冯克诚　刘以林　编著

学习方法指导丛书

7 数学解题与学习指导策略

运用优异学习方法促进学习进步

学业指导的规范蓝本

『第一学习』就是掌握学习方法

冯克诚　刘以林　编著

学习与方法指导丛书　之七

数学解题与学习指导策略

国际文化出版公司

目　录

数学学习与解题的常用思维策略

数学课堂学习指导程式

数学学习与解题的常用思维策略

审题与分析策略十法

审题与分析是解题的先导，以获得解题最佳思维程序为目的。常见的审题与分析的策略与方法有以下几种：

1. 观察人门

(1)观察数列的变化规律。例　已知数列$\{a_n\}$的前5项是1，2，4，7，11，试写出这个数列的一个通项公式。

审析：易发现相邻两项的后项与前项的差是等差数列，1，2，3…，推得$a_n-a_{n-1}=n-1$，迭加得$a_n=a_1+1+2+\cdots+(n-1)=1+\frac{n(n-1)}{2}$

注：数列$\{a_n\}$是二阶等差数列。

(2)观察条件与结论之间的联系

例　已知$\sin\alpha=a\sin\beta$，$\mathrm{tg}\alpha=b\,\mathrm{tg}\beta$（$\alpha$、$\beta$为锐角，且$\alpha<\beta$），试用a、b表示$\cos\alpha$。

审析：结论不含"β"，把β视作参数消去，利用$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$求解，由$\mathrm{tg}\alpha=b\,\mathrm{tg}\beta$，得$\cos\beta=\frac{b\sin\beta}{\mathrm{tg}\alpha}$，将$\sin\beta=\frac{\sin\alpha}{a}$代入$\cos\beta=\frac{b}{a}\cos\alpha$。

$\therefore(\frac{b}{a}\cos\alpha)^2+\frac{\sin^2\alpha}{a^2}=1$，即$b^2\cos^2\alpha+1-\cos^2\alpha-\alpha^2=0$。

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{\dfrac{a^2-1}{b^2-1}}$.

(3)观察方程的结构特征。例　解方程 $|x+1|+\sqrt{x-2}=2$。

审析：方程的解受 $x-2\geqslant 0$，即 $x\geqslant 2$ 制约，此时 $|x+1|\geqslant 3$，$\therefore |x+1|+\sqrt{x-2}\geqslant 3>2$，故原方程无解。

(4)观察特征数。例　已知 $1<x<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$，试比较 $\sin x^2$ 与 $(\sin x)^2$ 的大小。

审析：注意到当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 为单调递增的，故由 $1<x<\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\Rightarrow 1<x^2<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 1<x<x^2<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow \left.\begin{matrix}\sin x<\sin x^2\\(\sin x)^2<\sin x\end{matrix}\right\}(\sin x)^2<\sin x^2$。

2. 定义运用

数学中的定理、法则都建立在相应的定义和公理的基础上，因此，对一类问题利用定义解题不失为一种本质的方法。不少学生在解题时能自觉地根据问题的特点联系相应的定理、法则，但对定义的应用却缺乏自觉的意识。因此，提高解题速度就须善于对一类问题利用定义解题。

例　已知二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个不为零的根 x_1、x_2，若 $s_1=x_1-x_2$，$s_2=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}$，求 as_1+cs_2。

解：由方程根的定义有

$ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$，可化为 $ax_1^2+c=-bx_1$，$ax_2^2+c=-bx_2$，

$$\begin{aligned}\therefore as_1+cs_2&=ax_1-ax_2+c\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\\&=ax_1+\frac{c}{x_1}-\left(ax_2+\frac{c}{x_2}\right)\\&=\frac{ax_1^2+c}{x_1}-\frac{ax_2^2+c}{x_2}\\&=\frac{-bx_1}{x_1}-\frac{-bx_2}{x_2}\end{aligned}$$

