有理根、無理根、或虛根。

例如方程式 $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$ 可書爲 $(x-1)^4=0$, 其四根皆爲 1, 故有四重根。

又如方程式 $x^4+2x^3+3x^2+2x+1=0$ 有二組二重虛根

$$x=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i.$$

18.5 **方程式之有理根**

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,\ (a_0\neq 0)$$

各係數均爲整數，則 $f(x)=0$ 之有理根係含於以 a_n 之因數爲分子，以 a_0 之因數爲分母所能得到之一切整數與分數內。

因設 $\frac{\beta}{\alpha}$ 爲 $f(x)=0$ 之根（$\frac{\beta}{\alpha}$ 爲最簡分數），由 § 5.8 及 § 18.3, 知 α 必爲 a_0 之因數，而 β 必爲 a_n 之因數。若 $\alpha=\pm 1$, 則 $\frac{\beta}{\alpha}$ 即爲整數。

於此，可知如 $a_0=1$, 則 $f(x)=0$ 只有整數根而無分數根。

方程式之有理根，可根據上述之性質，藉綜合除法試探以求之。

例　求 $f(x)=4x^4+20x^3-13x^2-95x+84=0$ 之有理根。

【解】　若原式有有理根，則必包含於以84之因數爲分子，以4之因數爲分母所能得到之整數與分數內，亦卽包含於 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm7, \pm12, \pm14, \pm21, \pm42, \pm84, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{7}{2}, \pm\frac{21}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{7}{4}, \pm\frac{21}{4}$ 諸數內。

用綜合除法試探，知 1 爲原式之一根。自原式中分解出 $x-1$ 之因式，得 $4x^3+24x^2+11x-84=0.$

再用綜合除法試探，知 -4 爲此方程式之一根，繼續分解出 $x+4$ 之因式，得 $4x^2+8x-21=0.$

解之，得　$x=\frac{3}{2}$ 與 $-\frac{7}{2}.$

故原方程式之根爲 $-4, -\frac{7}{2}, 1$ 與 $\frac{3}{2}.$

18.6　根之範圍試探

定理　設 α 爲一正實數，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，如所得商之諸係數與餘數同號，則 $f(x)=0$ 不能有大於 α 之根；設 α 爲一負實數，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，如所得商之諸係數與餘數之符號依次爲正負相間，則 $f(x)=0$ 不能有小於 α 之根，亦卽不能有絕對値大於 $|\alpha|$* 之負根。

* 此處如增列「設 α 爲一負實數，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，如所得商之諸係數與餘數同號，則 $f(x)=0$ 不能有大於 α 之根；設 α 爲正實數，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，如所得商之諸係數與餘數之符號依次爲正負相間，則 $f(x)=0$ 不能有小於 α 之根」，則本定理可擴充並簡述之爲設 α 爲實數，以 $x-\alpha$ 除 $f(x)$，如所得商之諸係數與餘數同號，則 $f(x)=0$ 不能有大於 α 之根；如所得商之諸係數與餘數之符號依次爲正負相間，則 $f(x)=0$ 不能有小於 α 之根」，惟上述之增列之點已包括在 § 18.2 根之性質(3)與(4)中，在該處已爲一明顯之性質，故此處不增列。

因依綜合除法之性質，在上述兩種情況下，若增加 a 之絕對值，則除得之結果中，除第一項係數之值不變外，以後各項係數均將增大其絕對值而不變其符號；如此將使最後餘數之絕對值更較前為大，而不能為 0，故本定理成立。

本定理在用綜合除法去探求方程式之有理根時，可減少試探之次數或免去不必要之試探。

例一 用本節定理證明 $f(x)=4x^4+20x^3-13x^2-95x+84=0$ 無大於 3 之正根（參閱上節例題）。

【解】 用綜合除法以 $x-3$ 除 $4x^4+20x^3-13x^2-95x+84=0$，得

$$\begin{array}{rrrrr|r} 4 & +20 & -13 & -95 & +84 & 3 \\ & +12 & +96 & +249 & +462 & \\ \hline 4 & +32 & +83 & +154 & +546 & \end{array}$$

