名师手把手

依据教育部最新《考试说明》学科标准　编写

2005高考版

丛书主编　辛勤之
本册主编　窦一鸣

考坛泰斗
金色六月展才华
应有尽有
名师手把手
天长地久
心系考生笔耕忙
苦苦追求
名师手把手

数学

高考总复习

北京工业大学出版社

前　言

“等闲识得东风面，万紫千红总是春”．沐浴着和煦的春风，《名师手把手》系列丛书编委会，依据教育部最新颁布的《课程标准》和最新《考试说明》的要求，对新版《名师手把手》系列丛书及其配套图书进行了全面而系统的修订．

本丛书以2004年全国高考《考试说明》为依据，以最新高考试题为蓝本进行了精编．本书备考理念新，考点扣得紧，试题容量大，前沿信息多，知识发掘深，思维方式活，模拟高考真，练习设计巧，训练有效度高，可操作性强，富有时代气息．

本丛书数学分册按教材的顺序安排章节，每章分别设计了**“考纲定位”“知能梳理”“例题点析”“命题走向”“误区点窍”“临场技巧”“仿真题演练”“前沿题精练”“前瞻题巧练”“猜题练兵场”**等栏目，栏目开设齐全，题型模拟高考，备考采点科学．

“考纲定位”通过对《考试说明》的阐释，从宏观上解决“考什么”的问题．与该栏目为友，可以使你明确方向，有的放矢，少走弯路，提高备考的针对性．

“知能梳理”是对该章知识点和能力点的梳理与整合，知能归类恰当，梳理脉络清晰．与该栏目为友，可以使你系统地把握该章的基本知识，快速实现能力转化，消除备考死角．

“例题点析”以近年的高考试题为对象，条分缕析，妙语点悟．阅读该栏目，你可以号准高考脉搏，对“怎样考”做到心中有数．

“命题走向”纵观近年高考，把握命题动向，预测未来试题的趋向．与该栏目为友，可以使你高屋建瓴，搞好备考心理定位，做到未雨绸缪．

“误区点窍”针对考生在应试中出现的思维误区及时疏导．与该栏目为友，可以使你穿云破雾，走出迷阵，驶向坦途．

“临场技巧”立足考场实际，突破传统程式，找到最佳答题门径．与该栏目为友，可以帮你减少临场失误，提高应试技能．

“仿真题演练”模拟高考样式，把该章的基本知识和运用能力编撰成难度适中的习题．与该栏目为友，可以使你紧扣考题，夯实基础，悟出真谛，为完善素质奠定坚实基础．

“前沿题精练”精编前沿性习题进行训练，训练有效度高．与该栏目为友，可以使你站在备考前沿，减少盲目性．

“前瞻题巧练”着眼于试题未来的发展动向精编习题．与该栏目为友，可以使你走在高考的最前列．

“猜题练兵场”突出“猜”字精编习题，对该章的学习内容做实战练习．与该栏目为友，你可以对该章的复习有着正确的评价．

收获是甜蜜的，但收获前的耕耘却是苦涩的；风雨是狂暴的，但风雨后的彩虹却是绚丽的；理想是完美的，但追求完美理想的过程却是曲折的；金榜题名固然灿烂，但金榜题名前却凝结了十年寒窗的艰辛与挫折．愿神州大地万千学子在《名师手把手》系列丛书的悉心呵护下，走过挫折，走出泥泞，陶醉在美丽的春天里，陶醉在灿烂的人生里．

编　者

2004年5月于北京

目 录

第一章　集合与简易逻辑

1.1　集合的概念

考纲定位

理解集合、子集、交集、并集、补集的概念；了解空集和全集的意义；了解属于、包含、相等关系的意义；能掌握有关的术语和符号，并会用它们正确地表示一些较简单的集合；掌握一般的集合运算法则；熟练地进行集合语言与几何语言及其他数学语言的互化.

知能梳理

1. 集合的概念

由一些确定对象的全体形成一个集合，集合里的各个对象叫做这个集合的元素；含有限个元素的集合叫做有限集，含有无限个元素的集合叫做无限集.

如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a \in A$；如果a不是集合A的元素，就说a不属于A，记作$a \notin A$(或$a \bar{\in} A$).

2. 集合的表示法

列举法：如方程$x^2-1=0$的解集表示为$\{-1,1\}$.

描述法：如方程$x^2-1=0$的解集表示为$\{x \mid x^2-1=0\}$.

3. 集合的特性

(1) 确定性　对于集合A和某一对象x，有一个明确的判断标准是$x \in A$，还是$x \notin A$，二者必居其一，不会模棱两可.

(2) 互异性　集合中的相同元素只算是一个，如方程$x^2-2x+1=0$的两个等根$x_1=x_2=1$，用集合记为$\{1\}$，而不写为$\{1,1\}$.

(3) 无序性　集合中的元素是不排序的. 如集合$\{1,2\}$与$\{2,1\}$是同一个集合，但实际上书写时还是按一定顺序写，如$\{-1,0,1,2\}$而不写成$\{0,1,-1,2\}$这样写不方便，其更深刻的含义是揭示了集合元素的"平等地位".

思考：$\{(1,2)\}$与$\{(2,1)\}$表示同一集合吗?

4. 子集、交集、并集和补集

(1) 子集　对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的子集，记作$A \subseteq B$(或$B \supseteq A$)，显然$A \subseteq A$.

规定空集是任何集合的子集，即$\varnothing \subseteq A$.

如果A是B的子集，并且B中至少有一个元素不属于A，那么集合A叫做集合B的真子集，记作$A \subsetneqq B$(或$B \supsetneqq A$).

(2) 集合相等　若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$，则$A=B$.

(3) 交集　由所有属于集合A且属于集合B的元素组成的集合，叫做A,B的交集，记作$A \cap B=\{x \mid x \in A$且$x \in B\}$.

(4) 并集　由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合，叫做A,B的并集，记作$A \cup B$，即$A \cup B=\{x \mid x \in A$或$x \in B\}$.

(5) 补集　集合A是集合S的子集，由S中所有不属于A的元素组成的集合，叫做S中子集A的补集，记作$\complement_S A$，即$\complement_S A=\{x \mid x \in S$，且$x \notin A\}$.

例题点析

1. 判定下列集合之间的关系，用适当的符号表示它们的关系.