若用韦达定理处理这一题，其过程就不如上述简单。

3. 尝试探求

(1)试代验证

例　试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}$ 的所有正根。

审析：$x=2$ 显然是方程的一个正根。现检验除 $x=2$ 外没有其它正根。

解：考察 $x=3$ 是方程的一个正根。

①若 $x>2$，令 $x=2+p(p>0)$，则 $(2+p)^2=4+4p+p^2>4+p=2+(2+p)$，即 $x^2>2+x$，$\therefore x>\sqrt{2+x}$，继续用此不等式代替右端的 x，就有 $x>\sqrt{x+2}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\cdots>\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}$，∴原方程不可能有大于 2 的正根。

② 若 $0<x<2$，令 $x=2-p(0<p<2)$，则 $(2-p)^2=4-4p+p^2=4-p(4-p)<4-p=2+(2-p)$，则 $x^2<2+x$，$\therefore x<\sqrt{x+2}$ 同(1)得 $x<\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}$，∴原方程不可能有小于 2 的正根。因此，方程只有唯一正根 $x=2$。

(2)猜测验证

例　设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 是满足 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ 的两个整数无穷数列，试用 a_n、b_n 表示 $(1-\sqrt{2})^n$ 的表达式。

审析：考察式子特征，猜测 $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ 的可能性存在，经数学归纳法证明命题为真。

4. 逆向探求

例　解方程 $|3x-2|+|3x+1|=3$。

审析：寻找不等式 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 取等号的条件求解。

解：左式 $=|2-3x|+|1+3x|\geqslant|(2-3x)+(1+3x)|=3$，等号仅在 $2-3x$ 与 $1+3x$ 同号或有一式为零时成立。

由 $\begin{cases}2-3x\geqslant0\\1+3x\geqslant0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2-3x\leqslant0\\1+3x\leqslant0\end{cases}$ 得原方程的解是 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{3}$。

5. 筛选、淘汰

例　设 m、n 为自然数，且 $m>n$，对于集合 $A=\{1,2,3,\cdots m\}$，$B=\{1,2,3,\cdots,n\}$，求满足 $B\cap C=\varnothing$ 的 A 的子集 C 共有多少个？

审析：逐个考察题中元素淘汰与题设不合的，留下符合条件的重新组合。

解：A的子集总共有2^m个，而其中含$1,2,\cdots n$中的自然数组成的集合与条件不符，而且仅有$n+1,n+2,\cdots,m$中的自然数组成的集合才能满足$B\cap C=\varnothing$，而这种子集的个数是2^{m-n}，即为所求。

6. 引入记号(或字母)

例　若$x\in R$，求证：$x^6-x^3+x^2-x+1>0$。

审析：引入"y"，$y=x^3$，归结为证明关于y的二次三项式的值为正。

证明：令$x^3=y$，记$M=x^6-x^3+x^2-x+1=y^2-y+(x^2-x+1)$，∵$\Delta=(-1)^2-4(x^2-x+1)=-(2x-1)^2-2<0$，而二次系数为正，故$M>0$，∴原不等式得证。

7. 形数相帮

例　如果方程$x^2+2ax+k=0$的两实根在方程$x^2+2ax+a-4=0$的两实根之间，试求a，k应满足的关系式。

审析：函数$y_1=x^2+2ax+k$，$y_2=x^2+2ax+a-4$都是开口向上且形状相同又有公共对称轴的抛物线，把问题归纳为两条抛物线顶点的纵坐标间关系问题，同时要考察顶点与x轴位置关系。

解：设$y_1=x^2+2ax+k=(x+a)^2-a^2+k \quad (1)$

$y_2=x^2+2ax+a-4=(x+a)^2-a^2+a-4 \quad (2)$

满足题设充要条件是抛物线(1)的顶点纵坐标不大于零且大于抛物线(2)的顶点纵坐标。

即$\begin{cases}-a^2+k\leqslant 0\\ -a^2+k>-a^2+a-4\end{cases}$　　解得$a-4<k\leqslant a^2$。