商之諸係數之符號與餘數之符號均為正，故原方程式無大於 3 之正根，上節例題中所列之可解之根，凡大於 3 者均可不必試探。

讀者可試用 $x-4$ 除 $f(x)$，觀察商之諸係數與餘數是否仍係同號且其值較用 $x-3$ 除時所得者為大。

本節定理係一充足條件，因其只說如有一 a 值能適合此項試驗，則 $f(x)=0$ 即無大於或小於 a 之根，但並未說凡大於 $f(x)=0$ 之最大根或小於其最小根之一切值，均適合此項試驗。實則此類數值並不一定能適合此項試驗，例如本例題之最大根為 $\frac{3}{2}$，但用 $x-2$（2 大於最大根 $\frac{3}{2}$）試除 $f(x)$，所得商之諸係數與餘數之符號並不完全相同。

例二 用本節定理證明 $f(x)=4x^4+20x^3-13x^2-95x+84=0$

無小於 -6 之負根（參閱上節例題）。

【解】 用綜合除法以 $x+6$ 除 $4x^4+20x^3-13x^2-95x+84$，得

$$\begin{array}{rrrrr|r} 4 & 20 & -13 & -95 & +84 & -6 \\ & -24 & +24 & -66 & +966 & \\ \hline 4 & -4 & +11 & -161, & +1050 & \end{array}$$

商之諸係數與餘數之符號依次爲正負相間，故原方程式無小於 -6 之負根。

讀者可試改用 $x+7$ 除 $f(x)$，觀察商之諸係數與餘數之符號是否仍係正負相間且其絕對值較用 $x+7$ 除時所得者爲大。

習 題 六 十 四

已知各方程式之根如次，設以 x 表示未知數，求作各方程式：

1. $a,\ -b,\ a+b,$　　　2. $\frac{2}{3}，\frac{3}{2}，\pm\sqrt{3}.$

3. $2,\ 2,\ -2,\ -2,\ 0,\ 5.$

4. 試證 1 與 $\frac{1}{2}$ 各爲方程式 $4x^5-23x^3+33x^2-17x+3=0$ 之二重根。

5. 試證方程式 $3x^3-3x+1=0$ 不含有理根。

6. 試證方程式 $2x^4-3x^3+x^2-\frac{x}{2}+\frac{5}{6}$ 不含有理根。

7. 設 $3x^3+mx^2+x+n=0$ 有三重根，求 m 與 n 之值。

8. 試用根之範圍試探定理證明方程式 $3x^4-17x^3+25x^2-74x-120=0$ 之根在 $+6$ 與 -2 範圍之內。

已知下列各方程式至少有一個有理根，試解之：

9. $x^3-x^2-14x+24=0$　　　10. $2x^3+3x^2-2x-3=0.$

11. $6x^3-23x^2-5x+4=0.$　　　12. $x^3-4x^2+2x-\frac{}{8}=0.$

13. $3x^4-2x^3+2x^2+x=0.$　　14. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4=0.$

15. $2x^4+7x^3+4x^2-7x-6=0.$　　16. $x^4+4x^3+8x^2+8x+3=0.$

17. $x^4-2x^3-20x^2-21x-18=0.$

18. $x^5-8x^4+15x^3+20x^2-76x+48=0.$

19. $x^5+3x^4-15x^3-35x^2+54x+72=0.$

20. $4x^5-9x^3+6x^2-13x+6=0.$

（二） 根與係數之關係

18.7 根與係數之關係 講述一元二次方程式時，曾討論其根與係數之關係 (§ 7.4)。茲申論一元 n 次方程式之情形。設 n 次方程式

$$f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0 \quad (1)$$

之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_n$ 由 § 18.3 定理三，得恆等式

$$f(x)\equiv(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n) \quad (2)$$

展開 (2) 式右邊 (§ 15.5) 成 x 之降冪式，以之與 (1) 式比較，因 x 之同次項係數應相等，得：

$$\begin{aligned}
-b_1&=\Sigma\alpha_1,\\
b_2&=\Sigma\alpha_1\alpha_2,\\
-b_3&=\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(-1)^n b_n&=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n.
\end{aligned}$$

此爲一元 n 次方程式 $f(x)=0$ 之根與其係數之關係，亦可用文字敘述如下：

(1) 第二項係數 b_1 與此 n 個根之和之絕對值相等而符號相反。

(2) 常數項 b_n 與此 n 個根連乘積之絕對值相等，其符號之爲相同或相反，視根之個數爲偶數或奇數而定。

(3) 中間各項之係數 b_r 等於此 n 個根中每 r 個根乘積（共有 ${}_nC_r$ 個積）之和之絕對值；符號之相同或相反，視 r 爲偶數或奇數而定。

若原方程式爲不完全式，可視其缺項之係數爲 0.

