苏俄教育科学院

初等數学全書

第一卷

算 术

第一分册

И. Г. 巴什瑪柯娃
А. П. 尤什凱維奇著
И. В. 普罗斯庫李亚柯夫

高等教育出版社

苏俄教育科学院初等数学全书

第一卷

算术

第一分册

П. С. 亚力山大罗夫，А. И. 馬庫雪維奇，А. Я. 辛欽主編

И. Г. 巴什瑪柯娃，А. П. 尤什凱維奇，И. В. 普罗斯庫李亚柯夫著

刘 紹 祖 譯

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据苏联國立技术理論书籍出版社(Гостехиздат)出版的亚力山大罗夫(П. С. Александров)、馬庫雪維奇(А. И. Маркушевич)和辛欽(А. Я. Хинчин)主編的“初等数学全书”(Энциклопедия элементарной математики)第一卷巴什瑪柯娃(И. Г. Башмакова),尤什凱維奇(А. П. Юшкевич),普罗斯庫李亚柯夫(И. В. Проскуряков),辛欽(А. Я. Хинчин)和布拉吉斯(В. М. Брадис)合著的“算术”(Арифметика)1951年版譯出的。

本卷(第一卷)共有四篇,譯本第一分册包括前两篇:“記数制度溯源”及“集合、群、环和体的概念;算术的理論基础”。在第一篇内,作者用辯証唯物的观点,引用丰富的材料,討論了人类在各个不同发展时期,記数制度的起源及其衍变的情况,并有力地批駁了資产阶級唯心主义者所散布的数学基本概念是先驗的这一荒謬論断。第二篇,著者以新穎的論述方法讲述了近代数学中最一般的概念:集合、群、体等,并利用他們討論了自然数、整数、有理数、实数、复数、四元数的构造及其性质。

本书可作为中学教师,教育学院与师范学院数学物理系学生的参考讀物,也可供一般大学数学系学生参考之用。

本书(第一分册)由刘紹祖譯出,其中第二篇曾經王朔瑞同志看过一遍。

苏俄教育科学院初等数学全书

第一卷

算术·第一分册

И. Г. 巴什瑪柯娃
А. П. 尤什凱維奇 著
И. В. 普罗斯庫李亚柯夫

刘紹祖譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业營业許可証出字第054号)
京华印书局印刷 新华书店发行

統一书号 13010·622 开本 850×1168 1/32 印張 9 12/16
字数 231,000 印数 0001—10,000 定价(6)半1.10
1959年6月第1版 1959年6月第1次印刷

参考文献

1. 亚历山大罗夫(П. С. Александров), 集与函数的泛論初阶(有楊永芳譯本, 高等教育出版社出版)。

2. 魯金(Н. Н. Лузин), 实变函数論(有何旭初譯本, 高等教育出版社出版)。

3. 奥古涅夫(Л. Я. Окунев), 近世代数基础(Основы современной алгебры, Учпедгиз, 1941)。

4. 范·代尔·瓦尔登(Б. Л. Ван Дер Варден), 近世代数(Современная алгебра, ч. I, Гостехиздат, 1947)。

5. 勃罗斯庫列亚柯夫 (И. В. Проскуряков), 数与多項式 (有吳品三譯本, 高等教育出版社出版)。

6. 什密达特(О. Ю. Шмидт), 群的抽象理論(Абстрактная теория групп, Гостехиздат, 1933)。

7. 叶菲莫夫(Н. В. Ефимов), 高等几何(有裘光明譯本, 高等教育出版社出版)。

8. 庫洛什(А. Г. Курош), 群論(Теория групп, Гостехиздат, 1944)。

9. 柯士青(В. И. Костин), 几何学基础(有苏步青譯本, 高等教育出版社出版)。

10. 狄德金(Э. Дедекинд), 連續性与无理数(Непрерывность и иррациональные числа, Одесса, 1923)。

11. 辛欽(А. Я. Хинчин), 数学分析八讲 (Восемь лекций по математическому анализу, Гостехиздат, 1943)。

12. 庫洛什(А. Г. Курош), 高等代数教程(有柯召譯本, 高等教育出版社出版)。

13. 庫玆明, 法捷耶夫(Р. О. Кузьмин и Д. К. Фадеев)复数的代数与算术(Алгебра и арифметика комплексных чисел, Учпедгиз, 1939)。