(1) $A=\{x \in \mathbf{Z} \mid x=2n, n \in \mathbf{N}\}$，$B=\{x \mid x$是偶数$\}$；

(2) $A=\{x \mid x$是平行四边形$\}$，$B=\{x \mid x$是正方形$\}$；

(3) $A=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-\sqrt{5}x+1=0\}$，$B=\{x \in \mathbf{R} \mid x^2-\sqrt{5}x+1=0, 2x^2-3x-2=0\}$；

(4) $A=\{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>0\}$，$B=\{y \in \mathbf{R} \mid y=(x+1)^2-5, x \in \mathbf{R}\}$；

(5) $A=\{x \mid x$是奇数$\}$，$B=\{x \in \mathbf{R} \mid x=4n \pm 1, n \in \mathbf{Z}\}$.

【分析】对于用描述法给出的集合，要抓住竖线前后的代表元素及它具有的性质.

【解析】(1)$\because A=\{0,2,4,6,\cdots\}$，$B=\{0,\pm 2,\pm 4,\pm 6,\cdots\}$，$\therefore A \subsetneqq B$.

(2)$\because$ 正方形属于平行四边形，$\therefore A \supsetneqq B$.

(3)A表示方程$x^2-\sqrt{5}x+1=0$的解集，而B表示方程$x^2-\sqrt{5}x+1=0$和$2x^2-3x-2=0$的解为元素的集合，故$A \not\subseteq B$，$B \not\subseteq A$.

(4)$A=\left\{x \in \mathbf{R} \,\middle|\, \begin{cases} x-2 \geqslant 0 \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases}\right\}=\{x \mid x \geqslant 3\}$，$B=\{y \mid y \geqslant -5\}$，$\therefore A \subsetneqq B$.

(5) 对于任一B中元素x，都有$x \in A$，所以$B \subseteq A$；另一方面，对于A中任一元素$y=2n-1$，$(n \in \mathbf{Z})$，

当n为偶数，显然$2n-1 \in B$.

当n为奇数，如$n=2m+1(m \in \mathbf{Z})$，则$2n-1=4m+1 \in B$，故有$A \subseteq B$，$\therefore A=B$.

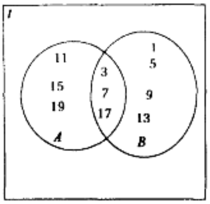
【评析】解答集合题目要分清集合中元素有怎样的性质，再进行相关的判定.

2. 已知全集$I=\{$小于20的正奇数$\}$，$A \subseteq I$，$B \subseteq I$，若$A \cap B=\{3,7,17\}$，$(\complement_I A) \cap (\complement_I B)=\varnothing$，$A \cap (\complement_I B)=\{11,15,19\}$，求集合$A,B$.

【分析】$\because (\complement_I A) \cap (\complement_I B)=\varnothing$，$\therefore A \cup B=I$，作出文氏图如下，在$A \cap B$处填上3,7,17，在$A \cap (\complement_I B)$处填上11,15,19. 最后把$I$中剩余元素填在$(\complement_I A) \cap B$处即可得

出答案.

【解析】由文氏图可得:$A=\{3,7,17,11,15,19\}$,$B=\{3,7,17,1,5,9,13\}$.



【评析】文氏图直观地展示出有限集合中各元素的具体分布情况,是解决集合有关问题的有效方法.

3. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0\}$.

(1) 若 $A=\varnothing$,求 a.

(2) 若 A 中只有一个元素,求 a 的值.

(3) 若 A 中至多有一个元素,求 a 的值.

【分析】了解空集的概念. 理解只有、至多有的准确含义是解本题的关键.

【解析】(1) $\because A=\varnothing$,$\therefore$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 无实根.

当 $a\neq 0$ 时,$\Delta<0\Leftrightarrow a>1$;

当 $a=0$ 时,$x=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore a>1$.

(2) 问题 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 只有一解.

若 $a\neq 0$,则 $\Delta=0$,解得 $a=1$,此时 $x=-1$;

若 $a=0$,则 $x=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore a=0$ 或 $a=1$ 时,A 中只有一个元素.

(3) 问题 $\Leftrightarrow$ 方程 $ax^2+2x+1=0$ 至多有一组解,

$\therefore \begin{cases}\Delta=4-4a\leqslant 0\\ a\neq 0\end{cases}$ 或 $a=0$,$\therefore a\geqslant 1$ 或 $a=0$.

$\therefore$ 当 $a\geqslant 1$ 或 $a=0$ 时,A 中至多有一个元素.

【评析】本题应用一元二次方程有关根的讨论,将集合语言转化为方程解的问题. 本题难点在于如何将集合元素个数转化为方程系数所需要的条件.

命题走向

在高考试题中,考查对集合概念的认识和理解水平,如对集合中涉及的特定字母和符号、元素与集合间的关系,集合与集合间的比较,主要表现在对集合的识别和表达上,以选择题为主.

误区点窍

【例】设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,$\complement_U A=\{5\}$,求实数 a 的值.

【错因点评】$\because \complement_U A=\{5\}$,$\therefore 5\in U$,且 $5\notin A$,$\therefore a^2+2a-3=5$,解之得,$a=2$ 或 $a=-4$.

错误在于忽视了本题的隐含条件 $A\subseteq U$(或者说 $A\subsetneqq U$,因 U 为三元素集,A 为二元素集).

【正确思路】(1) 应继续对 a 的值是否适合 $A\subseteq U$ 进行验证,当 $a=2$ 时,$|2a-1|=|4-1|=3\neq 5$,此时 $A=\{2,3\}\subseteq U$;

当 $a=-4$ 时,$|2a-1|=|-8-1|=9\neq 5$,此时 $A=\{9,2\}\not\subseteq U$,

$\therefore a$ 的值只能为 2.

(2) 如果按以下方法解答,可以免除这种问题.

$\because \complement_U A=\{5\}$,$A=\{|2a-1|,2\}$,$U=\{2,3,a^2+2a-3\}$

$\therefore$ 有 $\begin{cases}|2a-1|=3\\ a^2+2a-3=5\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2\text{ 或 }a=-1\\ a=2\text{ 或 }a=-4\end{cases}$ $\therefore a=2$.

评析:集合是一种具有深刻含义的数学语言,它的内容丰富,表达准确,方法多样. 在应用中弄清它的准确含义,可避免产生各种错误.

临场技巧

1. 解答集合有关问题时,应首先分清集合中元素是什么,要紧紧抓住竖线前的代表元素和竖线后的元素性质.

2. 分清集合中元素、集合两种隶属关系;注意集合元素的特性;注意数形结合的应用——数轴、文氏图等.

