

飛機結構學

下 冊

許 玉 贊 編

中 國 科 學 圖 書 儀 器 公 司

出 版

飛機結構學

下 冊

許 玉 贊 編

中國科學書局儀器公司

出 版

目 錄

(下 冊)

第十三章 穩定橫斷面的支柱 柱的理論

13-1 柱損的種類	419	13-4 歐拉臨界載荷	428
13-2 塑性流柱損	422	13-5 塑性不穩定性的柱損	433
13-3 能量移轉和柱縮的關係	423	13-6 柱端拘束係數	441

第十四章 柱的扭損

14-1 變分法的目的	444	分方程式	463
14-2 變分法的符號	446	14-9 雙對稱斷面支柱的作用	466
14-3 變分法對銷端支柱的應用	448	14-10 單對稱斷面支柱的作用	468
14-4 薄壁構件的扭曲	452	14-11 不對稱斷面支柱的作用	470
14-5 單位扭曲的公式	455	14-12 已知轉軸位置的支柱方程式	474
14-6 應力、應變、扭曲的關係	459	14-13 扭曲力矩及扭曲常數的計算	476
14-7 彎扭支柱的能量	461		
14-8 未知轉軸位置的支柱微			

第十五章 平板的彎損應力

15-1 同素體平板的抗壓彎損強度	483	15-3 同素體平板的抗彎彎損強度	492
15-2 同素體平板的抗切彎損強度	491	15-4 在合成載荷下同素體平板的彎損強度	493

15-5 合成載荷的安全裕度 · 493

15-6 壓縮、剪切、及彎曲的合

成載荷 · · · · · 494

第十六章 薄壁圓柱體的綫損強度

16-1 薄壁圓柱體的抗壓綫損

強度 · · · · · 498

16-2 薄壁圓柱體的最後抗壓

強度 · · · · · 500

16-3 薄壁圓柱體的抗彎綫損

強度 · · · · · 500

16-4 薄壁橢圓柱體的抗彎綫

損強度 · · · · · 502

16-5 薄壁圓柱體的抗扭綫損

強度 · · · · · 502

16-6 在橫向切力及彎矩下薄

壁圓柱體的強度 · · 504

16-7 在橫向切力及彎矩下橢

圓柱體的強度 · · 505

16-8 在彎矩及扭矩的合成載

荷下圓柱體或橢圓柱

體的強度 · · · · 506

16-9 在壓縮及彎曲的合成載

荷下薄壁圓柱體的強

度 · · · · · 507

第十七章 加固平板及加固彎板的最後抗壓強度

17-1 同素體矩形平板在壓縮

時所受的最後載荷 · 508

17-2 彎板的最後抗壓強度 · 517

第十八章 通斷面及斷斷面的薄壁支柱 壓損應力

18-1 薄板彎成的角斷面 · · 519

18-2 槽形和等脚 Z 斷面 · · 525

18-3 斷斷面壓損應力 · · 529

18-4 通斷面的綫損應力 · · 531

18-5 平板段和彎板段合成斷

面的壓損應力 · · 534

第十九章 縱桿薄板合成構件的抗壓強度

19-1 加固平板的抗壓強度 · 539

19-2 縱桿的設計 · · · · 544

19-3 實驗決定的加固平板強

度 · · · · · 546

19-4 加固彎板的抗壓強度 · 553

19-5 波形板 · · · · · 556

第二十章 接 合

20-1 熔接 · · · · · 560

20-2 鋼焊 · · · · · 565

20-3 錫焊	565	20-6 鉚釘、螺栓、或銷上的載荷	574
20-4 膠合	566	20-7 傳遞力偶的鉚接合	577
20-5 鉚釘、螺栓、銷	569		

第二十一章 金屬梁的設計 抗切腹板

21-1 弦桿的不連續性	581	21-4 抗切腹板的臨界切應力	585
21-2 腹板設計	582	21-5 抗切腹板加固構件的尺寸	585
21-3 斜弦桿上的切力	584		