14. 捷査罗 (Э. Чезаро), 代数分析初步与无穷小計算 (Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ОНТИ, 1936)。

引　論

每一种記数法的目的都是要利用一組数目不多的独立符号把任一自然数表示出来。这个目的可以借助一个唯一的符号 1（单元）来达到。这样一来，要用单元表示出一个自然数时，先看在这个自然数内包含有多少个单元，然后重复单元符号那样多次就把这个自然数表示出来了。而加法在这时就成为单元的单純的累加，减法則变成去掉这些单元。这种記数法的观念誠然十分簡单，但是这种記数制度却是极不方便的。在实用上，要写出較大的数时便不能应用这种制度，只有那些对計数知識还未掌握到一二十的民族曾經用过它。

我們的十进位記数制度所依据的那个原則，乃是記录数的最完善的原則。在这种記数法中，从 1 到 9 各数分別用符号 1, 2, 3, …, 9 来表示。在它們之内又加进去代表数零的符号 0。于是，仅仅利用这十个符号按照所謂进位值法則，就可以把任何自然数表达出来。

每一个自然数 n 可唯一地表示成这样形状：

$$n=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_110+a_0,$$

其中的 a_i 可取值 0, 1, 2, …, 9。这样，在进位制之下，数 n 可以写成

$$n=a_ma_{m-1}\cdots a_1a_0.$$

每一个符号 a_i 根据以下两事取得它們自己的值：1）它的形式，2）它在写出的数中的位置。例如，如果我們要写出四千这个数，我們应当把数碼 4 安放在由右向左的第四位；在已給情形下，因为沒有其余的三位数，所以在它們的位置上，我們安放上零：

4000。这样一来，按照它所占据的位置，符号 4 便可以表示 4 个单元，4 个十，4 个一百等等的数了。

虽然在表面上这种記数制度是很簡单的，但它却是經过悠久的历史发展而得到的产物，而且許多民族都参与了形成这种記数制度的工作。我們甚至可以这样說，这种記数制度的形成乃是全人类的事业。十八至十九世紀时的法兰西著名数学家和物理学家拉普拉斯曾写道："除了这 9 个符号的形式意义之外，再賦予位置的意义，用它們就能表出一切数的这种思想，是如此簡单，以致于正是由于这种簡单性使我們难于理解它是多么地美妙。但是这种思想对于希腊的偉大天才科学家阿基米德和阿坡罗尼还是頗为模糊的。从这个例子，我們就会看到得来这种記数方法是何等不易！"。

也可以采用异于 10 的其他各数作为进位制的基数。例如，許多学者曾經认为，把有着較多除数 2，3，4，6 的数 12 取作进位制的基数要更为方便些。十进位制之所以有特别广泛的傳播，这和我們双手的手指个数有密切的关系。亚里士多德曾在他自己的"問題集"一书中首先注意到了这种情况。事实上，十进位制同具有其他基数的进位制比較起来并沒有什么突出的优点。从原則上讲，基数是完全可以自由选择的。当然基数不应当选擇得过大，因为在这种情形，就会发生記数制度要包含过多数碼、乘法口訣显得十分麻煩等等缺点。但另一方面，基数也不应該选擇得过小[①]。

过去各个时代的記数制度同我們現代的記数制度并不都是相同的，这可以拿我們的語言（指俄語）作为証明。在数的名称上，称呼数的字和书写时的样式看不出相同的地方。例如，在俄語中，除

① 巴斯加在他的文章"利用数的各位数字之和探討数的整除性"（"О делимости чисел, выведенной с помощью одного сложения их цифр"）中曾首先分析过具有任意基数的数的实质。1654年作，1665 年发表。

对于 1, 2, …, 9 这九个自然数和零有不同的名称外，对于十还有特殊的名称(而在书写时，我們却利用 1 和 0 把十表示成 10)。对于許多高位数也有这样的特殊名称存在: сорок[①] (四十), сто(一百), тысяча(一千), миллион(百万), 以及其他等等。

其次，从 11 到 19 的每一个数，我們分别称作: один-на-дцать, …, девят-на-десять, 就是說，我們把 11 到 19 的各数分别称作从 1 到 9 的各数再附加上"на-десять" (加十)。小品詞"на"在这里显然并不表示乘的意思，关于它的起源，我們要在下面提到。