仿真题演练

1. 设 $M=\{x\mid x\leqslant 2\sqrt{3}\}$,$a=\sqrt{11}$,则下列关系中正确的是 ( )

A. $a\subsetneqq M$ B. $a\notin M$

C. $\{a\}\in M$ D. $\{a\}\subsetneqq M$

2. 已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$,则实数 p 的取值范围是________.

3. 已知 $A=\{x,xy,\lg xy\}$,$B=\{0,|x|,y\}$,若 $A=B$,求 x,y 的值.

前沿题精练

1. 已知集合 $M=\{x\mid -1<x<2\}$,$N=\{y\mid y=\dfrac{1}{2}x^2-1,x\in M\}$,则 $M\cap N$ 为 ( )

A. $\{a\mid -1\leqslant a<2\}$ B. $\{a\mid -1<a<2\}$

C. $\{a\mid -1<a<1\}$ D. $\varnothing$

2. 恰有2个元素的集合是 ( )

A. $\{x^2-5x+6\}$　　B. $\{x^2-5x+6=0\}$

C. $\{x\mid x^2-5x+6=0\}$　　D. $\{y\mid y=x^2-5x+6\}$

3. 已知集合 $A=\{x\mid -2k+6<x<k^2-3\}$, $B=\{x\mid -k<x<k\}$, 若 $A\subsetneqq B$, 求实数 k 的取值范围.

前瞻题巧练

1. 设 I 是全集, 集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q$, 则下面的结论中错误的是 ( )

A. $P\cup Q=Q$　　B. $\complement_I P\cup Q=I$

C. $P\cap\complement_I Q=\varnothing$　　D. $\complement_I P\cap\complement_I Q=\complement_I P$

2. 设 $M=\{(x,y)\mid mx+ny=4\}$, 且 $\{(2,1),(-2,5)\}\subsetneqq M$, 则 $m=$ ________, $n=$ ________.

3. (1) 已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$ 且 $1\in A$, 求实数 a 的值.

(2) 已知 $M=\{2,a,b\}$, $N=\{2a,2,b^2\}$ 且 $M=N$, 求 a, b 的值.

猜题练兵场

1. 设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$, 集合 $A=\{0,1,2,3\}$, 集合 $B=\{2,3,4\}$, 则 $\complement_I A\cup\complement_I B=$ ( )

A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

2. 如果 M,N 为非空集合, 那么 $M\cup N=M$ 是 $N\subsetneqq M$ 的 ( )

A. 充要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 既非充分也非必要条件

3. 已知 $M=\{2,a^2-3a+5,5\}$, $N=\{1,a^2-6a+10,3\}$, 且 $M\cap N=\{2,3\}$, 则 a 的值是 ( )

A. 1 或 2　　B. 2 或 4

C. 2　　D. 1

4. 已知集合 $M=\{1,3\}$, $N=\{x\mid x^2-3x<0,x\in\mathbf{Z}\}$, 又 $P=M\cup N$, 那么集合 P 的子集共有 ( )

A. 3 个　　B. 7 个

C. 8 个　　D. 16 个

5. 已知全集 $U=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$, $M=\{x\mid -1<x<1\}$, $\complement_U N=\{x\mid 0<x<2\}$, 那么集合 $N=$ ____________, $M\cap\complement_U N=$ ________, $M\cup N=$ ________.

6. 设 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$, $B=\{2y,-4,x+4\}$, $C=\{-1,7\}$, 且 $A\cap B=C$, 求 x,y 的值.

7. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$, $B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$, 其中 $a\in\mathbf{R}$, 如果 $A\cap B=B$, 求实数 a 的取值范围.

8. 集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid \log_2(x^2-5x+8)=1\}$, $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$, 求当 a 取什么实数时, $A\cap B\supsetneqq\varnothing$ 和 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立?

1.2 集合的运算

考纲定位

理解子集、交集、补集、并集的概念及运算法则,并能进行计算;能够运用集合语言及集合思想解决有关问题.注重文氏图、数轴、图象的使用,培养运用数形结合思想的习惯.

知能梳理

1. 交集的运算性质

$A\cap B=B\cap A, A\cap B\subseteq A, A\cap B\subseteq B$,

$A\cap I=A, A\cap A=A, A\cap\varnothing=\varnothing$.

2. 并集的运算性质

$A\cup B=B\cup A, A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B$,

$A\cup I=I, A\cup A=A, A\cup\varnothing=A$.

3. 补集的运算性质

$\complement_U(\complement_U A)=A, \complement_U\varnothing=U, \complement_U U=\varnothing$.

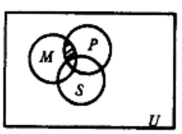
$A\cap\complement_U A=\varnothing, A\cup\complement_U A=U$.

4. 传递性

若集合 $A\subseteq B, B\subseteq C$,则集合 $A\subseteq C$;若集合 $A\subsetneq B$, $B\subsetneq C$,则集合 $A\subsetneq C$.

例题点析

1. 如图,U是全集,M、P、S是U的3个子集,则阴影部分所表示的集合是 (　　)



A. $(M\cap P)\cap S$　　B. $(M\cap P)\cup S$

C. $(M\cap P)\cap\complement_U S$　　D. $(M\cap P)\cup\complement_U S$

【分析】符号语言、文氏图(图形语言)、文字语言三者的转译能力是高考命题的一个侧重点,应力求熟练准确.

【解析】图中阴影部分的元素 x 的属性是:$x\in M$ 且 $x\in P$,但 $x\notin S$,故选 C.

【评析】集合的运算关系,一般地处理方法就是运用文氏图加以直观的讨论.

2. (2001年春高考,上海)已知$\mathbf{R}$为全集,$A=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\}$,$B=\{x\mid\frac{5}{x+2}\geqslant1\}$,求$\complement_{\mathbf{R}}A\cap B$.

【分析】解不等式,求出A,B,再利用数轴找出$\complement_{\mathbf{R}}A\cap B$来.

【解析】由 $\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2$,得

$$\begin{cases}3-x>0\\3-x\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=4\end{cases}$$

解得 $-1\leqslant x<3$.

于是 $A=\{x\mid-1\leqslant x<3\}$, $\overline{A}=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant3\}$.