8. 利用隐蔽条件

例　求满足下列方程的实数x，y：$5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$

审析：由于该方程是二次方程(或可为无理方程)，可能隐含若干个非负数之和的形式从而通过配方由每个非负数必须为零求解。

解：配方得$(x+2y+2)^2+(2x+y-1)^2=0$，于是有且只有$x+2y+1=0$，$2x+y-1=0$，解得$x=1$，$y=-1$

9. 转换目标

例　解方程$\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+1}=\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x+1}$。

审析：如采用直接去分母求解，显得麻烦，审查方程两边的两个分式的特点：分子与分母含有的项数相同，且对应各项绝对值相同，可利用合分比化简。

解：根据合分比定理，有

$$\frac{(x^2+3x+2)+(x^2-3x+2)}{(x^2+3x+2)-(x^2-3x+2)}=\frac{(2x^2+3x+1)+(2x^2-3x+1)}{(2x^2+3x+1)-(2x^2-3x+1)}$$

即$\frac{x^2+2}{3x}=\frac{2x^2+1}{3x}$，解得 $x_1=0, x_2=-1$。

经检验 x_1、x_2 都是原方程的解。

10. 从特殊突破，推出一般

例　已知 $6<a<10$，$\frac{a}{2}\leqslant b<2a$，$c=a+b$，那么有（　　）。

(A)$9\leqslant c\leqslant 30$；　(B)$15<c<30$；

(C)$9<c\leqslant 18$；　(D)$9<c\leqslant 30$；

(E)$9<c<30$。

解：取 a 的临界值代入已知式：

$a=6$，则有 $3\leqslant b<12$，$9\leqslant a+b<18$；

$a=10$，则有 $5\leqslant b<20$，$15\leqslant a+b<30$.

推出　$9<a+b<30$ 正确，选(E)。

此外，在审题与分析过程中，一要学会讨论求解，如解不等式 $\operatorname{arctg}x\leqslant a$（当 $a\leqslant-\frac{\pi}{2}$ 时，解集为$\varnothing$；$-\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}$ 时，解集为$(-\infty,a]$；$a\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，解集为 R）；二要学会变更问题，如两直线 $x+y+4=0$，$x-y=0$，各与圆 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 相交，求证：所成的两个弓形（小于半圆）的面积相等。若据平面几何知识：同圆内两弓形面积相等，则其对应的弦长也相等，进而便有圆心与这两条弦的距离也相等。实施解析化手段即为求点线间的距离，这就是我们改证的目标；三是要分清错题与无解题。如求实数 k，使方程 $x^2+kx+(\frac{5}{4}k-1)=0$ 的两根为直角三角形两锐角的正弦（本题无解）。又如已知 $\sin\alpha=\frac{5}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{11}{14}$，且 α 与 β 为锐角，求 cosβ。这是一道错题（已知条件自相矛盾）。

怎样寻找解题思路的入口

"万事开头难"，解题也一样，面对一道数学题目，尤其是解那些变式或综合题，从何处入手找到解题思路的突破口，这是许多学生的一大苦衷。因此，教师要想学生所想，在解题思路教学中，突出解题思路入口寻找的指导，使学生在潜移默化中逐步学会寻找解题思路的一般方法，从而顺利地解题。

1. **抓关键信息**

一道数学题中有许多可以利用的信息，有的直露，有的隐晦；有的简单，有的复杂；有的重要，有的次要。我们应当善于抓住最主要的信息，从关键处入手，这样往往容易找到解题的突破口。

例　前卫工厂共有工人1300人，如果调走男工$\frac{1}{3}$，又调走女工50人，这时男女工人的人数相等。这个工厂原有男、女工各多少人？

题目的四个主要条件中，"这时男、女工人数相等"是一个关键条件，首先抓住这个特殊句子下手，再抓住含有分率的句子分析，知道原来男工人数可以看作"1"，这样现在男、女工人数的对应分率都是$(1-\frac{1}{3})$，由此可先求出男工人数：$(1300-50)\div(1-\frac{1}{3}+1)=750$（人），再求出女工人数：$1300-750=550$（人）。