从 21 到 99 各数絕大部分按着同一原則来讀。按照这个原則，它們被写成: два-дцать один(два-десять один, 二十一), тридцать два(三十二)等等。数四十和九十的名称是例外，我們讀作: сорок, девяносто[②]。若是一数不能折开成几个数名的合称，而有它自己独立的名称时，我們把它叫做樞紐数(如一，二，十，四十，一百，一千等等)。若是一个数的名称是由樞紐数的名称組合起来而得到的，則称它为运算数。如我們将要看到的那样，这两种数的名称上的区别正反映出它們的来源的不同[③]。

类似的現象在其他各种語言中也存在着。例如，在法兰西語言中就保留了非进位制的二十数制的痕迹。法兰西語言中的数二

---

① 数 40 在俄罗斯和东方許多民族的数字內起过特殊的作用，关于这一点，我們将在下面談到。

② Девяносто 不在樞紐数范圍之內(見下文)。有人假定它是由"девять до ста"凑在一起而产生的。

③ 在馬格尼茨基 (Л. Магницкий) 的"算术"內(1703)，把数区分成这样: 十以內的数叫做"手指数" (персты), 十的整倍数叫做"关节数"(суставы), 一百以內的其他数叫做"組合数" (сочинения)。用类似方法区分数的最早的著名例子也在十世紀时人海尔伯尔特的著作中出現过。显然，在这里我們接触到了区分数为樞紐数与运算数的反映。"手指数"和"关节数"这些名詞与用手指計数有着关联是毫无疑义的。

十乃是一个樞紐数，它的名称不是由前十个数的名称形成的，而讀者 vingt（二十）。数 80 讀做 quatre-vingt（四个二十），90 讀做 quatre-vingt-dix（四个二十又一十），120 讀做 six-vingt（六个二十）。在古法兰西語言中，除此而外，还把 140 讀做七个二十，160 讀作八个二十，300 讀作十五个二十等等。在罗馬、德国、英国語言中，如同在俄罗斯語言中所見到的那样，对于一百、一千等数也有特殊的名称。非进位制的二十数制，除法兰西語言外，在英語、荷兰語中也保留了它的殘迹。例如，按照英語，score 一字除表示其他一些概念外，还表示数 20，而 three score 表示数 60。在斯堪迪那維亚語言中，除此以外还保留有五数制的显明痕迹。

由此可以得出結論：

1）現代书写記数制是严格的进位制，而在口头記数制中却不是严格的进位制；

2）书写記数制是严格的十进位制，而口头記数制则还有五数制或其他制度存在过的痕迹；

3）在书写制度中，仅有十个樞紐数 0, 1, 2, …, 9，而在口算中则还有其他的樞紐数，其中每一个樞紐数都是与其邻近的一个数組的基数，也就是說，它是数串的某一段数的基数，而不是整个数串的基数（例如在俄語中，从一百开始，口算是以一百与較小樞紐数或运算数組合起来进行的：сто один, сто два，一百零一，一百零二等等）。

可以注意的是，我們口头的語言反映出了比我們的記数制度較早的一个記数阶段。例如，发生在我們进位制之前的罗馬书写数字，按其結构，就近似于当代欧洲民族的口头数字。

罗馬数字中的樞紐数是：I——单元，V——五，X——十，L——五十，C——一百，D——五百，M——一千。在这儿沒有数零。这个制度是具有五数制痕迹的非进位制十数制（5, 50, 500 的記号是独立的符

号)。經过楅組数的加法和减法就得到了所有的运算数。例如，数1948在这个制度中就被写成：MCMXLVIII。

許多"原始"民族的記数方法跟罗馬記数制度之間的关系，大概正和罗馬书写数字跟現代口算之間的关系一样。由上所述，显然可見，要闡明記数制度的起源(无論是現代的进位制或是非进位制)，我們不仅要利用人类学的資料，而且还要利用語言学的資料。