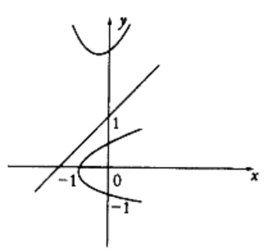
由$\frac{5}{x+2}\geqslant1$,有$\frac{5}{x+2}-1\geqslant0$,即$\frac{3-x}{x+2}\geqslant0$,解得 $-2<x\leqslant3$,于是 $B=\{x\mid-2<x\leqslant3\}$.

$\therefore\complement_{\mathbf{R}}A\cap B=\{x\mid x<-1$ 或 $x\geqslant3\}\cap\{x\mid-2<x\leqslant3\}=\{x\mid-2<x<-1$ 或 $x=3\}$.

【评析】集合之间的运算常伴随着不等式的解法,是高考中常见题型.利用数轴进行集合运算是常用手段,注意端点值的取舍.

3. 设集合$A=\{(x,y)\mid y^2-x-1=0\}$,$B=\{(x,y)\mid4x^2+2x-2y+5=0\}$,$C=\{(x,y)\mid y=kx+b\}$,是否存在$k,b(k\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N})$,使$(A\cup B)\cap C=\varnothing$,证明你的结论.

【分析】由于直线 $y=kx+b$ 中有两个要确定的字母 k 与 b,根据图形及其几何意义一个一个地求之.



【证明】由集合A得抛物线$y^2-x-1=0$在y轴上的截距为1和-1,由集合B得抛物线$4x^2+2x-2y+5=0$在y轴上的截距为$\frac{5}{2}$,若存在b,则$1<b<\frac{5}{2}$,如图,又因为$b\in\mathbf{N}$,$\therefore b=2$,

因为$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$,所以只要考虑是否存在$k$,使$A\cap C=\varnothing$且$B\cap C=\varnothing$.将直线方程$y=kx+2$代入抛物线$y^2-x-1=0$中得:

$(kx+2)^2-x-1=0$,即$k^2x^2+(4k-1)x+3=0$

令$\Delta=(4k-1)^2-12k^2<0$,化简为$4k^2-8k+1<0$,

解得$\frac{2-\sqrt{3}}{2}<k<\frac{2+\sqrt{3}}{2}$,又$\because k\in \mathbf{N}$,$\therefore k=1$.

将直线$y=kx+2$代入抛物线$4x^2+2x-2y+5=0$中,得$4x^2+(2-2k)x+1=0$

令$\Delta=(2-2k)^2-16<0$解得:$-1<k<3$.

$\because k\in \mathbf{N}$,

$\therefore k=1$或$k=2$,所以使$A\cap C=\varnothing$且$B\cap C=\varnothing$的k为1.

综上所述,满足条件的k,b是存在的,即当$k=1,b=2$时,$(A\cup B)\cap C=\varnothing$.

【评析】将集合语言运用到其他数学内容中,这是高考考查的一个常见题型.在复习过程中,要掌握各种数学语言的转化能力.

命题走向

主要以选择题,填空题的小综合型的形式出现,内容多为交、并、补的运算以及集合知识应用.集合知识的应用主要是和数学上其他知识的综合应用.

误区点窍

【例】设$A=\{x\mid x^2+px+q=0,x\in \mathbf{R}\}$,$M=\{1,3,5,7,9\}$,$N=\{1,4,7,10\}$,若$A\cap M=\varnothing$,$A\cap N=A$,求$p$,$q$的值.

【错因点评】(1)忽视$A=\varnothing$的情况,导致漏解.(2)当$A\neq\varnothing$时,考虑不周,A应在$\{4\}$,$\{10\}$,$\{4,10\}$三种情况,有同学认为只有$\{4,10\}$一种情况导致错解.

【正确思路】(1)若$A=\varnothing$,则$A\cap M=\varnothing$,$A\cap N=A$成立,此时p,q满足$p^2-4q<0$;

(2)若$A\neq\varnothing$,由于$A\cap M=\varnothing$,$A\cap N=A$,所以4或$10\in A$.

①若$A=\{4\}$,则$x^2+px+q=(x-4)^2=x^2-8x+16$,所以$p=-8,q=16$;

②若$A=\{10\}$,则$x^2+px+q=(x-10)^2=x^2-20x+100$,所以$p=-20,q=100$;

③若$A=\{4,10\}$,则$x^2+px+q=(x-4)(x-10)=x^2-14x+40$.所以$p=-14,q=40$.

综上得:$\begin{cases}p=-8\\q=16\end{cases}$或$\begin{cases}p=-20\\q=100\end{cases}$或$\begin{cases}p=-14\\q=40\end{cases}$或

$p^2-4q<0$.

临场技巧

1. 解答抽象集合问题多用数形结合.
2. 注意等价转化思想的应用.
3. 注意分类讨论思想的应用.
4. 注意数学中各种语言的相互转化.

仿真题演练

1. 如果$S=\{x\mid x=2n+1,n\in \mathbf{Z}\}$,$T=\{x\mid x=4k\pm1,k\in \mathbf{Z}\}$,那么 ( )

A. $S\subset T$　　B. $T\subset B$

C. $S=T$　　D. $S\neq T$

2. 设全集$I=\mathbf{R}$,集合$M=\{x\mid |x|>2\}$,$N=\{x\mid \log_x 7>\log_3 7\}$,那么$M\cap \overline{N}=$ ( )

A. $\{x\mid x<-2\}$　　B. $\{x\mid x<-2$或$x\geqslant 3\}$

C. $\{x\mid x\geqslant 3\}$　　D. $\{x\mid -2\leqslant x<3\}$

3. 设$A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若$A\cap B=B$,求a的值;

(2)若$A\cup B=B$,求a的值.

前沿题精练

1. 设全集$I=\{1,2,3,4,5\}$,若集合S和T满足$S\cap T=\{2\}$,$\overline{S}\cap T=\{4\}$,$\overline{S}\cap\overline{T}=\{1,5\}$,则 ( )

A. $3\in S,3\in T$　　B. $3\in S,3\in\overline{T}$

C. $3\in\overline{S},3\in T$　　D. $3\in\overline{S},3\in\overline{T}$

2. 数集$\{2a,a^2-2a\}$中,a的取值范围是________.

3. 设S为满足下列两个条件的实数所构成的集合:(1)S内不含1;(2)若$a\in S$,则$\frac{1}{1-a}\in S$,解答下列问题.

(1) 若 $2\in S$,则 S 中必有其他两个数,求出这两个数.

(2) 求证:若 $a\in S$,则 $1-\frac{1}{a}\in S$.

(3) 在集合 S 中元素的个数能否只有一个?请说明理由.

