

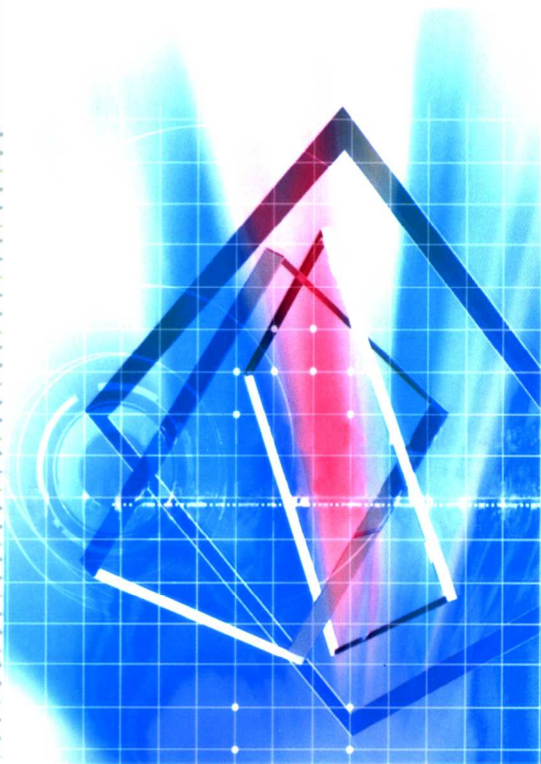
大学数学学习指南



# 微积分

刘建亚 总主编  
吴 臻 主 编

 山东大学出版社  
Shandong University Press



# 大学数学学习指南 ——微积分

总主编 刘建亚

主 编 吴 臻

山东大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

大学数学学习指南——微积分/刘建亚总主编;吴臻分册  
主编.—济南:山东大学出版社,2004.8  
ISBN 7-5607-2860-X

- I. 大
- II. ①刘... ②吴...
- III. 微积分—高等学校—教学参考资料
- IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 089241 号

山东大学出版社出版发行

(山东省济南市山大南路 27 号 邮政编码:250100)

山东省新华书店经销

日照报业印刷有限公司印刷

787×980 毫米 1/16 21.25 印张 405 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—5000 册

定价:28.00 元

**版权所有,盗印必究**

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部负责调换

## 《大学数学学习指南》编委会

总主编 刘建亚

主 编 吴 臻

编 委 (按姓氏笔画为序)

史敬涛 许闻天 金 辉 胡发胜

秦 静 宿 洁 崔玉泉 蒋晓芸

### 《微积分》

主 编 吴 臻

编 者 蒋晓芸 许闻天 崔玉泉

## 前 言

大学数学是大学教育中重要的基础理论课,它不仅是学好其他专业课的重要工具,同时也能使学生通过数学知识和方法的学习,获得理性思维的训练和美的享受,对提高学生的综合素质具有重要意义。学好大学数学,要有一套好教材,也需要有与之配套的教学指导书,以帮助学生掌握大学数学的教学要求,更好地理解基本概念,掌握系统的基本理论,体会数学的思维方法,提高利用基本知识分析和解决问题的能力。“大学数学学习指南”丛书可与山东大学数学学院编写的国家“十五”规划教材“大学数学教程”微积分、线性代数、概率统计(高等教育出版社2002年版)配套使用,同时亦可作为读者学习大学数学课程的参考书,备考硕士研究生入学考试的辅导用书。

“大学数学学习指南”丛书微积分分册分为三篇。第一篇为微积分基本内容,按章编写,包括“学习要求”、“内容提要及重点提示”、“例题分析及难点解析”和“同步自测题”等四部分。第一部分“学习要求”给出了对该章内容的具体要求;第二部分“内容提要及重点提示”扼要整理和归纳了该章的概念、定理和公式,方便学生复习查阅;同时指出了本章的重点内容;第三部分“例题分析及难点解析”,通过典型例题系统全面地介绍了微积分解题与证题的方法和技巧,给出了求解同类题目的一般方法及注意事项,并对这些方法和技巧进行了归纳和总结,以帮助学生认识和掌握重点,提高解决难度较高、综合性较强的问题的能力。这部分是本丛书的特色之一,充分体现“大学数学学习指南”的作用;第四部分“同步自测题”除有计算、应用、证明题外,参照研究生入学考试,每章均选编了一定数量的选择题和填空题,供读者练习使用,所选习题难度层次分明,既有基本习题也有一些较难的题目。第二篇为六套微积分考试模拟试题,供读者自测。第三篇为2000~2004年全国研究生入学考试微积分试题分类选编。为便于学生自测在附录我们给出了同步自测题及期末模拟试题的详细解答与答案,这是本丛书的又一特色。读者可在独立做完自测题和期末模拟试题之后对照查阅,再一次充分体现“大学数学学习指南”的作用。