§1. 計算的最初发展阶段

数的概念是現代数学的基本概念之一。同时，它也是最古老的概念之一。凡是已經具有文字的一切有文化的民族，都已有了数的概念以及这种或那种的記数制度。关于史前时期的数的概念，我們只能根据間接材料来判断。这間接材料的来源，首先是語言学，其次是人类学。恩格斯曾把史前期分为蒙昧时期与野蛮时期，人类学基于对現尚停留在这两时期的各民族的文化的研究，就能判定現代文明民族的祖先在相应时期的生活状况。所可惜的是，人类学資料的采集工作，有很长一个时期，为傳教士和殖民者所独占。而在十九世紀末叶，当学者們的注意力，为科学发展的进程强有力地引向史前期人类生活問題的时候，才发覺原来所謂“原始”民族在那时已几乎不存在了。在此时期之前，資本主义国家的帝国主义政策几乎毫无例外地把許多土著部族引向灭亡。例如，澳大利亚的塔斯馬尼亚人部族① 在二十世紀初被完全毁灭，对于南美的居民，曾經是数量很多的阿比帕部族，也遭到同样的厄运。

因此，在追溯数的发展阶段的时候，势必只好滿足于十分貧乏的資料了。但是，关于这个概念的起源的問題是这样地重要，以致于即使所能得到的景况并不完备，还是具有很大的价值，特别是，对于揭破現尚存在的資产阶級唯心主义的“理論”有重要的意义。按照这种理論，数的概念乃至全部自然数，对于人都是天生就的。例如，流行的克朗涅克尔的話就說：“整数是上帝創造的，其他全部数則是人的双手的事业”。数的发展的最初阶段以及其他許多基

① 塔斯馬尼亚人(тасманийцы)是塔斯馬尼亚島上的土著居民，19 世紀前半期曾遭受英国殖民者的野蛮屠杀。塔斯馬尼亚人的語言与澳大利亚語相近——譯者，据苏联百科全书中譯本，以下各譯者注均依此，不另說明。

本的数学概念的研究完全推翻了同类的資产阶級的“理論”。客观的研究表明了这些概念的起源与原始社会集体的生产实践之間的联系，也闡明了我們“直覚”本身并不是一成不变的范疇，而且甚至連那些所謂“素有的”概念究其实也决然不是天生的。数的概念发展的最初阶段的研究給我們指出：整数由人所創造，而且它們也是人的双手的事业。

在十九世紀，資产阶級学者（如泰劳以及其他等人）中間，曾經流行过一种見解，認为“原始”人关于世界的全部知識是用如下方法得到的：观察自然現象，并与早先見过的現象两相比較，最后再运用邏輯推理。这时，“原始”人显得就是某种直观哲学家了。事实上，人并不是从抽象理論而是从劳动中、从求生存的斗爭中获得关于世界的知識的，并不是从消极的观察自然，而是从改造自然界而获得关于世界的知識的。

馬克思在“关于瓦格納的书的意見”中曾写道，人对于自然界的关系，从一开始，就不是通过理論的途徑，而是通过实踐的，即建立在活动的基础上的途徑，而建立起来的。“正象所有的动物那样，他們（即原始社会的人——著者）最初从吃，喝等等事情和自然界发生关系，就是說，他們不是“停止”在某种固定关系中不动，而是积极地活动，借助于活动取得外部世界的某些物品，以滿足自己的需求”①。

恩格斯在“自然辯証法”中曾写道：劳动是“人生存的第一个基本条件，而且达到这样的程度，以致我們在某种意义上必須說：劳动創造了人本身”②。正是在劳动的过程中，人类創造了象数、自然数、图形等等的基本概念，定出了最簡单的計算法則，以及度量长度、面积、体积的技能。

① 馬恩全集第15卷461頁。

② 馬恩全集第14卷452頁。

同时，数和图形的概念以及它們的基本性质，乃是外部世界的現实事物的性質和关系的反映。

"数和形的概念——恩格斯写道——不是从任何地方得来，而仅仅是从現实世界得来的。人們用十个指头算数目，就是說做第一次的算术运算，这十个指头可以是一切別的东西，但总不是理性的自由創造物。要作計算不但要有被計算的对象，而且还要有这样的能力，使其在考察这些对象时，能够摆脫其他的特性而仅仅顧到数目。而这种能力則是长期的依据于經驗之上的历史发展的結果"①。

那末，让我們来考察一下，数和自然数在人类文化发展的第一个阶段是怎样来表示的，并且回溯一下是怎样逐渐变化、改进而达到了現代的水平。

恩格斯在"家庭、私有制和国家的起源"一书內把史前文化阶段划分成了几个时期。所可惜的是，我們手头的資料还不足以充分明确地把計算发展的各个阶段同这书內所划分的各个时期連系起来。