前瞻题巧练

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,若 $A\cup B=U$,$A\cap B\neq\varnothing$,且 $A\cap(\complement_U B)=\{1,2\}$. 试用文氏图表示满足上述条件的集合 A 和 B.

2. 某中学高一(甲)班有学生 50 人,参加数学小组的有 25 人,参加物理小组的有 32 人,求既参加数学小组,又参加物理小组的人数的最大值与最小值.

3. 设 A,B 是两个非空集合,定义 A 与 B 的差集 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$

(1) 试举出两个数集 A,B,求它们的差集;

(2) 差集 $A-B$ 与 $B-A$ 是否一定相等,说明你的理由;

(3) 已知 $A=\{x\mid x>4\}$,$B=\{x\mid |x|<6\}$,求 $A-(A-B)$ 及 $B-(B-A)$,由此你可以得到什么更一般的结论?(不必证明)

猜题练兵场

1. 某城市郊区对 200 户农民的生活水平进行调查,统计结果是:有彩电的 128 户,有电冰箱的 162 户,二者都有的 105 户,则彩电和电冰箱至少有一样的有 ( )

A. 162 户　　B. 200 户

C. 196 户　　D. 185 户

2. 已知集合 $M=\{x\mid x-a=0\}$,$N=\{x\mid ax-1=0\}$,若 $M\cap N=N$,则实数 a 的值是 ( )

A. 1　　B. -1

C. 1 或 -1　　D. 0 或 1 或 -1

3. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 7\}$，$B=\{x\mid m+1<x<2m-1\}$ 且 $B\neq\varnothing$，若 $A\cup B=A$，则　　(　　)

A. $-3\leqslant m\leqslant 4$　　B. $-3<m<4$

C. $2<m<4$　　D. $2<m\leqslant 4$

4. 若函数 $y=\lg\frac{f(x)}{g(x)}$ 的定义域为集合 A，$y=\lg f(x)$ 的定义域为集合 B，$y=\lg[g(x)]$ 的定义域是集合 C，则 A,B,C 之间的关系是　　(　　)

A. $A=(B\cap C)$　　B. $A\supseteq B\supseteq C$

C. $A\supseteq(B\cap C)$　　D. $A\supseteq(B\cup C)$

5. 已知集合 $A=\{1,3\}$，$B=\{x\mid mx-3=0\}$，且 $A\cup B=A$，则 m 的值为________.

6. 设全集 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{2,|a+1|\}$，$\overline{A}=\{5\}$，$M=\{x\mid x=\log_2|a|\}$，则集合 M 的所有子集是________.

7. 已知集合 $A=\{x\mid y=\sqrt{15-2x-x^2}\}$ 与 $B=\{y\mid y=a-2x-x^2\}$，若 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

8. 已知正整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,a_4^2\}$，其中 $a_1<a_2<a_3<a_4$，$A\cap B=\{a_1,a_4\}$，且 $a_1+a_4=10$，$A\cup B$ 中所有元素之和为 124，求 A.

1.3　含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

考 纲 定 位

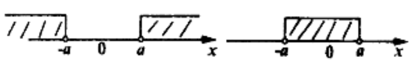
1. 掌握简单含绝对值的不等式和二次不等式的解法.

2. 注重含绝对值的不等式和二次不等式在高中数学中的工具作用.

知 能 梳 理

1. 含绝对值的不等式

(1) 不等式的基本性质:① 若 $a > b$,则 $a + c > b + c$;② 若 $a > b, b > c$,则 $a > c$;③ 若 $a > b, c > 0$,则 $ac > bc$;④ 若 $a > b, c < 0$,则 $ac < bc$. 这是解任何不等式的基础. 由实数绝对值的几何意义可知,当 $a > 0$,如图所示:



若 $|x| > a$,则 $x < -a$ 或 $x > a$;

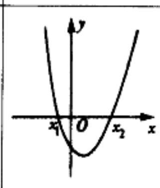
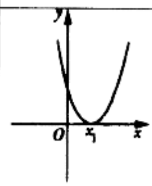
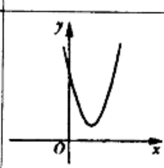
若 $|x| < a$,则 $-a < x < a$.

(2) 若用换元的思想把 $ax + b$ 看做一个整体,当 $c > 0$ 时,则 $|ax + b| > c$ 可化为 $ax + b < -c$ 或 $ax + b > c$;$|ax + b| < c$ 可化为 $-c < ax + b < c$. 即可求出不等式的解集.

2. 一元二次不等式

(1) 一元二次不等式的标准形式是:$ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0$. 其中 $a > 0$,从函数观点来看,一元二次不等式 $ax^2 + bx + c > 0(a > 0)$ 的解集是二次函数 $y = ax^2 + bx + c(a > 0)$ 在 x 轴上方的点的横坐标的集合,而一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0(a > 0)$ 的根就是相应的一次函数与 x 轴交点的横坐标. 因此,要解一元二次不等式,只要先解相应的一元二次方程即可.

(2) 一元二次不等式的解集与一元二次方程的根及二次函数图象之间的关系分类列表如下:

	一元二次方程	二次函数	一元二次不等式	
标准式	$ax^2 + bx + c = 0$ $(a > 0)$ $\Delta = b^2 - 4ac$	$y = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$	$ax^2 + bx + c > 0$ $(a > 0)$	$ax^2 + bx + c < 0$ $(a > 0)$
图象或解集	$\Delta > 0$ 解集为 $\{x_1, x_2\}$ 设 $x_1 < x_2$		$\{x \mid x < x_1$ 或 $x > x_2\}$	$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$
	$\Delta = 0$ 解集为 $\{x_1\}$		$\{x \mid x \in \mathbf{R}$ 且 $x \neq x_1\}$	$\varnothing$
	$\Delta < 0$ 解集为 $\varnothing$		$\mathbf{R}$	$\varnothing$

(3) 二次函数的解析式有三种形式:

$f(x) = ax^2 + bx + c$;$f(x) = a(x + m)^2 + n$;$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ 其中 $a \neq 0$,要学会根据不同的情况合理选用.

