

6-8104

GHUZHONG PINGMIAN JIHE FUXI ZHIDAO

初中平面几何复习指导

安化第一中学数学教研组编

湖南人民出版社

初中平面几何复习指导

安化第一中学数学教研组编

內 容 提 要

本書分五章：基本概念、證明題、計算題、作圖題、例題，是結合初中平面幾何課本編的。每章都舉了一些典型性的例題，並列了一些思考題。

本書比較全面、系統、扼要，適合初中學生總復習及教師指導復習之用，並可供初中各年級學生及社會青年自學、進修或復習之用。

編號：(湘)1103

初中平面幾何復習指導

編者：安化第一中學數學教研組

出版者：湖南人民出版社

(長沙市新華路)

(長沙市新華路)

印刷者：湖南省新華印刷廠

發行者：湖南省新華書店

開本：787×1092 1/32

1958年9月第一版

印張：8.178

1959年11月第8次印刷

印數：173,000

印數：151,201-171,200

統一書號：13109·8

定價：(5)五角

編 者 說 明

(一)本書分基本概念、證明題、計算題、作圖題及測量題五章。每章舉了一些典型性的例題。本書雖是綜合編的，但各自成一段落，適合初中學生總復習及老師指導復習之用。為了便于初中二年一期、二年二期、三年一期的學生也能作復習之用，特在每題後面註明了現用幾何課本的節數。如例1題後記有(§39)，就是表示此題到了講授課本§39時，便可進行練習和復習，各教師選作例題之用。如教師選作例題時，可交代學生課後自行復習。

(二)定理的前面記有“*”號的，是表示補充的定理。這些大多是已證過的習題，為一般所公認的。

(三)本書每一類題注意了總結方法，並指出了各種的解法；尤其是對於作輔助線，注意了指出規律，因此可以启发讀者思考，使讀者在解題時不致茫無所從。

(四)本書除有適當的例題說明方法外，並附有思考題、練習題和補充題，使讀者在看過例題後，就可為解這些題打下基礎，減少解題的許多困難；並且，可以使讀者通過自己思考和練習之後，使獲得的知識得到鞏固與提高。

(五)本書除可供初中畢業班作為復習指導外，並可供初中程度的社會青年作為自學、進修或復習之用。

1958年6月

目 录

第一章 緒論	(1)
(一)基本概念	(1)
(二)作輔助綫的方法	(24)
第二章 証明題	(28)
(一)三角形全等的証明	(28)
(二)角、綫段(或弧)不相等的証明	(35)
(三)平行綫与平行四边形的証明与应用	(50)
(四)有关梯形的証明	(60)
(五)兩綫段(或弧)相等的証明	(62)
(六)綫段(或弧)的倍、分、和、差关系的証法	(72)
(七)角的等量关系的証明	(86)
(八)兩綫垂直的証法	(93)
(九)点共綫(几点在一直綫上)的証法	(104)
(十)綫共点(几条直綫交于一点)的証法	(107)
(十一)点共圓(几个点在一个圓上)的証法及应用	(111)
(十二)圓共点(几个圓交于一点)的証法	(116)
(十三)其他	(119)
第三章 計算題	(123)
(一)長度的計算	(123)
1. 关于一般綫段的計算	(123)

2. 关于三角形有关线段的计算	(126)
3. 关于四边形有关线段的计算	(129)
4. 关于圆有关线段的计算	(136)
(二) 角度和弧度的计算	(143)
1. 相关的角	(143)
2. 三角形及四边形的角的计算	(149)
3. 多边形的角与对角线	(154)
4. 和圆有关的角	(157)
第四章 作图题	(161)
(一) 任意三角形的基本作图	(164)
(二) 直角三角形的基本作图	(165)
(三) 三角形奠基法	(166)
(四) 关于平行四边形及特殊四边形的作图	(182)
(五) 平行移动法	(188)
(六) 对称法	(193)
○ (七) 求具有某种性质的点的轨迹	(195)
○ (八) 轨迹法	(197)
(九) 其他杂题的作法	(215)
第五章 测量题	(221)
附: 补充题	(224)
附: 答案和解答(或提示)	(243)

第一章 緒 論

(一) 基本概念

1. 几何图形.