题目中有诸如"……相等"、"比……多(少)"、"是……倍"等特殊句子，实际上已经暴露了解题的关口。

2. **抓因果关联**

数学应用题中都存在着或明或暗的因果关联，有些题目则更显眼地突出这种现象，这时应当紧紧抓住"果"去析"因"，便很快可以找到解题的入口处。

例　一个长方体木料，高增加2厘米，就成为一个正方体，这时表面积增加了56平方厘米。原来长方体木料的体积是多少？

抓住"果"（表面积增加56平方厘米）设问："表面积为什么比原来增加了56平方厘米？"从而找到"因"——"高增加了2厘米"。

再抓住"果"(就成为一个正方体)设问:①原来长方体怎么会变成正方体的?②几个面共增加56平方厘米?③增加的每个面是什么形?

这样的设问,使题中一系列信息不断发生碰撞,从撞击的火光中解题入口便暴露无遗:

①求出每个长方形的面积→②求出正方体的棱长→③求出长方体的长和宽→④求出长方体的高→⑤求出长方体的体积。即

$(56\div4\div2)\times(56\div4\div2)\times(56\div4\div2-2)=245$(立方厘米)

显然,"求每个长方形的面积"这一判断,就是从题中因果关联分析中作出的。

3. 抓结构特征

典型应用题都有其显明的结构特征,这种结构特征能告诉我们解题的关键,实质上就是暗示了解题思路的突破口,如归一问题的解题关键是先求同一个单位的数量;平均问题的解题关键是找到总份数对应的总数量;相遇问题的解题关键是先求出两车速度的和。这些应用题大多可从条件或问题入手,用分析法和综合法找到解题思路。

抓住算式的结构特征或几何图形的结构特征下手,也是找到解题入口的通法。

例 计算 $45\times28+46\times72$。

看到这种"乘加"结构,立即会联想到乘法分配律的结构,再将式中个别数据作适当处理,便能找到简便计算入口:

$$45\times28+46\times72=45\times28+45\times72+72$$
$$=45\times100+72=4572.$$

4. 抓部分情节

较复杂的应用题总是由几道简单应用题组合起来的。组合后的应用题不仅数量关系多了,其情节也繁杂起来,这时应当将有关情节分割开来,暂时先放弃一部分情节,集中精力找到另一部分情节的解题入口。

例 单独加工一批零件,甲要8小时,乙要12小时,甲乙两人同时合作

加工了4小时，这时甲比乙多做25个零件。照这样计算，完工时两人各做了多少只？

这是道情节和关系都比较复杂的综合题。对此宜将原题分割成三个部分（以完整句划分），对这三个部分到底先从哪个情节入手？显然，只有解决了第一个情节问题，后两个问题才能迎刃而解。因此，当机立断，从此入手先求出这样两个有用的结论：

①甲比乙每小时多完成几分之几？

$\frac{1}{8}-\frac{1}{10}=\frac{1}{40}$

②甲乙合作几小时完成？

$1\div(\frac{1}{8}+\frac{1}{10})=4.8$（小时）

第①个结论作用于第二部分情节，便可求到这批零件总数：

$35\div[(\frac{1}{8}-\frac{1}{10})\times4)]=150$（个）

第②个结论作用于第三部分情节，便可求到最后的问题：

$150\times(\frac{1}{8}\times4.8)=90$（个）

$150\times(\frac{1}{10}\times4.8)=60$（个）

上面介绍了四种寻找解题思路入口的常见手段，实际解题时应灵活运用，有时还应根据具体题目，凭借经验、直觉、灵感等不断尝试、直至获得成功。

数学归纳法证题步骤与技巧

在数学问题中，有一类问题是与自然数有关的命题。自然数有无限多个，不可能就所有自然数一一加以验证，所以用完全归纳法是不可能的。但就部分自然数进行验证即用不完全归纳法得到的结论，又是不可靠的。这就需要寻求证明这一类命题的一种切实可行而又满足逻辑严谨性要求的新方法——数学归纳法。