(4) 二次函数的图象是一条抛物线,对称轴方程为 $x = -\dfrac{b}{2a}$,当 $a > 0$ 时,抛物线开口向上,当 $a < 0$ 时,抛物线开口向

下，当$\Delta = b^2 - 4ac > 0$时，二次函数的图象与x轴有两个交点$M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$，$|M_1M_2| = |x_1 - x_2| = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

3. 简单分式不等式的解法

(1) 形如$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$型

$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$或$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

(2) 形如$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$型

$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$或$\begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

(3) 形如$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$型

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

(4) 形如$\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$型

$\dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leqslant 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$

例题点析

1. 解下列不等式

(1) $|\frac{1}{2}x - 7| \leqslant 1$;(2) $|3 - 5x| > 2$;(3) $2 < |3x - 1| \leqslant 4$

【分析】 把$\frac{1}{2}x - 7, 3 - 5x, 3x - 1$分别看做一个整体，即可将绝对值符号去掉.

【解析】 (1) $|\frac{1}{2}x - 7| \leqslant 1$等价于$-1 \leqslant \frac{1}{2}x - 7 \leqslant 1$.

解得$12 \leqslant x \leqslant 16$，∴ 原不等式的解集为$\{x | 12 \leqslant x \leqslant 16\}$

(2) 原不等式等价于$3 - 5x < -2$或$3 - 5x > 2$，解得$x > 1$或$x < \frac{1}{5}$，∴ 原不等式的解集为$\{x | x < \frac{1}{5}$或$x > 1\}$

(3) 原不等式等价于：

$2 < 3x - 1 \leqslant 4$或$-4 \leqslant 3x - 1 < -2$，

解得：$1 < x \leqslant \frac{5}{3}$或$-1 \leqslant x < -\frac{1}{3}$

∴ 原不等式解集为$[-1, -\frac{1}{3}) \cup (1, \frac{5}{3}]$

【评析】 (3) 中，也可将$2 < |u| \leqslant 4$转化成与之等价的不等式组：$\begin{cases} -4 \leqslant 3x - 1 \leqslant 4 \\ 3x - 1 < -2 \text{ 或 } 3x - 1 > 2 \end{cases}$

解此一元一次不等式组，即可得原不等式的解集.

2. 对任意实数x，若不等式$|x + 1| - |x - 2| > k$恒成立，则k的取值范围是　　(　　)

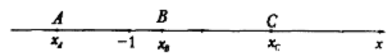
A. $k < 3$　　B. $k < -3$

C. $k \leqslant 3$　　D. $k \leqslant -3$

【分析】 利用绝对值的几何意义或数形结合解决.

【解析】 解法一：根据绝对值几何意义：

$|x + 1|$和$|x - 2|$可分别看作是数轴上的任意点x，到点-1和点2的距离，我们在数轴上任取三个点x_A, x_B, x_C.



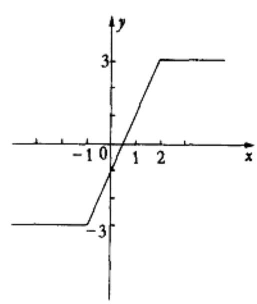
显然有① $|x_A + 1| - |x_A - 2| = -3$，② $|x_C + 1| - |x_C - 2| = 3$，③ $-3 < |x_B + 1| - |x_B - 2| < 3$.

∴ $-3 \leqslant |x + 1| - |x - 2| \leqslant 3$，

若$|x + 1| - |x - 2| > k$恒成立，则只需$k < -3$. 故选B.

解法二：令$y = |x + 1| - |x - 2|$，在平面直角坐标系中作出图象.

$$y = |x + 1| - |x - 2| = \begin{cases} -3 & (x \leqslant -1), \\ 2x - 1 & (-1 < x < 2), \\ 3 & (x \geqslant 2). \end{cases}$$



从图象看出$y \in [-3, 3]$

∴ 要使$|x + 1| - |x - 2| > k$恒成立，只需$k < -3$.

【评析】 运用数形结合思想，可使问题形象化、直观化.

3. (1998年全国) 设$a \neq b$，解关于x的不等式$a^2x + b^2(1 - x) \geqslant [ax + b(1 - x)]^2$.

【分析】 把不等式化为一元二次不等式的标准形式，再由一元二次不等式的解法求解.

【解析】 原不等式可化为：$(a^2 - b^2)x + b^2 \geqslant (a - b)^2x^2 + 2(a - b)x + b^2$，即$(a - b)^2(x^2 - x) \leqslant 0$.

∵ $a \neq b$，即$(a - b)^2 > 0$.

∴ $x^2 - x = x(x - 1) \leqslant 0$.

解之得原不等式的解集为$\{x | 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

【评析】 $(a - b)^2$的讨论，是简化解法的关键.

命题走向

这部分内容是高考必考内容，它们有时单独、直接地出现在选择题、填空题以及以含有参数的形式出现在解答题一、二题中，难度低中档，有时与函数、三角、解析几何等知识综合以解题工具的面貌出现在一些大小综合题中.

误区点窍

【例】解不等式 $|x-a|>a$.

【错因点评】原不等式变为 $x-a>a$ 或 $x-a<-a$，即 $x>2a$ 或 $x<0$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\{x|x>2a$ 或 $x<0\}$.

本题错误在于误认为 a 一定为正数，但题目中并没有规定 $a>0$，所以应对 a 进行讨论.

【正确思路】(1) 当 $a<0$ 时，$x\in\mathbf{R}$；

(2) 当 $a=0$ 时，$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0$；

(3) 当 $a>0$ 时，原不等式变为 $x-a>a$ 或 $x-a<-a$ 即 $x>2a$ 或 $x<0$.

临场技巧

1. 掌握去绝对值符号常用方法.
2. 利用对应的一元二次方程的根写出解集.
3. 注意分类讨论的标准.
4. 注重函数的性质在解不等式中的应用.

仿真题演练

1. 若 $x\in\mathbf{R}$，则 $(1-|x|)(1+x)>0$ 的充要条件是 (　　)

A. $|x|<1$　　B. $x<-1$

C. $|x|>1$　　D. $x<-1$ 或 $-1<x<1$

2. 若不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$，则 $a+b$ 的值为 (　　)

A. 10　　B. -10

C. 14　　D. -14

3. 解下列不等式

(1) $|3-5x|>2$；(2) $|2x-3|<x-1$；(3) $2<|3x-1|\leqslant4$.

前沿题精练

1. 若不等式 $(a-2)x^2+2(a-2)x-4<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,2]$　　B. $[-2,2]$

C. $(-2,2]$　　D. $(-\infty,-2)$

2. 不等式 $|x-a|<b(b\in\mathbf{R})$ 的解集为________.

3. 关于实数 x 的不等式

$$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$$

与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant0$（其中 $a\in\mathbf{R}$）的解集依次记为 A 与 B，求使 $A\subseteq B$ 的 a 的取值范围.