第二十二章 金屬梁的設計 半拉力場腹板

22-1 拉力場橫梁的說明	592	22-7 腹板弦桿接合鉚釘的載荷	607
22-2 全拉力場	593	22-8 腹板加固構件的設計	608
22-3 全拉力場橫梁的應力	598	22-9 弦桿應力	610
22-4 分析半拉力場橫梁時所用的符號	600	22-10 不平行弦桿及斜桁架構件	611
22-5 分析半拉力場橫梁時所用的假設	601	22-11 拉力場橫梁的撓度	612
22-6 腹板應力的計算	602		

第二十三章 彎梁及環

23-1 彎梁的抗彎應力	617	23-5 對稱及反對稱載荷	628
23-2 求 J 值的圖解法	621	23-6 圓環斷面上的多餘力	629
23-3 彎梁的撓度	623	23-7 彈心法	638
23-4 圓環彈性曲線的方程式	625		
中英名詞對照			649
參考書籍			650
索引			651

第十三章

穩定橫斷面的支柱 柱的理論

飛機構造常用薄板及加固構件組成的半硬殼式結構。這種結構的設計，須考慮應力在彈性及塑性範圍內的不穩定性。有人雖已做了很多理論與實驗工作，但欲免除現在採用的半經驗法的設計，還須繼續研究。

13-1 柱損的種類 承受壓力的支柱，縮短柱端間距離。從柱縮效應，可明瞭支柱在載荷下的作用。支柱每一微小部分內發生的應力，與柱縮、材料的彈性、構件的原尺寸有關，其結果使柱端載荷和內力維持平衡。任一柱縮的柱端載荷，稱為柱縮的平衡載荷。從實驗數據，可畫出各式壓縮構件的平衡載荷對柱縮的曲線。

圖 13-1 曲線 A，表示理想柱在載荷下的作用。理想柱是不彎而均勻的支柱，柱端載荷的作用線恰經每一橫斷面的形心，使支柱承受均佈應力。每一微小部分的縱向應變相等，柱軸保持不變，平衡載荷對柱縮的曲線，將和所用材料的壓縮應力應變圖同一形狀。在比例極限下，應力和應變有直線性關係，平衡載荷及柱縮的曲線，將如 A 曲線 O-I 部分的直線。如不管材料的彈性性質，繼續增大柱縮，使應力超過比例極限，則將發生塑性流，構件有永久變形。此時如把載荷減小或移去，只能恢復部分原形。初時，材料塑性的效應比增大橫斷面積的效應大，故曲線的斜度減小。在繼續壓縮下，

塑性較大的材料，將生相反效應，故 A 曲線的右端向上彎曲。脆料的塑性流很小，當最大切應力達到材料的最後剪切應力時，材料發生突然破裂，曲線將在如圖所示的點 2 終止。但飛機結構避免採用脆料，故對這種材料，以後不加討論。

實柱不易與理想柱的性質完全符合。實柱的縱軸不能絕對不變，柱端載荷不能恰在柱端橫斷面的形心，或材料不勻，使有些橫斷面上內力的合力，不經斷面的形心。通常這三種偏差，都使柱端載荷的作用線不經某些橫斷面的阻力心，因此發生彎矩，使柱發生如梁承受外彎矩或橫向載荷時所生的橫向撓曲。由於斷面上的彎矩改變，斷面上發生切力，如切力的合力不經斷面的切心，柱將發生扭轉。