注意 由任一個一元 n 次方程式，藉根與係數之關係，均可仿前得 n 個方程式，而以其 n 個根爲 n 個未知數。讀者愼毋以爲將此 n 個方程式聯立解之，卽易得此 n 個根之值。實則不然，此種處理，結果仍需求解原方程式，如循此途以求解方程式，祇徒費勞力，因自前列之 n 個方程式中，消去任意 n-1 個未知數後，所得之僅含一未知數之方程式，其形式仍與原方程式之形式相同，僅未知數 x 變換成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ 等數中之一數而已，茲就下列說明之。

例如 令方程式 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 之三根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 則

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-p_1, \tag{1}$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=p_2, \tag{2}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-p_3. \tag{3}$$

分別以 $\alpha_1^2, -\alpha_1$, 1 乘 (1), (2), (3) 三式，相加得

$$\alpha_1^3=-p_1\alpha_1^2-p_2\alpha_1-p_3,$$

卽
$$\alpha_1^3+p_1\alpha_1^2-p_2\alpha_1+p_3=0$$

上式與原方程式相較，僅 x 爲 α_1 所替代而已，其餘完全相同，顯見此種處理，無助於求解。

但若方程式之諸根間，另有某種已知之關係，則常可藉根與係數之關係求解，且求解常較簡易。

例一 已知方程式 $x^3+8x^2+5x-50=0$ 有二重根，試解之。

【解】 令此方程式之三根爲 $a, a, b,$

則 $$2a+b=-8, \tag{1}$$

$$a^2+2ab=5, \tag{2}$$

$$a^2b=50, \tag{3}$$

解 (1) 與 (2), 得 $a,b=-5,\ 2,\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{22}{3}$.

代入 (3)，知僅前一組之值能適合，故原方程式之根爲 $-5, -5, 2.$

例二 已知方程式 $4x^3-24x^2+23x+18=0$ 之三根成等差級數，解此方程式。

【解】 由假設，令所求三根分別爲 $a-b,\ a,\ a+b$, 則

$$a-b+a+a+b=\frac{24}{4},\ \text{卽}\ a=2, \tag{1}$$

$$(a-b)a+(a-b)(a+b)+a(a+b)=\frac{23}{2},$$

卽 $$3a^2-b^2=\frac{23}{4}, \tag{2}$$

$$a(a-b)(a+b)=-\frac{18}{4},$$

卽 $$a(a^2-b^2)=-\frac{9}{2}. \tag{3}$$

解 (1) 與 (2)，得 $a=2,\ b=\pm\dfrac{5}{2}$.

上兩組解均能適合(3)，其所能構成之 $a-b,\ a,\ a+b$ 之值只有一組，卽 $-\dfrac{1}{2},\ 2,\ \dfrac{9}{2}$, 亦卽所求之三根。

例三 求方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 三根成幾何級數之條件。

【解】 設此方程式之三根爲 $\dfrac{a}{b},\ a,\ ab$,

則
$$\frac{a}{b}+a+ab=-p, \qquad (1)$$
$$\frac{a^2}{b}+a^2+a^2b=q, \qquad (2)$$
$$\frac{a}{b}\cdot a\cdot ab=-r,$$
即
$$a^3=-r. \qquad (3)$$
(2)÷(1)，得
$$a=-\frac{q}{p}. \qquad (4)$$
由 (3) 與 (4) 消去 a, 得 $q^3=rp^3$.

此即所求之條件。

例四 設方程式之根爲 $-1, 1, 2,$ 求作此方程式。

【解】 設所作之方程式爲 $x^3+px^2+qx+r=0,$

則
$$-p=-1+1+2=2, \qquad p=-2.$$
$$q=-1+2-2=-1,$$
$$-r=(-1)\cdot 1\cdot 2=-2, \qquad r=2.$$
故所求之方程式爲 $x^3-2x^2-x+2=0.$

18.8 根之對稱式 講一元二次方程式時，亦曾述及根之對稱式與方程式諸係數之關係 (§ 7.6)，上節中表示根與係數關係之諸式，皆爲根之對稱式，凡用根組成之對稱式，均可用方程式之係數表示之。

例一 設方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之三根爲 $a. b. c.$ 求下列諸值：(1) $a^2+b^2+c^2$, (2) $a^3+b^3+c^3$, (3) $a^4+b^4+c^4$,

(4) $(b+c-3a)(c+a-3b)(a+b-3c)$,

(5) $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$.