“大学数学学习指南”丛书由山东大学数学与系统科学学院刘建亚教授任总

主编,负责丛书总策划,吴臻教授任丛书主编,通稿定稿。各分册的编者是:微积分——蒋晓芸、许闻天、崔玉泉;线性代数——秦静,金辉;概率统计——胡发胜、宿洁、史敬涛。

本丛书编写过程中,得到山东大学教务处、山东大学数学与系统科学学院领导及同行教师们的关心和帮助,在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于编者水平,加上经验不足,时间仓促,书中的不足与疏漏之处在所难免,恳请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编者  
2004年7月

# 目 录

## 第一篇 基本内容

<b>第一章 函数、极限和连续</b> .....	(1)
一、学习要求 .....	(1)
二、内容提要及重点提示 .....	(1)
三、例题分析及难点解析 .....	(8)
四、同步自测题 .....	(16)
<b>第二章 导数与微分</b> .....	(19)
一、学习要求 .....	(19)
二、内容提要及重点提示 .....	(19)
三、例题分析及难点解析 .....	(23)
四、同步自测题 .....	(31)
<b>第三章 中值定理和导数应用</b> .....	(34)
一、学习要求 .....	(34)
二、内容提要及重点提示 .....	(34)
三、例题分析及难点解析 .....	(38)
四、同步自测题 .....	(57)
<b>第四章 多元函数微分学</b> .....	(60)
一、学习要求 .....	(60)
二、内容提要及重点提示 .....	(60)
三、例题分析及难点解析 .....	(65)
四、同步自测题 .....	(75)
<b>第五章 一元函数积分学及其应用</b> .....	(77)
一、学习要求 .....	(77)
二、内容提要及重点提示 .....	(77)
三、例题分析及难点解析 .....	(86)

四、同步自测题 .....	(108)
<b>第六章 二重积分</b> .....	(113)
一、学习要求 .....	(113)
二、内容提要及重点提示 .....	(113)
三、例题分析及难点解析 .....	(117)
四、同步自测题 .....	(124)
<b>第七章 常微分方程</b> .....	(126)
一、学习要求 .....	(126)
二、内容提要及重点提示 .....	(126)
三、例题分析及难点解析 .....	(131)
四、同步自测题 .....	(143)
<b>第八章 分析基础——再论极限</b> .....	(145)
一、学习要求 .....	(145)
二、内容提要及重点提示 .....	(145)
三、例题分析及难点解析 .....	(148)
四、同步自测题 .....	(155)
<b>第九章 级数及广义积分</b> .....	(156)
一、学习要求 .....	(156)
二、内容提要及重点提示 .....	(157)
三、例题分析及难点解析 .....	(165)
四、同步自测题 .....	(181)
<b>第十章 向量代数与空间解析几何</b> .....	(183)
一、学习要求 .....	(183)
二、内容提要及重点提示 .....	(183)
三、例题分析及难点解析 .....	(193)
四、同步自测题 .....	(202)
<b>第十一章 多元函数几种类型的积分</b> .....	(204)
一、学习要求 .....	(204)
二、内容提要及重点提示 .....	(204)
三、例题分析及难点解析 .....	(208)
四、同步自测题 .....	(219)
<b>第十二章 第二类曲线与曲面积分</b> .....	(221)
一、学习要求 .....	(221)



二、内容提要及重点提示	(221)
三、例题分析及难点解析	(227)
四、同步自测题	(243)

## 第二篇 期末考试模拟题

生化类高等数学期末模拟题(上)	(246)
生化类高等数学期末模拟题(下)	(248)
物理类高等数学期末模拟题(上)	(250)
物理类高等数学期末模拟题(下)	(252)
工学类高等数学期末模拟题(上)	(254)
工学类高等数学期末模拟题(下)	(256)