一直到現代，我們知道还有这样的許多民族，在它們的語言中仅有两个数的名称：一和二。澳大利亚和玻里尼西亚群島②的許多部族，就是直到最近，还只限于这两个数。把这两个数配合起来，这些部族組成了数 3＝二一一，4＝二一二，5＝二一二一一，6＝二一二一二。例如，在托列斯峽③群島的西部部族，它們仅有

① 中譯本反杜林論 37 頁。

② 玻里尼西亚群島是大洋洲的群島，位于太平洋中部，东經 176° 以东。主要島屿为夏威夷和薩摩亚群島。玻里尼西亚群島的总面积約 26000 平方公里，人口約 76 万(1950—1951 年)——譯者。

③ 托列斯峽是介于澳大利亚北部的約克角半島与伊利安間的海峽。連接印度洋和太平洋諸海，寬 170 公尺，屬淺水峽，有許多島屿，岩石，珊瑚礁——譯者。

两个数的名称：1—烏拉勃，2—阿柯札。其次，它們把三算作 $3=2-1$，把四算作 $4=2-2$，把五算作 $5=2-2-1$，把六算作 $6=2-2-2$。这种計算方法乃是最古老的計算方法：二进位制的基础[①]。我們在埃及乘除法中，在埃及分数制度中[②]，在很多种語言中，屡屡遇到这种計数法的遺迹。例如，在古斯拉夫語言中，除了一个数的单数复数外，还有双数（двойственное число）[③]。

① 二进位制对于讀写很不便当，因为在这种制度中，一个数写出来是很长的（例是，数 777 在这制度中就要写成 1100001001），但是它却有着极为重要的优点。

莱布尼兹首先看到二进位制的一种具有原则性的优点。他曾指出，在这种制度中，数的运算异常簡单（加法和乘法表化成为：$1+1=10$，$1\cdot1=1$；在作除法时，不需要預測商数是多少，也不需要尝試商数是不是那样大）。对于实际的計算，莱布尼兹虽未推荐这个記数制度以代替十进位制，但是他曾强調指出："利用 0 和 1 两数作計算虽很长，但从后果上来看，它对于科学却很重要，而且还会引出一些新的发现，这些发现在以后对于数的实际应用，特别在几何学上，是有益处的；这种情况之所以产生，是因为在把数化成最簡单的数，如 0 和 1 时，結果就显露出一种絕妙的排列次序"（見 Explication de l'arithmétique binaire, gui se sert des seuls caractéres 0 et 1, avec des remarque sur son utilité, 1703，此文收于 Leibnizens mathematische Schriften, hsg. v. C. I. Gerhardt, т. VII, Halle, 1863，225 頁；在同书内，也可对讀莱布尼兹在 1698 年給舒倫貝尔格的信）。确实，二进位制对于許多理論研究是十分便当的。

可是，莱布尼兹当时还未預見到，二进位制在計算数学上会带来益处——如同最近所已发生的事情那样，电子計算机的結构正是建立在这个計算制度的基础之上的。利用这种机器进行計算时，在开始要把十进位数化成二进位数，最后还要把得出的結果还原回来。虽然在这些运算上要化掉許多劳动，但是由于利用計算机所得的成果，补偿这些劳动之后，还是綽綽有余的。关于利用計算机进行計算的方法，可参看勒·德·庫得李亚夫采夫（Л. Д. Кудрявцев）的文章：关于利用計算机进行算术运算的原則，数学进展卷五第三期（1950）。

② 参看本篇論文分数那一节中，关于古俄罗斯分数的一系列一半的作用。

③ 在某些語言中，也存在过作为三进位制殘余的三数。在很多种語言中，头三个数的名称异于其他各数的名称，而有性的变化［例如，俄文中的一和二（один, одна, одно; два, две），拉丁字三（tres, tris）］。这种情形說明了这三个字的起源是很古老的。（譯者注：双数和三数都是文法的一个范疇，表示两个或三个物体）。