粗短構件，無顯著彎曲及扭轉，構件以近似均勻的縱向應變，減短支柱長度，並發生對應的近似均佈抗壓應力。可將曲線

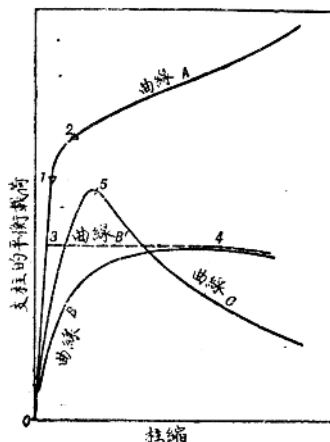


圖 13-1

A，作為這種構件的平衡載荷對柱縮的曲線。如構件稍有彎曲，O-1 部分應有極小曲率。通常假定材料的塑性流達到某預定值時，這種支柱已發生柱損。這種柱損稱為塑性流柱損。

A, B' 的合成曲線 (如圖 13-1 的 O-3-4) 是細長柱的平衡載荷對柱縮的曲線，橫向

撓曲或扭轉，發生如 B 曲線所示的大部分柱縮。愈近理想柱的支柱，它的載荷柱縮曲線愈能接近 $O-3-4$ 曲線。細長柱如和理想柱的性質完全符合，載荷柱縮曲線將沿 A 曲線從 O 點至某載荷的點 3。此點表示在某載荷下構件變為彈性不穩定。稍高於點 3 的臨界載荷，使柱彎曲，直至損壞為止。載荷柱縮曲線將如 3-4 的平線。實柱不能和理想柱完全符合，在載荷作用下，支柱有彎曲及扭轉的趨向。在 O 點上，載荷柱縮曲線的斜度和 A 曲線的相同；但當載荷增大時，斜度即將減小。初時減小徐緩，平衡載荷和柱縮約可維持正比，在繼續壓縮下，平衡載荷的增率小於柱縮增率，直至巨大柱縮只能發生極小平衡載荷的增值為止。此時柱縮實際上全由彎曲發生。由於柱軸的曲率，沿軸柱長的變率，和柱端直線距離的變率不同。利用變率的差數，可求理想柱或實柱彈性不穩定的載荷。

當彎曲使構件任一點的應力不超過材料的比例極限時，柱的作用將如彈簧；在移去柱端載荷時，柱將恢復原位置及橫斷面的尺寸，支柱完好如前，並無損壞。但如柱端繼續相向移動，在超過某定點時，繞曲線凹面纖維的抗壓應變超過比例極限，材料發生塑性流。支柱在塑性流時，柱縮增大，應力發生變化，結果減小平平衡載荷，這用點 4 右部分的曲線表出。如此時不能依照平衡載荷的減率減小柱端載荷，支柱不能穩定。為維持平衡，柱內發生巨大應力，因此支柱發生損壞。實際結構上的柱端載荷，不能如平衡載荷的減率減小，故柱的設計，應在常用載荷下，使支柱不致發生塑性流。

在增大平衡載荷的柱縮，柱端載荷和內力間的平衡，是穩定平衡；減小平平衡載荷的柱縮，是不穩定平衡。如增大或減小柱縮時，平衡

載荷保持不變，則是中性穩定平衡。中性穩定平衡的載荷，稱為最後載荷，是支柱能受的最大載荷。合於 B 曲線作用的細長柱的最後載荷，和支柱的倔强性（支柱的 EI ）有關，故將這種柱損，稱為彈性不穩定性的柱損，（有時亦稱長柱損）。

以上所述，是極長柱和極短柱的柱損特性。常用的柱長是中間長度，它的載荷柱縮曲線和圖 13-1 所示的 C 曲線相似。在較長支柱，實柱和理想柱的偏差所生的橫向撓度，使大部分壓縮纖維的應變超過比例極限。在不穩定性範圍內，柱縮增加，平衡載荷下降甚速，柱即損壞（不必如極長柱須在巨大撓度下，才損壞）。這種柱損，稱為塑性流不穩定性的柱損（有時亦稱短柱損）。