## 第三篇 考研题分类选编

第一章 函数、极限和连续	(258)
第二章 导数与微分	(260)
第三章 中值定理和导数应用	(262)
第四章 多元函数微分学	(265)
第五章 一元函数积分学及其应用	(267)
第六章 二重积分	(270)
第七章 常微分方程	(272)
第八章 分析基础 再论极限	(276)
第九章 级数及广义积分	(277)
第十章 向量代数与空间解析几何	(280)
第十一章 多元函数几种类型的积分	(280)
第十二章 第二类曲线与曲面积分	(282)
附录	(285)
同步自测题参考解答	(285)
期末考试模拟题参考解答	(321)

# 第一篇 基本内容

## 第一章 函数、极限和连续

### 一、学习要求

1. 理解函数的概念和性质,掌握基本初等函数的性质、公式及其图形,理解初等函数的概念.

2. 理解复合函数、隐函数、分段函数以及反函数的概念.

3. 理解描述性的极限概念和性质,理解描述性的左、右极限概念以及极限存在与左、右极限之间的关系.

4. 掌握无穷小、无穷大的概念及其性质.

5. 掌握函数连续(在一点 $x_0$ 处连续,左、右连续以及连续函数)的概念,理解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质.

6. 会讨论有关定义域、函数值、函数表达式以及复合函数的问题,会建立简单应用问题中的函数关系式.

7. 熟练掌握极限的四则运算法则和两个重要极限,掌握极限的两个重要准则,会运用上述结论以及等价无穷小、复合函数的极限公式等求极限.

8. 会利用定义讨论函数的连续性,会判断函数的间断点,会应用闭区间上连续函数的性质讨论问题.

这些要求是学好微积分的基础,对读者和各类研究生入学考试都是相同的.

### 二、内容提要及重点提示

#### (一) 重要概念

##### 1. 函数的概念

(1) 函数 设有两个变量  $x$  和  $y$ , 如果对于区间  $D$  中的每一个  $x$  值, 按照一定的法则, 变量  $y$  都有一个确定的值与之对应, 则称变量  $y$  是  $x$  的函数, 记作

$$y=f(x), \quad x \in D.$$

其中,  $x$  称为自变量,  $y$  称为因变量, 而  $D$  称为这个函数的定义域.

因此, 函数概念的两个要素是定义域和对应关系, 函数的表示只与定义域和对应关系有关而与使用什么字母无关.

(2) 反函数 设  $y$  是  $x$  的函数  $y=f(x)$ , 若把  $y$  当作自变量,  $x$  当作因变量, 即由关系式  $y=f(x)$  确定的新函数  $x=\varphi(y)$  称为原来函数  $y=f(x)$  的反函数. 由于习惯上记  $x$  为自变量,  $y$  为因变量, 故  $y=f(x)$  的反函数常记作  $y=\varphi(x)$  或  $y=f^{-1}(x)$ , 由于变量互换的关系, 原来函数  $y=f(x)$  与其反函数  $y=f^{-1}(x)$  的图形关于直线  $y=x$  对称.

(3) 基本初等函数 常量函数  $y=C$ 、幂函数  $y=x^a$ 、指数函数  $y=a^x (a>0, a \neq 1)$ 、对数函数  $y=\log_a x$  以及三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数.

对基本初等函数, 要掌握它们的定义域、图形、基本性质和主要公式.

(4) 复合函数 若对由函数  $u=\varphi(x)$  确定的变量  $u$  的值, 通过函数  $y=f(u)$  有确定的  $y$  值与之对应, 从而得到的一个以  $x$  为自变量,  $y$  为因变量的函数, 称为由函数  $y=f(u)$  和  $u=\varphi(x)$  复合而成的复合函数, 记作

$$y=f[\varphi(x)] \quad \text{或} \quad y=f(u), \quad u=\varphi(x).$$

其中  $u$  称为中间变量.

许多复合函数是由基本初等函数多次复合而成.

(5) 初等函数 由基本初等函数经过有限次四则运算以及复合所构成并可由一个式子表示的函数称为初等函数.

(6) 隐函数和分段函数 由因变量未解出的方程所确定的函数称为隐函数.

在自变量的不同变化范围内, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数, 常见的分段函数, 如:

$$\textcircled{1} y=|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{符号函数 } y=\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

## 2. 数列极限的定义

给定数列  $\{x_n\}$ , 如果当  $n$  无限增大时,  $x_n$  无限趋近于某个确定的常数  $a$  (要多么接近就有多么接近), 则称  $a$  为  $n$  趋于无穷时数列  $\{x_n\}$  的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty).$$

此时亦称数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$ .