前瞻题巧练

1. 不等式$\frac{x-1}{3-x} \geq 0$的解集是 ( )

 A. $\{x \mid x \geq 3$或$x \leq 1\}$ B. $\{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$

 C. $\{x \mid x > 3$或$x \leq 1\}$ D. $\{x \mid 1 \leq x < 3\}$

2. 不等式$\frac{|x-2|}{2x-5} < 0$的解集是________.

3. 已知抛物线$y = (m-1)x^2 + (m-2)x - 1 \quad (m \in \mathbf{R})$.

 (1) 当m为何值时,抛物线与x轴有2个交点?

 (2) 若关于x的方程$(m-1)x^2 + (m-2)x - 1 = 0$的2个不等实根的倒数平方和不大于2,求$m$的取值范围.

 (3) 如果抛物线与x轴相交于A、B两点,与y轴交于C点,且$\triangle ABC$的面积等于2,试确定m的值.

猜题练兵场

1. 有以下命题:

 ① 如果x_1, x_2是方程$x^2 + bx + c = 0$的两个实根,且$x_1 < x_2$,那么不等式$ax^2 + bx + c < 0$的解集为$\{x \mid x_1 < x < x_2\}$;

 ② 当$\Delta = b^2 - 4ac < 0$时,二次不等式$ax^2 + bx + c > 0$的解集是$\varnothing$;

 ③ $\frac{x-a}{x-b} \leq 0$与$(x-a)(x-b) \leq 0$解集相同;

 ④ $\frac{x^2-2x}{x-1} < 3$与$x^2 - 2x < 3(x-1)$的解集相同.

 其中正确命题的个数是 ( )

 A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

2. 全集$U = \mathbf{R}$,$A = \{x \mid |x| \geq 1\}$,$B = \{x \mid x^2 - 2x - 3 > 0\}$,则$(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$等于 ( )

 A. $\{x \mid x < 1$或$x \geq 3\}$ B. $\{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$

 C. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ D. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$

3. $a = (1.1)^{-\frac{1}{2}}$,$b = (0.9)^{-\frac{1}{2}}$,$c = 1$,则a, b, c的大小关系为 ( )

 A. $a < b < c$ B. $a < c < b$

 C. $b < c < a$ D. $c < a < b$

4. 若关于x的不等式$|x+2| + |x-1| < a$的解集为$\varnothing$,则a的取值范围为 ( )

 A. $(3, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$

 C. $(-\infty, 3]$ D. $(-\infty, 3)$

5. 已知$f(x) = x^2 + 2mx + m^2 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2}$,当$x \in (0, +\infty)$时,恒有$f(x) > 0$,则$m$的取值范围是________.

6. 不等式$\frac{3-|x|}{|x|+2} \geq \frac{1}{2}$的解集为________.

7. 若函数$y = \sqrt{kx^2 - 6kx + (k+8)}$的定义域为$\mathbf{R}$,则$k$的取值范围是________.

8. 关于x的不等式$\sqrt{x} > ax + \frac{3}{2}$的解集为$\{x \mid 4 < x < b\}$,求$a, b$的值.

1.4　简易逻辑

考纲定位

了解命题的概念和命题的构成；理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"含义；理解四种命题及其相互关系.掌握充要条件的意义.

知能梳理

1. 逻辑联结词

(1) 命题　可以判断真假的语句叫做命题.

(2) 逻辑联结词　"或"、"且"、"非"这些词叫做逻辑联结词.

或：两个简单命题至少一个成立.

且：两个简单命题都成立.

非：对一个命题的否定.

(3) 简单命题与复合命题　不含逻辑联结词的命题叫简单命题；由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

(4) 表达形式　用小写的拉丁字母 $p,q,r,s,\cdots$ 来表示简单命题.

复合命题有三类：

① p 或 q；② p 且 q；③ 非 p.

(5) 真值表　表示命题真假的表叫真值表.

① 非 p 形式复合命题真值表

p	非 p
真	假
假	真

② p 且 q 形式复合命题真值表

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

③ p 或 q 形式复合命题真值表

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

2. 四种命题

(1) 一般地，用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论，用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定，于是四种命题的形式就是：

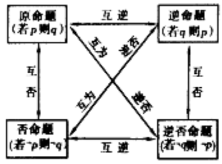
原命题　若 p 则 q $(p\Rightarrow q)$；

逆命题　若 q 则 p $(q\Rightarrow p)$；

否命题　若 $\neg p$ 则 $\neg q$ $(\neg p\Rightarrow\neg q)$；

逆否命题　若 $\neg q$ 则 $\neg p$ $(\neg q\Rightarrow\neg p)$.

(2) 四种命题的关系：



(3) 一个命题的真假与其他三个命题的真假有如下四条关系：

① 原命题为真，它的逆命题不一定为真.

② 原命题为真，它的否命题不一定为真.

③ 原命题为真，它的逆否命题一定为真.

④ 逆命题为真，否命题一定为真.

3. 充要条件

(1) 如果 p 成立则 q 成立，即 $p\Rightarrow q$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.如果 p 成立则 q 成立，且 q 成立则 p 成立，即 $p\Leftrightarrow q$，则称 p 是 q 的充分必要条件.

(2) 充要关系的判断　我们常用推出符号"$\Rightarrow$"来判断两个命题之间的充要关系：

① $p\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的充分非必要条件；

② $p\not\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$，则 p 是 q 的必要非充分条件；

③ $p\not\Rightarrow q$ 且 $q\not\Rightarrow p$，则 p 是 q 的既非充分也非必要条件；

④ $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$（即 $p\Leftrightarrow q$），则 p 是 q 的充要条件.

例题点析

1. 已知：全集 $U=\mathbf{R}$，$A\subseteq U$，如果命题 $p:\sqrt{3}\in A\cup B$，则命题"非 p"是　　（　　）

A. 非 $p:\sqrt{3}\notin A$

B. 非 $p:\sqrt{3}\in \complement_U B$

C. 非 $p:\sqrt{3}\notin A\cap B$

D. 非 $p:\sqrt{3}\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

【分析】 由 p 写出非 p，再由集合的运算性质判断.

【解析】 由题意，非 $p:\sqrt{3}\notin A\cup B$，

$\therefore\ \sqrt{3}\in\complement_U(A\cup B)$，

$\therefore$ 非 $p:\sqrt{3}\in(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$，

$\therefore$ 应选 D.