点、綫、面、体或者它們的集合，都叫做“几何图形”，简称“图形”。

〔体〕 当我们只研究一个物体的形状和大小，而不研究它的其他性质时，就把这个物体叫做“几何体”，或简称为“体”。体是空间的有限部分，有长、闊和厚。

〔面〕 是几何体同着空间的界限。只有长和闊，沒有厚。（面有平面、曲面等等。）

〔綫〕 是两个面的界限。只有长，沒有闊和厚。（綫有直綫、曲綫等等。）

〔点〕 是两条綫的界限。只有位置，沒有长、闊和厚。（点动成綫，綫动成面，面动成体。）

〔全等形〕 把一个几何图形放到另一个几何图形上面，如果它們的各部分能够完全重合，这两个几何图形就叫全等形。（“全等于”的符号是 \cong ）

2. 几何学:

是研究物体的形状、大小和相互位置的科学。

〔平面几何学〕 只研究平面几何图形的性质的几何学。

〔立体几何学〕 研究不在同一平面上的几何图形（即空间

几何图形)的性质的几何学。

3. 直线、线段、射线及其区别：

〔直线〕 是最简单的线。紧紧拉着的细线，给我们以直线的概念。直线是没有定长的(即没有端点，两端都是无限长的)。



〔线段〕 是直线上任意两点间的部分。有定长(即有两个端点，如A点、B点)。



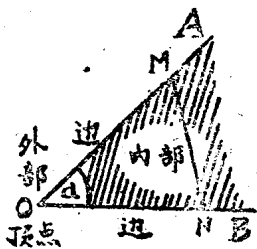
线段的中点——平分一条线段的点叫做线段的中点，也叫平分点。(线段的中点只有一个)

〔射线〕 是在直线上某一点一旁的部分。它有一个端点(如A点)，另一端是无限长的。



4. 角：

从同一点引出的两条射线所组成的图形，叫做角。组成角的两条射线，叫做角的边。两射线的公共端点，叫做角的顶点。角的两边分平面为两部分。如果在两边上各取一点、连结一线段，这线段所在的部分，一般称为角的内部(如图中线段MN所在的部分)。另一部分，称为角的外部。(角的符号是 \angle)



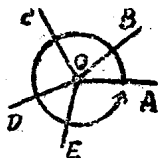
附：角的读法——上图的角，可读做角AOB，角O或 α 。(写成 $\angle AOB$ ——顶点的字母应放在中间， $\angle O$ 或 $\angle \alpha$)

〔平角〕 角的两边互为反向延长线的，叫平角(为 180°)。



〔周角〕 是绕着一点周围的各个相邻的角的和。也可以说

是由互相重合的兩条射綫所組成的图形，連同
在端点周圍的整个平面一起来看，我們把它叫
做周角(即二平角，为 360°)。如右图。



[直角] 90° 的角叫直角。(可用d或 $\angle R$ 与rt
表示)。如 $\angle 1$ 。



[銳角] 小于直角的角，叫做銳角。

如 $\angle 2$ 。



[鈍角] 大于直角而小于平角的角，叫做
鈍角。如 $\angle AOB$ 。



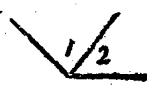
角平分綫——平分一个角的射綫，叫做这个角的平分綫或
角二等分綫。(一个角的平分綫只有一条。)

5. 相关的角:

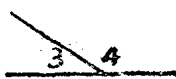
[余角] 两个角的和等于 90° ，这两个角就叫做互为余角。

[补角] 两个角的和等于 180° ，这两个角就叫做互为补角。

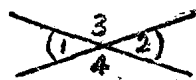
[鄰角] 两个角有公共的頂点，一条公共的边，它們的另一
边在公共边的兩旁，这两个角叫做互为鄰角。如
右图的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 。



[鄰补角] 有公共的頂点和一条公共边，非公共边互为反
向延長綫，这样互为鄰角又互为补角的两个
角，叫做互为鄰补角。如右图的 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 。



[对頂角] 一个角的两边分别是另一个角的两边的反向延
長綫，这两个角就叫做对頂角。如右图的
 $\angle 1$ 和 $\angle 2$; $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 。