### 3. 函数极限的定义

(1) 给定一个函数  $y=f(x)$ , 在自变量  $x$  充分大时函数有定义, 如果当  $x$  无限增大时, 函数的值  $f(x)$  无限趋近于某个确定的常数  $a$  (要多么接近就有多么接近), 则称  $a$  是函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  时的极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow +\infty).$$

(2) 设函数  $f(x)$  在自变量  $x$  充分小时有定义, 如果当  $x$  无限减小 ( $x \rightarrow -\infty$ ) 时, 函数的值  $f(x)$  无限趋近于某个确定的常数  $a$  (要多么接近就有多么接近), 则称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow -\infty$  时以  $a$  为极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow -\infty).$$

(3) 设函数  $f(x)$  在自变量  $x$  的绝对值  $|x|$  充分大时有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  则称  $a$  是  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow \infty).$$

(4) 设对某个常数  $h > 0$ , 函数  $y=f(x)$  在实数集

$$\{x \mid 0 < |x - x_0| < h\}$$

上有定义, 如果当自变量  $x$  无限趋向于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近一确定的常数  $a$  (要多么接近就有多么接近), 则称  $a$  为当自变量  $x$  趋近于  $x_0$  时函数  $f(x)$  的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \text{ 或 } f(x) \rightarrow a \quad (x \rightarrow x_0).$$

(5) 左、右极限  $f(x)$  在  $x_0$  的左极限记成  $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  或  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ ,

$$f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 的右极限记成 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

函数极限和左、右极限的关系是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A.$$

该等价性常用来判断分段函数在分段点处是否有极限.

### 4. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量 在自变量  $x$  的一定趋势 ( $x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ) 下, 如果变量  $\alpha(x)$  的极限为零, 则称  $\alpha(x)$  为这种变化趋势下的无穷小量, 可记为  $\alpha(x) = o(1)$  (当

$x \rightarrow x_0$  或  $x \rightarrow \infty$ ).

(2) 无穷小量的阶 设  $\alpha(x), \beta(x)$  都是自变量  $x$  在同一变化趋势下的无穷小量, 且  $\beta(x) \neq 0$ , 如果

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \text{ 则称 } \alpha(x) \text{ 是比 } \beta(x) \text{ 高阶的无穷小, 记为 } \alpha(x) = o(\beta(x));$$

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \ (c \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  是同阶的无穷小, 记为  $\alpha(x) = O(\beta(x))$ ;

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ 则称 } \alpha(x) \text{ 与 } \beta(x) \text{ 是等价无穷小量, 记为 } \alpha(x) \sim \beta(x);$$

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \ (c \neq 0)$ , 则称  $\alpha(x)$  是  $\beta(x)$  的  $k$  阶无穷小量, 亦可记为  $\alpha(x) = O(\beta^k(x))$ ;

$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$  (或  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0, \alpha(x) \neq 0$ ), 则称  $\alpha(x)$  是比  $\beta(x)$  低阶的无穷小量.

(3) 无穷大量 对任意大的  $G > 0$ , 如果  $x \rightarrow x_0$  时, 恒有  $|f(x)| > G$ , 则称  $f(x)$  是  $x \rightarrow x_0$  时的无穷大量.

显然, 不为零值的无穷小量的倒数是无穷大量, 反之, 无穷大量的倒数是无穷小量.

### 5. 连续的概念

(1) 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的邻域内有定义, 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续.

由上面定义可知, 函数在点  $x_0$  连续有三个要求:

- ①  $f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域(包括  $x_0$ )内有定义;
- ②  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在;
- ③  $f(x)$  在  $x_0$  的函数值恰等于极限值, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

(2) 左连续和右连续 设  $\delta > 0$  为某一任意小的正数, 若  $f(x)$  在  $x_0$  的左邻域  $(x_0 - \delta, x_0]$  内有定义, 且  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  点左连续. 类似可定义函数  $f(x)$  在  $x_0$  点右连续.

显然,  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续  $\Leftrightarrow f(x)$  在点  $x_0$  左连续且右连续.

(3) 函数  $f(x)$  在区间上连续的概念 设函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内有定义且  $\forall x_0 \in (a, b)$ , 恒有  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 则称  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内连续, 或  $f(x)$

是 $(a, b)$ 内的连续函数.

如果函数 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 内连续且在左端点 $x=a$ 处右连续,在右端点 $x=b$ 处左连续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续,或 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数.