托列斯峽中的島民，把6以上的数説成“許多—許多”，“极多”或是“无数的”①。在一些部族那儿，“許多”，“无数的”这些字被用来表示大于或等于3的那一切数。

因此，在这一阶段，自然数的个数是有限的，并且有时只有两个。

但是，不应当認为，仅有一和二两数名称的部族，就不会数多于两个或六个东西的集体。要知道，在出現数的名称以前，在某种意义上説，人就已經学会“計数”了。阿比帕部族只有数一、二和三的名称。一个观察者曾写过关于这个部族的一件事情：当这部族的人集合起来去打猎的时候，他們坐在鞍桥上，先把周圍的情形打量一番，如果这时候发現所蓄养的犬群中，即使短少了一只，那末他們就立刻叫喚起这只犬来。这位观察者，对于不会計算而能即刻説出在偌大的狗群中短了一只这事，感到十分惊异，不知道是用什么样的方法办到这事的。

問題是，在这个阶段，数量被領会成表征对象集体的諸种性質之一，它同对象的其他性質象顏色、样式、大小等等共同来确定对象的集体。具体説，就是，这集体的数量性質首先从完整性（該集体的全部对象是否都有了）方面表征出了集体，其次，从一个集体同其他同样对象集体的純順序关系方面表征出了集体（一个集体大于或小于其他的集体）。

在部族的經济还停留在很低的水平，部族間的联系还未建立起来的时候，粗略地説，这时还沒有多少东西需要計算，显然，只有在这样的人类发展阶段，这等“計算”方法才是够用的。

---

① 我們的祖先，同时用数7表示不定多数的这件事情，在俄罗斯的諺語里还保留有痕迹。例如，“七个人不等待一个人”(Семеро одного не ждут)，“多番計量，一次裁剪”(Семь раз отмерь, один раз отрежь)，“有了七个保姆，孩子沒了眼睛”(У семи нянек дитя без глаза)等等。在所有这些諺語里，“七”这个字显然是在“許多”的意义下被使用着。

因此，在数的第一个发展阶段，集体中的对象还沒有順序关系，对于这样的具体集体来說，数原来被看成是它們的独立的数量性質或数量品質的。

在我們現代，計算方法还停留在这个阶段的民族已經不存在了。这个阶段相当于蒙昧时期的第一和第二个阶段。从数量性質上来計算这事，仅仅在某些部族那儿作为殘余而保留着。

由于弓和箭的发明，由于过渡到有組織的狩猎，由于成立起了分离开来的村庄，建立起了彼此間的联系——最初是村庄之間的联系，而后是部族之間的联系，簡言之，由于轉变到了蒙昧时期的高級阶段，用数量性質来作"計算"已經不能滿足需要了。这时，不仅仅要会用"目測"来确定某一总体的数量，而且还要会給別人报出这个数量。例如，也許要給某几个部族傳达这样的事情：經过一定的月数，为了举行会談或去共同打猎，規定人們应該集合起来；或是傳达这样的事情：經过一定期限，全联合部族要凑足一定額数的战斗人員。阿茹特人(澳大利亚人)和玻里尼西亚人[①] 是用下述方法来做这事的：当需要計算的数目較大时，他們采用身体的各个部份作为記数的工具，每一个用来記数的部份，都有它自己的名称和預先規定的在这种記数法中的确切位置。这样一来，从一只手的小指头开始，所列举出的軀体各部份的总数，針对着不同的情況，就表示同样数量的战斗人員、日子或月数。

計算通常从左手的小指头开始，經过所有的手指，然后再轉到手腕、肘子、肩头等等，一直数到右手的小指头，在此以后，如果一个集体还未被数尽，則按着相反的方向繼續进行。这样，在事务关系上，部族中的人，在計算他的对象时，只要記起他曾数到了自己

① 玻里尼西亚人是玻里尼西亚的基本居民，其語言属于馬来—玻里尼西亚語系。由于殖民者的压迫和屠杀玻里尼西亚人的人数从 110 万(18 世紀末)減少到 34 万(1950 年)——譯者。

身体的哪一个部份，那么，再从他的左手小指开始計算，便可重新求得所要找到的那个数。

托列斯峽中的島民，利用人的身体，可以表示三十三以內的数。如果被数的那个总体有多于 33 个的成員，那么他們就采用一束小棍作为計算的工具。正是这种情况：当数尽身体的各个不同部份时，人們采用一束小棍（而且所有的小棍大致都是相同的），才使我們了解了这种"活动"标签的作用。显然，在开始，小棍不是用来区别数目的，而仅仅为了建立两个总体之間的等数性，或者换句話說，只是为了建立这两个总体之間的一一对应关系。