6. 綫段(或弧)的相等和角的相等。(弧的定义見28条)

〔相等的綫段(或弧)〕 把一条綫段(同圓或等圓的弧)放到另一条綫段(或弧)上,如果它們的兩個端点分別重合,这两条綫段(或弧)就叫做相等的綫段(或弧)。

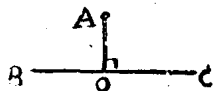
〔相等的角〕 把一个角放到另一个角上,如果它們的各相当部分(角的頂点、兩边、内部)都能够重合,这两个角就叫做相等的角。

7. 垂綫和斜綫:

〔互相垂直〕 两条直綫相交成直角,这两条直綫就叫做互相垂直。“垂直于”的符号是 \perp

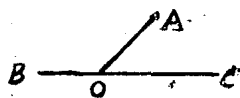
〔垂綫, 垂足〕 两条直綫互相垂直,其中的一条叫做另一条的垂綫。交点叫垂足(或垂綫足)。

〔垂綫的長〕 从直綫外的一点向这直綫引垂綫,这点到垂綫足的綫段的長,叫做这垂綫的長(如右图AO)。



〔斜綫, 斜綫足〕 相交的兩条直綫,不互相垂直,其中的一条就叫做另一条的斜綫。交点叫做斜綫足。

〔斜綫的長〕 从直綫外的一点向这直綫引斜綫,这点到斜綫足的綫段的長,叫做这斜綫的長(如右图AO)。



8. 折綫:

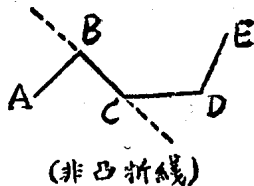
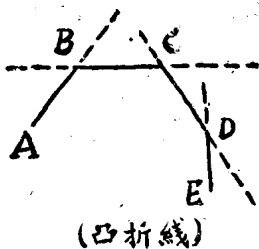
不在同一直綫上而順次首尾相接的若干綫段,总称为折綫。

〔折綫的边〕 指組成折綫的各綫段。

〔折綫的頂点〕 指相鄰兩边的公共端点。

〔折綫的長〕 指折綫的各边的和。

〔凸折綫〕 把折綫的每一条边向兩方延長成直綫,如果这



折线的其他各边都在这直线的同旁,这样的折线,就叫做“凸折线”。

9. 多边形(也叫封闭折线):

指首端和末端相重合的折线。

(凸封闭折线,又叫做凸多边形,本书简称多边形。三边形是最简单的多边形,通常叫三角形。)



(凸多边形)

(非凸多边形)

[多边形的边] 指封闭折线的线段。

[多边形的顶点] 指封闭折线的顶点。

[多边形的角] 把多边形的边想象成从顶点出发的射线,那末多边形相邻两边所成的角,叫多边形的角,也叫内角。

[多边形的外角] 多边形任意一个角的邻补角,叫做这多边形的外角。(如三角形的任意一个角的邻补角,就叫做这三角形的外角。)

[多边形的对角线] 指连结多边形的不相邻的两个顶点的线段。

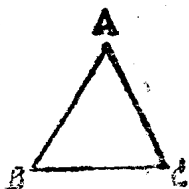
[多边形的周长] 指多边形各边的和。

10. 三角形:

是三条边的多边形。(有三条边、三个角等六个元素。三角

形的符号是 \triangle)

〔夹角〕 三角形的两边所组成的角，叫做这两边的夹角。如 $\angle A$ 是 AB 和 AC 的夹角。



〔对角〕 三角形一边所对的角，叫做这一边的对角。如 $\angle A$ 是 BC 的对角。

〔夹边〕 三角形两个角所公有的一边，叫做这两个角的夹边。如 BC 是 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的夹边。

〔对边〕 三角形一个角所对的一边，叫做这一个角的对边。如 BC 是 $\angle A$ 的对边。

〔底〕 任意三角形任何一边可称为底。或称为底边。

〔顶角〕 认定的底所对的角，叫顶角。

〔底角〕 用底边的两端点做顶点的两个角，叫底角。

11. 三角形的分类:

按边分

不等边三角形——三边各不相等的(也叫斜三角形)。如右图。



等腰三角形——有两边相等的。相等的两边叫腰，其他一边叫底，两腰的夹角叫顶角，腰和底边的夹角叫底角。(等腰三角形也叫二等边三角形)。如右图。



等边三角形——三边都相等的(也叫正三角形)。如右图。

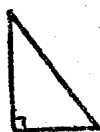


按角分

銳角三角形——三个角都是銳角的。如右图。



直角三角形——三个角中有一个角是直角的。夾直角的兩条边叫做直角边(又叫勾和股)。直角的对边叫斜边(又叫弦)。如右图。



鈍角三角形——三个角中有一个角是鈍角的。如右图。

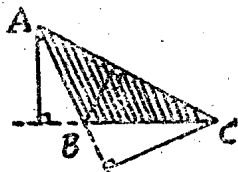


12. 三角形中的主要綫:

〔三角形的角平分綫〕 是平分三角形的任意一个角并且以这个角的对边为界的綫段。(有三条,都在三角形內。)

〔三角形的中綫〕 是連結三角形任意一个角的頂点和它的对边的中点的綫段。(有三条,都在三角形內。)

〔三角形的高〕 是从三角形任意一个角的頂点向它的对边或对边的延長綫上引垂綫,从頂点到垂足間的綫段。(有三条,銳角三角形的三条高都在三角形內;鈍角三角形,夾鈍角的兩边上的兩条高,在这兩边的延長綫上,鈍角所对的边上的高在三角形內;直角三角形兩直角边上的高,分别为另一条直角边,斜边上的高在三角形內。)

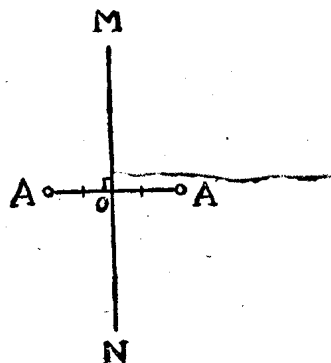


(鈍角三角形三条高的示意图)

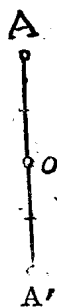
〔三角形的边的垂直平分綫〕 (也叫中垂綫)是过三角形任意一条边的中点,而与这边垂直的直綫。(有三条)

13. 对称:

[轴对称] 两个点(如A和A')在一条直线(MN)的两旁,并且在这条直线的同一条垂线上而和垂足的距离相等,那末这两个点(A和A')叫做关于这条直线(MN)为对称.这种以一条直线为标准而对称的,叫轴对称.这条直线叫对称轴.这两点中的任意一点叫做另一点关于这条直线的对称点.成轴对称的两点叫做轴对称点.由若干组轴对称点所组成的图形,叫做轴对称图形.轴对称图形,可将其中一部分绕轴翻转 180° 与另一部分重合(它们是全等的).



[中心对称] 两个点(A和A')对于连结它们的线段(AA')的中点(O)来说,叫做关于这一个中点(O)为对称.这种以一个中点为标准而对称的,叫中心对称.这一点(O)叫做对称中心.这两点中的任意一点叫做关于这一中点的对称点.成中心对称的两点,叫做中心对称点.由若干组中心对称点组成的图形,叫中心对称图形.中心对称图形,可将其中一部分绕着对称中心旋转 180° 与另一部分重合(它们是全等的).



14. 线段的垂直平分线:

是过一条线段的中点并且和这线段垂直的直线(也叫中垂线)。

(两点的对称轴,就是连结这两点的线段的垂直平分线。)

15. 等腰三角形的性质:

(1) 两腰相等。

(2) 兩底角相等。

(3) 兩腰上的中綫相等；高相等；兩底角的平分綫相等。

(試自証明)

(4) 頂角的平分綫，也是底邊上的中綫和高，以及底邊的垂直平分綫；也就是這個等腰三角形的對稱軸。

16. 等邊三角形的性質：

(1) 三邊相等。

(2) 三個角相等(都是 60°)。

(3) 三個角的平分綫(或三邊上的高、中綫)相等。

(4) 任何一個角的平分綫，也就是對邊上的中綫，高以及垂直平分綫，也就是這個等邊三角形的對稱軸。

17. 兩直綫的關係：

[重合] 是兩直綫的各個點互相重合成一條直綫。(把一條直綫放到另一條直綫上去，只要它們有任何不同的兩點分別重合，那末它們就完全重合。)