(4) 函数的间断点 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处,(1)的三个要求中有任何一个不满足,则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续,点 $x_0$ 称为 $f(x)$ 的间断点.

其中,若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 都存在但不相等,或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$ ,则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点,后者又称为可去间断点.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 中至少有一个不存在,则称 $x_0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点,若其中至少有一个是 $\infty$ ,则又称为 $f(x)$ 的无穷间断点.

## (二) 重要性质

### 1. 函数 $f(x)$ 的性质

(1) 奇偶性 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,如果 $\forall x \in D$ ,恒有 $f(x) = f(-x)$ (或 $f(x) = -f(-x)$ ),则称 $f(x)$ 为区间 $D$ 上的偶函数(或奇函数).

显然,函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不具有奇偶性.另外,从函数的图像看,偶函数关于 $y$ 轴对称,奇函数关于坐标原点对称.

(2) 周期性 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,若存在一个与 $x$ 无关的正数 $T$ ,使对任一 $x \in D$ ,恒有 $f(x+T) = f(x)$ ,则称 $f(x)$ 是以 $T$ 为周期的周期函数,并且通常把满足关系式的最小正数称为函数 $f(x)$ 的周期.

若 $f(x)$ 的周期是 $T$ ,则函数 $f(ax+b)$ 亦是周期函数,周期为 $\frac{T}{|a|}$ ,并且若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 $T_1, T_2$ 的最小公倍数为周期的周期函数.

(3) 有界性 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,如果存在 $M > 0$ ,使对一切 $x \in D$ ,恒有 $|f(x)| \leq M$ ,则称 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有界,否则, $f(x)$ 在 $D$ 上无界.

(4) 单调性 设函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上有定义,如果 $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ ,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$ ),则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上是单调增加(单调减少)的.

### 2. 极限的性质

以数列极限和有限点 $x_0$ 处的函数极限为例,极限的共同性质有

(1) 惟一性 极限存在必惟一.

(2) 有界性 收敛数列必有界;在 $x_0$ 处存在极限的函数在 $x_0$ 的某去心邻域

$U$  内有界.

(3) 保号性 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而  $A > 0$  (或  $A < 0$ ), 则存在  $x_0$  的某个去心邻域  $U = \{x | 0 < |x - x_0| < h\}$ , 当  $x \in U$  时, 恒有  $f(x) > 0$  (或  $f(x) < 0$ ).

反之, 若在  $x_0$  的某个去心邻域  $U$  恒有  $f(x) \geq 0$  (或  $f(x) \leq 0$ ) 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 则  $A \geq 0$  (或  $A \leq 0$ ).

对于存在非零极限的数列  $\{x_n\}$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 而  $A > 0$ , (或  $A < 0$ ), 则  $n$  充分大时  $x_n$  与  $A$  同号.

3. 闭区间  $[a, b]$  上连续函数的性质

(1)  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界.

(2) 最大、最小值定理  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有最大值和最小值, 即至少存在点  $\xi$  和  $\eta \in [a, b]$ , 使对一切  $x \in [a, b]$ , 有  $f(\eta) \leq f(x) \leq f(\xi)$ .

(3) 介值定理 设  $\mu$  是介于  $f(a), f(b)$  [ $f(a) \neq f(b)$ ] 间的任何一个数, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = \mu$ .

(4) 零值定理 若  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f(\xi) = 0$ .

(三) 重要运算性质和公式

1. 极限的四则运算法则

若  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$  ( $A, B$  均为有限数), 则

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B,$$

$$\lim f(x) \cdot g(x) = A \cdot B,$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}, (\text{当 } B \neq 0).$$

2. 极限存在的两个准则

(1) 单调有界数列必有极限.

(2) 夹逼准则. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$  且  $x_n \leq y_n \leq z_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ .

若当  $x \in \{x | 0 < |x - x_0| < h\}$  (或  $|x| > M$ ) 时, 恒有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} h(x) = A, \text{ 则 } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = A.$$

3. 两个重要极限

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

4. 无穷小量的运算性质

(1) 有限个无穷小量的代数和或有限个无穷小量的积仍为无穷小量.

(2) 无穷小量与有界函数的乘积仍是无穷小量.

(3) 等价无穷小的代换性质. 设  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  是自变量同一变化过程中的无穷小且  $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta}{\alpha}$  存在, 则  $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = \lim \frac{\beta'}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta}{\alpha}$ .