【评析】 因为 $U=\mathbf{R}$，所以 $\sqrt{3}\in\complement_U(A\cup B)$，然后根据 $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 即得结果.

2. 分别写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

(1) 若 $q<1$，则方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根.

(2) 若 $ab=0$，则 $a=0$ 或 $b=0$.

(3) 若 $x^2+y^2=0$，则 x,y 全为零.

【分析】 写出一个命题的逆命题、否命题、逆否命题的关键是分清原命题的条件和结论，然后按定义来写.在判断原命题及逆命题的真假时，要借助：原命题与其逆否命题同真假，逆命题和否命题同真假.

【解析】(1) 逆命题：若方程 $x^2+2x+q=0$ 有实根，则 $q<1$，为假命题.

否命题：若 $q\geq 1$，则方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根，假命题.

逆否命题：若方程 $x^2+2x+q=0$ 无实根，则 $q\geq 1$，真命题.

(2) 逆命题：若 $a=0$ 或 $b=0$，则 $ab=0$，真命题.

否命题：若 $ab\neq 0$，则 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，真命题.

逆否命题：若 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$，则 $ab\neq 0$，真命题.

(3) 逆命题：若 x,y 全为零，则 $x^2+y^2\neq 0$，真命题.

否命题：若 $x^2+y^2\neq 0$，则 x,y 不全为零，真命题.

逆否命题：若 x,y 不全为零，则 $x^2+y^2=0$，真命题.

【评析】数学命题的四种形式以及真假的判断是数学学习过程中经常运用或进行变式学习的基本方式，是研究一个数学问题的四个方面.

3. 已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，$a,b\in\mathbf{R}$，对命题"若 $a+b\geq 0$，则 $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$".

(1) 写出逆命题，判断其真假，并证明你的结论.

(2) 写出其逆否命题，并证明你的结论.

【分析】根据四种命题之间的关系写逆命题、逆否命题. 利用特例、反证法，证互为逆否的命题，从而证明结论.

【解析】(1) 逆命题是：若 $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geq 0$，它是成立的，可用反证法证明它.

假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，$b<-a$. 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，则 $f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$，所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，与条件矛盾，所以逆命题为真.

(2) 逆否命题是：若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则 $a+b<0$. 它为真，可证明原命题为真来证明它.

因为 $a+b\geq 0$，所以 $a\geq -b$，$b\geq -a$；因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(a)\geq f(-b)$，$f(b)\geq f(-a)$，所以 $f(a)+f(b)\geq f(-a)+f(-b)$. 所以逆否命题为真.

【评析】(1) 当证明一个否定性命题的真假发生困难时，通常转化为判断它的逆否命题的真假.

(2) 利用反证法证题要注意其步骤.

命题走向

基本的逻辑知识是人们认识和研究问题不可缺少的工具. 高考中主要考查命题与命题之间的逻辑关系以及判断是非的能力和推理能力，这里尤其要重视反证法的应用. 充分、必要条件一直是热点.

误区点窍

【例】写出下列命题的否定：

(1) 若 $m^2+n^2+a^2+b^2=0$，则实数 m,n,a,b 全为零.

(2) 正方形的四边相等.

(3) $a,b\in\mathbf{N}$，若 $a\cdot b$ 可被 5 整除，则 a,b 中至少有一个能被 5 整除.

(4) 若 $x^2-x-2\neq 0$，则 $x\neq -1$ 且 $x\neq 2$.

【错因点评】典型错误：

(1) 的否定是：若 $m^2+n^2+a^2+b^2\neq 0$，则实数 m,n,a,b 全不为零；

(2) 的否定是：正方形的四边全不相等；

(3) 的否定是：$a,b\in\mathbf{N}$，若 $a\cdot b$ 不能被 5 整除，则 a,b 中至少有一个不能被 5 整除；

(4) 的否定是：若 $x^2-x-2\neq 0$，则 $x=-1$ 且 $x=2$.

分析：此类题的易错点有两个，第一个是将命题的否定和否命题混淆，命题的否定是条件不动，将命题的结论否定，而否命题是将命题的条件和结论均否定；第二个易错点是不会否定，如将"全为零"否定写成"全不为零".

错解(1) 中错在将条件不该否定却否定了，而结论的否定应为"不全为零"却写成了"全不为零". 错解(2) 中错在将"四边相等"的否定错写为"四边全不相等"，应为"四边不全相等". 错解(3) 中错在条件不该否定却否定了，结论的否定也错了，"至少有一个"的否定为"一个也没有"或"全都不"，但错解中否定了"被 5 整除". 错解(4) 中错在结论的否定写错了，只将"$\neq$"否定为"$=$"而忽略了同时应将"且"否定为"或".

【正确思路】(1) 若 $m^2+n^2+a^2+b^2=0$，则实数 m,n,a,b 不全为零；或若 $m^2+n^2+a^2+b^2=0$，则 m,n,a,b 中至少有一个不为零.

(2) 正方形的四边不全相等.

(3) $a,b\in\mathbf{N}$，若 $a\cdot b$ 可被 5 整除，则 a,b 都不能被 5 整除；或 $a,b\in\mathbf{N}$，若 $a\cdot b$ 可被 5 整除，则 a,b 中没有一个能被 5 整除.

(4) 若 $x^2-x-2\neq 0$，则 $x=-1$ 或 $x=2$.

临场技巧

1. 特殊值法：判断命题的真假、判断充分与必要条件往往用特殊值法来否定结论.

2. 反证法：用反证法证题的步骤是：(1) 否定结论、(2) 推出矛盾、(3) 否定假设，(4) 肯定结论. 其关键是推出矛盾. 一般地，命题的结论涉及"否定"，结论是证明"至少…"，"至多…"，"…是惟一的"，"存在(或不存在)…"，往往用反证法.

3. 抓住四种命题，利用等价命题论证(解答)问题.

仿真题演练

1. 如果命题"p 或 q"为真，命题"p 且 q"为假，则 (　　)

A. 命题 p 和命题 q 都是假命题

B. 命题 p 和命题 q 都是真命题

C. 命题 p 和命题"非 q"真值不同

D. 命题 p 和命题"非 q"真值相同

2. 在空间中，① 若四点不共面，则这四点中任何三点都不共线；② 若两条直线没有公共点，则这两条直线是异面直线. 以上两个命题中，逆命题是真命题的是________. (把符合要求的命题序号都填上)

3. $x^2<x$ 是 $x>0$ 的 (　　)