無扭轉或局部彎損的實斷面及厚壁空斷面的支柱，都稱為穩定橫斷面支柱。上述柱損，是關於穩定橫斷面支柱的柱損。用於飛機的壓縮構件有薄壁斷面，容易發生局部彈性損壞。部分斷面曲彎或扭轉後，把所負載荷移於較強部分。發生局部損壞後，如增加構件上的載荷，將擴大局部損壞的範圍，有些曲彎部分承受超過材料的屈點應力，發生局部的塑性流損壞。因此，設計薄壁支柱，須注意構件的比例，應使全柱不致整個損壞，薄壁部分亦不致局部損壞。

13-2 塑性流柱損 從塑性流的支柱上移去發生變形的載荷，構件不能回復原形。從實驗知：當抗壓應力超過比例極限時，構件開始發生塑性流；在應力低於屈點時，不致發生巨大永久變形或柱的不穩定性。

從拉伸實驗，得低碳鋼的正確屈點，在屈點時，材料有顯著伸長，

但應力增加極小，在比例極限下，應力應變成直線性變化。許多常用的飛機材料無此特性，故須定出假定的屈點應力及比例極限。大部分材料的應力應變線有一段近乎直線。在圖上畫一直線，和實驗線的直線段平行，普通假定 0.002 應變上畫出的直線和實驗線的交點，決定材料的屈點應力；在 0.0001 應變上畫出的直線，決定比例極限。上述規則，用於飛機常用的合金鋼和鋁合金等材料。

很少從壓縮實驗決定材料的壓縮屈點，通常假定壓縮屈點等於拉伸屈點。

關於木材構件可定出相當正確的壓碎應力，但無比例極限或屈點應力。

13-3 能量移轉和柱縮的關係 柱端載荷使支柱兩端發生相向移動。應用支柱移動時所生的能變，可決定支柱變為中性穩定時的載荷。此法根據力學原理，當一力作用點移動時，此力做功，施力物體和受力物體間發生能量移轉。功或能量可用下式表出：

$$U = \int_0^s F \cos \theta \, ds \quad (13-1)$$

式中的 U = 功或能量，厘米-仟克

F = 力，仟克

s = 作用點的起點和終點間的距離，厘米

θ = 力作用線和對應微小位移 ds 間的夾角

方程式 (13-1) 適用於一般情形：在移動時，力可改變其大小及方向，或可沿一曲線移動。如力沿作用線向前移動，力做正功，能量加於受力物體。如力向後移動，力做負功，受力物體的能量減小。

例如，兩物體互相接觸，互施相等而相反的力，當接觸面移動時，一力所做的正功等於另一力的負功。對於任一力都可應用方程式 (13-1)，以定由一物體至另一物體的能量移轉。

柱縮開始前，可把支柱當作在零縮和零載荷的平衡狀態。加於支柱的壓力，擾亂平衡，而使支柱縮短。通常假定柱端載荷從零值逐漸加至最大值，它的增率和構件內發生的內阻力增率相等。在此過程中，壓力向前移動柱縮的距離，並增加支柱的能量。從外力大小及移動距離，可算出加於支柱的能量。

如柱軸保持不變(圖 13-2a)，則外力 P_1 和對應柱縮 s_1 成正比，載荷柱縮曲線如圖 13-3 所示的直線。因此，柱縮 $s_1 = P_1 L / AE$ ，式中的 L 等於支柱的原長， A 等於橫斷面積， E 等於材料的彈性係數。可用總柱縮 s 表出總柱端載荷 P ，或 $P = sAE / L$ 。在軸向柱縮， P 力作用點沿作用線移動，因此 $\theta = 0$ ， $\cos \theta = 1$ 。從方程式 (13-1)，得外功

$$U_e = \int_0^s \left(\frac{sAE}{L} \right) ds = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (13-2)$$