注意: 作等价无穷小代换时, 只能严格按性质(3)代换乘积中的无穷小因子而不能代换和、差中的因子.

(4) 当  $x \rightarrow 0$  时, 常用的与  $x \rightarrow 0$  等价的无穷小有:

$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x,$   
 $e^x - 1 \sim x, (1+x)^n - 1 \sim nx (n \neq 0), a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0, a \neq 1)$  等.

5. 连续函数的运算性质

(1) 连续函数的四则运算 若  $f(x), g(x)$  在点  $x_0$  连续, 则  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}, (g(x_0) \neq 0)$  在点  $x_0$  处亦连续.

(2) 反函数的连续性 设  $y = f(x)$  是区间  $[a, b]$  上单值、严格单调的连续函数且  $f(a) = \alpha, f(b) = \beta$ , 则其反函数  $y = \varphi(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上也单调连续.

(3) 复合函数的连续性 设函数  $y = f(u)$  在点  $u = u_0$  连续,  $u = \varphi(x)$  在点  $x = x_0$  连续且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x = x_0$  连续.

复合函数的连续性又可写成:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)];$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u), \quad [u = \varphi(x), \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0].$$

上面两个式子在求复合函数的极限时常常用到, 第一个式子表示求复合函数  $f[\varphi(x)]$  的极限时, 函数符号  $f$  与极限号可以交换次序, 第二个式子也称为求极限的变量代换法则, 表示求极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)]$  时, 可以作连续函数代换  $u = \varphi(x)$ , 化为  $f(u)$  求  $u \rightarrow a$  时的极限.

(四) 重点提示

本章重点内容是极限, 要准确理解极限概念和极限存在的充要条件, 能熟练正确求出各种类型的极限.

由于函数的连续性是通过极限来定义的, 所以判断函数的间断点的类型, 判断函数是否连续等问题本质上也仍然是讨论极限. 因此这部分也是本章重点.

在函数这一部分, 重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.



### 三、例题分析及难点解析

#### 1. 关于函数的表达式及函数性质

求函数的表达式时,常常利用函数表达式与所用字母无关的特性.

**例1** 设  $f(x)$  满足方程  $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ , 其中  $a, b, c$  为常数且  $|a| \neq |b|$ , 求  $f(x)$  并证明它是奇函数.

**分析** 由  $f(x)$  所满足的方程, 无法直接求出  $f(x)$  的表达式, 但作代换令  $x = \frac{1}{t}$ , 可以得到新的方程, 联立并消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$  即可解出  $f(x)$ , 再利用奇函数定义即可证之.

**解** 在原方程中作代换  $x = \frac{1}{t}$ , 可得  $af\left(\frac{1}{t}\right) + bf(t) = ct$ , 即

$$af\left(\frac{1}{x}\right) + bf(x) = cx,$$

与原方程联立, 并消去  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 可解出  $f(x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(\frac{a}{x} - bx\right)$ .

又  $f(-x) = \frac{c}{a^2 - b^2} \left(-\frac{a}{x} + bx\right)$ ,  $f(x) + f(-x) = 0$ , 故  $f(x)$  为奇函数.

#### 2. 关于求反函数

求  $y = f(x)$  的反函数, 首先由  $y = f(x)$  解出  $x = \varphi(y)$ , 再把所得表达式中的  $x$  与  $y$  对换, 即得所求函数的反函数.

**例2** 设  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 < x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2; \\ 2^x, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$  求  $f^{-1}(x)$ .

**分析**  $f(x)$  是分段函数, 因此要分别求出各区间段的反函数及定义区间.

**解** 由  $y = x, -2 < x < 1$ , 可得  $x = y, -2 < y < 1$ .

故它的反函数是  $y = x, -2 < x < 1$ .

由  $y = x^2, 1 \leq x \leq 2$ , 可得  $x = \sqrt{y}, 1 \leq y \leq 4$ .

故其反函数是  $y = \sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4$ .

由  $y = 2^x, 2 < x \leq 4$ , 可得  $x = \log_2 y, 4 < y \leq 16$ .

故其反函数是  $y = \log_2 x, 4 < x \leq 16$ .

所以  $f(x)$  的反函数是  $y = \begin{cases} x, & -2 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & 1 \leq x \leq 4; \\ \log_2 x, & 4 < x \leq 16. \end{cases}$