1. **数学归纳法的范围**

数学归纳法是以自然数的归纳公理做为它的理论基础的。因

此，数学归纳法的适用范围仅限于与自然数有关的命题。它能帮助我们判断种种与自然数 n 有关的猜想的正确性。

2. 数学归纳法两个步骤的关系

第一步是递推的基础，第二步是递推的根据，两个步骤缺一不可，有第一步无第二表，属于不完全归纳法，论断的普遍性是不可靠的；有第二步无第一步中，则第二步中的假设就失去了基础。只有把第一步结论与第二步结论联系在一起，才可以断定命题对所有的自然数 n 都成立。

3. 第二数学归纳法

第二数学归纳法的证明步骤是：

(1)证明当 $n=1$ 时命题是正确的；

(2)k 为任意自然数，假设 $n<k$ 时命题都是正确的，如果我们能推出 $n=k$ 时命题也正确，就可以肯定该命题对一切自然数都正确。

数学归纳法和第二归纳法是两个等价的归纳法，我们把数学归纳法也叫做第一归纳法。有些命题用第一归纳法证明不大方便，可以用第二归纳法证明。

4. 数学归纳法的原理

数学归纳法证明的是与自然数有关的命题，它的依据是皮亚诺提出的自然数的序数理论，就是通常所说的自然数的皮亚诺公理，内容是：

(1)1 是自然数。

(2)每个自然数 a 有一个确定的“直接后继”数 a'，a' 也是自然数。

(2)$a'\neq 1$，即 1 不是任何自然数的“直接后继”数。

(4)由 $a'=b'$，推得 $a=b$，即每个自然数只能是另外的唯一自然的“直接后继”数。

(5)任一自然数的集合，如果包含 1，并且假设包含 a，也一定

包含 a 的“直接后继”数 a′，则这个集合包含所有的自然数。

皮亚诺公理中的(5)是数学归纳法的依据，又叫归纳公理。

数学归纳法的应用及举例。

例 用数学归纳法证明 $f(n)=4^{2n+1}+3^{n+2}(n\in N)$ 可被 13 整除。

证明：(1)当 n＝1 时，$f(1)=4^3+3^3=91$，91 能被 13 整除，命题成立；

(2)假设当 n＝k 时，$f(k)=4^{2k+1}+3^{k+2}$ 能被 13 整除，那么

$$f(k+1)=4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}=4^{2k+3}+3^{k+3}$$
$$=16\cdot4^{2k+1}+3\cdot3^{k+2}$$
$$=3(4^{2k+1}+3^{k+2})+13\cdot4^{2k+1}.$$

因为由假设知 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 能被 13 整除，又 $13\cdot4^{2k+1}$ 也能被 13 整除，这就是说，当 n＝k＋1 时，f(k＋1)能被 13 整除。根据(1)、(2)，可知命题对任何 $n\in N$ 都成立。

下面按归纳步中归纳假设的形式向读者介绍数学归纳法的几种不同形式以及它们的应用。

(1)简单归纳法。即在归纳步中，归纳假设为“n＝k 时待证命题成立”。这是最常用的一种归纳法，称为简单归纳法，大家都比较熟悉，这里不再赘述。

(2)强归纳法。这种数学归纳法，在归纳步中，其归纳假设为“n≥k 时待证命题成立”。我们称之为强归纳法，又叫串值归纳法。通常，如果在证明 p(n＋1)成立时，不仅依赖于 p(n)成立，而且还可能依赖于以前各步时，一般应选用强归纳法，下面举例说明其应用。