[相交] 兩條直綫只有一個公共點，叫相交。這點叫交點。

[平行] 在同一平面內的兩直綫無論如何延長不相交，叫平行。(用符號 \parallel 表示)

平行綫——在同一平面內不相交的兩條直綫叫平行綫。

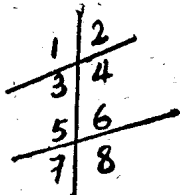
18. 兩條直綫和第三條直綫相交所成的角：

[同位角] 如： $\angle 1$ 和 $\angle 5$ ； $\angle 2$ 和 $\angle 6$ ；
 $\angle 3$ 和 $\angle 7$ ； $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 。

[內錯角] 如： $\angle 3$ 和 $\angle 6$ ； $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 。

[外錯角] 如： $\angle 1$ 和 $\angle 8$ ； $\angle 2$ 和 $\angle 7$ 。

[同旁內角] 如： $\angle 3$ 和 $\angle 5$ ； $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 。



[同旁外角] 如： $\angle 1$ 和 $\angle 7$ ； $\angle 2$ 和 $\angle 8$ 。

19. 距离：

[点与点間] 連結兩点的綫段的長，叫做這兩点間的距离。

[点与直綫間] 从直綫外的一点到这直綫所引垂綫的長，叫做从这点到这直綫的距离。

[平行綫間] 从兩条平行綫中的一条上的任意一点向另一条引垂綫，这条垂綫的長叫做兩条平行綫間的距离。

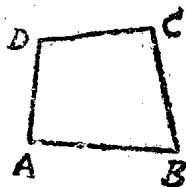
20. 四边形的边和角：

[对边] 不具有公共頂点的兩条边（如AD和BC；AB和CD）。

[鄰边] 具有公共頂点的兩条边（如AD和AB；AB和BC等等）。

[对角] 頂点不在同一条边上的两个角（如 $\angle A$ 和 $\angle C$ ； $\angle B$ 和 $\angle D$ ）。

[相鄰的角] 頂点在同一条边上的两个角（如 $\angle A$ 和 $\angle B$ ； $\angle B$ 和 $\angle C$ 等等）。



21. 平行四边形：

是兩組对边各相平行的四边形（用□的符号来表示）。它的性質：

(1) 对边平行而且相等。

(2) 对角相等；相鄰两个角的和等于 $2d$ 。

(3) 对角綫互相平分；对角綫的交点是对称中心；每条对角綫分这平行四边形为两个全等三角形。

[平行四边形的离] 就是兩对边間的距离。

22. 矩形：

是有一个角是直角的平行四边形(用口的符号来表示)。它的性質:

(1) 对边平行而且相等。

(2) 四个角都是直角(当然对角相等;相鄰两个角的和等于 $2d$)。

(3) 对角綫相等并且互相平分;对角綫的交点是对称中心(到各顶点的距离相等),每一条对角綫分这矩形为两个全等直角三角形。

(4) 有兩条对称軸。(是过矩形的对称中心,而和矩形的边平行的兩条直綫,它們是互相垂直的。)

23. 菱形:

是有一組鄰边相等的平行四边形。它的性質是:

(1) 对边平行、相等,而且四边都相等。

(2) 对角相等;相鄰兩角的和等于 $2d$ 。

(3) 对角綫互相垂直平分,并且平分內角;每一条对角綫分这菱形为两个全等的等腰三角形。兩对角綫就是它的对称軸,交点就是对称中心。

24. 正方形:

是有一个角是直角,并且有一組鄰边相等的平行四边形。它的性質是:

(1) 对边平行、相等,而且四边相等。

(2) 四个角都是直角(当然对角相等;相鄰兩角的和等于 $2d$)。

(3) 对角綫相等,互相垂直平分,并且平分內角;每一条对角綫分这正方形为两个全等的等腰直角三角形。对角綫的交