这种計数方法的遺迹，在发展到較高級阶段的許多部族那儿还保留着。例如，有一些部族，为了同样的目的，用打結的繩索，另外一些部族則用小珠子或簡单的号牌（刻有記号的木棍）。秘魯的部族則是利用結繩［所謂克威蒲（Квипу），图 1］来記录数的。他們把四条繩索系在一起，并且在它們之上又附加第五条，利用这条繩上的結子表示前四条繩上数的总和。表示一个、十个和一百个的結子是各各不同的。在僧侶統治时期（公元十一至十六世紀），就曾利用这样的結繩，"塡写"过与我們現代会計表报相类似的东西。这样的打結子的繩索，只用来記录数目①。为了进行算术运

① 希罗多德（Геродот）以如下方式描述过大流士（Дарий）所发布的命令。这命令是在渡过伊斯特拉河后，准备向西徐亚人（скифы）远征时（公元前六世紀），他向伊奥尼亚人发布的："在这之后，皇帝在一条皮带上挽了六十个結子，把所有伊奥尼亚的暴君們召集起来开会議，并向他們說：'原先由我們作出的关于桥梁的决定，伊奥尼亚人，我宣布廢除；現在你們拿着这条皮带并且这样行动：从我开始向西徐亚人进軍的时候起，你們按日解开皮带上的一个結子；如果在这个时期以內，我还沒有回来，而表示日数的結子业已解完，那你們就航海回国；到这个时候，你們要竭尽全力保护桥梁并要完全控制住它'"。［譯者注：希罗多德（約公元前 484—425 年）是古希腊历史学家，被称为"历史之父"，著有"希腊波斯战史"。大流一世·希斯塔斯普是古波斯阿凱米尼得王朝公元前 522—486 年間的国王，公元前 514 年向黑海北岸西徐亚人进軍失敗，公元前 500 年在位时，开始了希腊波斯战爭。伊奥尼亚人是古希腊主要部族群之一，居住在阿提喀和小亚細亚沿海地区。西徐亚人是古希腊作家对公元前 7 世紀—3 世紀居住在黑海沿岸草原各个部族的总称。］

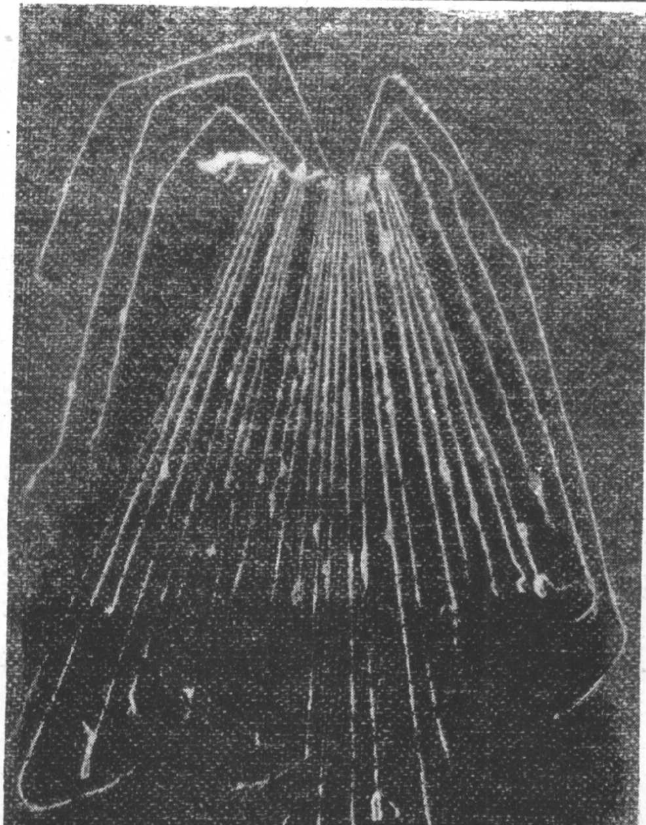

图 1. 克威蒲(Квипу)

算，要用到石子或玉米粒。

但是，在这个阶段，数不是被了解为一切等数总体之間共有的一般属性。那时，只满意于等数性的确認。

当被数的集体包含着不多的对象时(≤20)，通常总是从具有同样多对象的各个集体的集合里，选出某一个确定的集体来，而把这集合內其余集体，則說成分別有与所选集体一般多的对象。例如，为要表示某一集体內有五个对象，就說，它所含对象和一只手