例 有数目相等的两堆棋子，两人轮流从任一堆里取几颗棋子，但不能不取也不能同时从两堆里取，规定凡取得最后一颗者胜。求证后者必胜。

证：归纳变元 n 为每堆棋子的数目。设甲为先取者，乙为后取者。

奠基 n＝1，易证乙必胜。

归纳 设 n≤k 时，乙必胜。现证 n＝k＋1 时也是乙必胜。

设甲在某堆中先取 r 颗，0＜r≤k。乙的对策是在另一堆中也取 r 颗。有二种可能：

(1)若 $r<k$，经过两人各取一次之后，两堆都只有 $k-r$ 颗，$k-r<k$，现在又轮到甲先取，依归纳假设，乙必胜。

(2)若 $r=k$，显然是乙胜，证毕。

上述形式的归纳法虽然比较简单，但如使用不当，往往会发生错误，有两点应注意：第一，在使用归纳假设时防止无形中引入不相干的假设。第二，在证明过程中应注意数学规律的正确性。下面我们引入一个反例，在这个反例中，由于错误的证明导致证得了错误的待证命题。

反例：证明任意 n 条直线均能重合成一条直线。

下面给出错误的证明：

证：奠基 $n=1$ 时该命题成立。

归纳 利用强归纳法，可以有如下的归纳假设：任意 1 条，2 条，3 条，…，k 条直线均重合成一条直线，要证 $k+1$ 条直线也重合成一条直线，设这 $k+1$ 条直线为 $l_1, l_2, \cdots, l_k, l_{k+1}$。由强归纳假设得 $l_1, \cdots, l_k$ 重合为一条直线，记为 l。又由强归纳假设得 l 和 l_{k+1} 重合为一条直线，于是任意 n 条直线便重合一条直线了。

细心的读者也许已经发现这里的错误了，这是由于错误地使用了强归纳假设而造成的。具体地说，这是在“l 和 l_{k+1} 这两条直线重合为一条直线”这一点把强归纳假设使用错了。强归纳假设中并没有包含这一条件，因为我们这里奠的基是 $n=1$，因此待证命题“$k+1$ 条直线重合为一条直线”要求对于一切大于等于 1 的 k 成立，而上面证明中所假设的 l 和 l_{k+1} 重合为一条直线实际上是要求 $k\geqslant 2$，这就是错误的所在。

(3)参变归纳法。在待证命题中含有参数的时候，例如 $P(u, n)$，则用数学归纳法证明 $P(u,n)$ 对一切 n 成立时，在奠基步中，应证 $P(u,0)$ 对一切 u 成立。在归纳步中，假设 $P(u,k)$ 对一切 u 成立，证明 $P(u,k+1)$ 对一切 u 成立。这里，“$P(u,k)$”对一切 u 成立称之为参变归纳假设，这种证明方法叫做参变归纳法，u 起着参数的作用。

例　求证当 $n\geqslant3$ 时有 $n^{(n+1)}\geqslant(n+1)^3$。

本题证明的困难主要在于归纳步骤，无论采用哪种归纳假设，都难于证明。如果我们对该待证命题施展一定的技巧，把该式中的部分 n 写成 u（视作参数），部分 n 保持不变，即写成

$$nu^n\geqslant(u+1)^n,$$

则可用参变归纳法证明当 $u\geqslant n\geqslant3$ 时上式成立，原命题即可得证。

奠基 $n=3$ 时，对 $u\geqslant3$ 的一切 u 均有

$$
\begin{aligned}
\text{右端}&=3u^3=u^3+u\cdot u^2+u^2\cdot u\\
&\geqslant u^3+3u^2+9u\\
&>u^3+3u^2+3u+1\\
&=(u+1)^3=\text{右端}
\end{aligned}
$$

归纳　$n=k+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
\text{左端}&=(k+1)u^{k+1}=u(k+1)\cdot u^k\\
&=(uk+u)u^k\geqslant(uk+k)u^k\\
&=k(u+1)u^k\geqslant(n+1)(u+1)^k\\
&=(u+1)^{k+1}=\text{右端}。
\end{aligned}
$$

所以当 $u\geqslant n\geqslant3$ 时，有 $nu^n\geqslant(u+1)^n$。

令 $u=n$，上式便为 $n^{n+1}\geqslant(n+1)^n$，即为原不等式，故原不等式得证。

值得指出的是，上面三种形式的数学归纳法，都要求待证命题含有自然数变元 n，对 n 施行归纳，n 称为归纳变元，但是在数学的一些分支中，有些待证命题表面上看来似乎不含自然数变元 n，但仔细一分析，实际上是含有自然数变元的，当我们一旦把 n 的含义明确以后，用数学归纳法去证明这些待证命题就迎刃而解了。举一个简单的例子。

例　证明由{a，b，c，d}四个标识符利用十、一运算符组成的任意算术表达式中，所含标识符的个数一定等于这个表达式中运算符的个数加 1。

证：设任意的表达式为 f，而归纳变元 n 为 f 中所含运算符的个数。

奠基　$n=0$，则 f 由一个标识符组成（因为没有运算符），所以命题成立。

归纳　假设 $n\leqslant k$ 时本命题成立，现证 $n=k+1$ 时本命题也成立。f 一定是下述两种情况之一：

f 是 f_1+f_2 或 f 是 f_1-f_2。

其中 f_1,f_2 所含的运算符个数都小于 k+1,对 f_1,f_2 使用归纳假设,可得 f_1+f_2,f_1-f_2 中所含标识符个数也比各自所含的运算符的个数多 1。

(4)广义归纳法。数学归纳法不仅可用于含有自然数变元 n 的命题,经推广后,还可用于含有某些其它集合上的命题。这种集合,称为归纳集。对于一个含有某个归纳集上的变元 x 的待证命题 P(x),所用的归纳法称之为广义归纳法。

定义:设有一个集合 A,如果它满足下面三个性质:

(1)$a_1,a_2\cdots,a_n$ 是 A 中的元素($n\geqslant1$);

(2)如果 x 是 A 中元素,则 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots f_{1n_1}(x)$ 也是 A 中的元素($n_1>0$);

如果 x,y 是 A 中元素,则 $f_{21}(x,y),f_{22}(x,y),\cdots f_{2n_2}(x,y)$ 也是 A 中元素($n_2>0$);…;

如果 $x_1\cdots,x_m$ 是 A 中元素,则 $f_{m_1}(x_1,\cdots x_m),f_{m_2}(x_1\cdots,x_m),\cdots f_{mn_m}(x_1\cdots,x_m)$ 也是 A 中元素($m\geqslant1,n_m>0$)。

(3)A 中的元素仅限于此。

则 A 称之为归纳集,$a_1,a_2,\cdots a_n$ 称为该集的开始元素,诸 f_{ij} 称为该集的生成函数(其中第一下标为该函数的元素,第二下标以区分具有同样元素的各函数)。

按照上述的定义,自然数集是归纳集,它的开始元素是 0,生成函数是 $f(x)=x+1$。

前例中集{a,b,c,d}的元素利用"+","-"运算所构成的一切表达式的集合是归纳集,开始元素是 a,b,c,d,生成函数为 $f_{21}(x,y)=x+y$,$f_{22}(x,y)=x-y$。

在证明含有某个归纳集 A 上的变元 x 的待证命题 P(x)时,可用如下的广义归纳法。

奠基步要证明 $P(a_1),P(a_2),\cdots\cdots P(a_n)$ 成立,这里 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 是 A 中的开始元素。

归纳法要证明对于 $1\leqslant i\leqslant m$ 及 $1\leqslant j\leqslant n$ 的所有 i、j 对于 A 中的任何元素