因支端(支柱的左端)無移動，作用於該端的外力，並不做功，故方

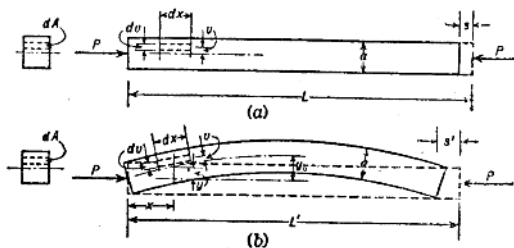


圖 13-2

程式 (13-2) 表示支柱承受載荷時的總外功。

如一力漸逐作用於一物體上, 力和作用點移動的變化, 可用如圖 13-3 的直線表出; 在直線範圍內, 作用點的總移動和總載荷之比是個常數。當一力依直線變化作用於一物體上, 或從一物體移去時, 該力所做的功, 等於最大力和作用點移動相乘的半數。

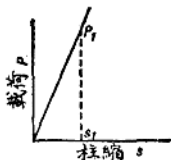


圖 13-3

支柱承受載荷時, 其微小部分的彈性應變使柱兩端的物體, 承受 P 力, 因此, 支柱和柱端載荷可維持平衡。減小或移去柱端載荷可解除應變。支柱伸長時, 施於柱端物體上的力作用點發生移動; 該力在移動時所做的正功, 就是加於柱端物體上的能量。此力和剩餘彈性應變成正比。如不超過材料的彈性極限, 移去柱端載荷後, 構件恢復原長。圖 13-3 也表示內阻力和支柱長變的關係。因阻力和長變成直線性變化, 所以該力所做的功等於 $P^2L/2AE$ 。在載荷過程中, 加於柱上的能量, 以應變能貯於柱內, 在遞減載荷時, 放出所貯能量。

物理學解釋, 能是做功量, 故構件承受載荷時吸收的應變能, 實是構件解除應變時所做的功量。這是應變能的一種計算法。如支柱能以應變能吸收全部外功, 則從加於構件上的外功, 就可算出構件的應變能。支柱的應變能, 實是支柱各微小部分的應變能總和, 如能計算完全解除這些應變時所生的功量, 亦可求得同一能量。以此法計算的應變能, 稱為內功。

假定支柱分成和柱軸平行的 dx 長及橫斷面積 dA 的微小部分。每一微小部分如一小柱。在壓力作用下, 各小柱將受軸向應力 f 。

如應力 f 並不超過彈性極限, 各小柱縮短 fdx/E 厘米。因有彈性應變, 小柱兩端的材料上承受彈性應力 f 仟克/方厘米。移去外力後, 小柱回復原狀, 施於鄰近小柱的彈性力, 將與應變成正比的減至零值, 故所做的功等於最大彈性力(仟克)和小柱的彈性變形(厘米)相乘的半數, 或小柱的內功等於

$$dU_i = \frac{f^2 dx dA}{2E} \quad (13-3)$$

使此式對全橫斷面 A 和對 x 從 O 到 L 積分, 得貯於柱內的總應變能。如柱在縮短時保持不變(如在導出方程式(13-2)時所作的假設), 則各小柱的 $f = P/A$, 而積分的結果等於

$$U_i = \frac{P^2 L}{2AE} \quad (13-4)$$

由於相同假定, 方程式(13-2)的外功和方程式(13-4)的內功相同。有些計算中, 外功式和內功式不是同一代數式, 但因兩式量出貯於柱內的同一應變能, 故兩式的數值必等。如同一應變能用不同代數式表出, 並且兩式中只有一未知數, 則使兩式相等, 即可求得一式中的未知數。

假定圖 13-2(b) 是支柱的撓曲形狀, 彎曲時柱端承受和柱軸平行的 P 力。彎曲時該力移動距離 s' , 增加柱的能量。 s' 等於彎柱的軸長和兩端直線距離的差數。如以 $y = \phi(x)$ 表示彎軸的曲線, $s' = \int_0^L ds - \int_0^L dx$, 式中的 ds 表示沿曲線的長度, dx 表示沿支柱直軸的長度, 因

$$ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots \right]$$

並將大於二次方的 dy/dx 略去不計，故得

$$s' = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] dx - \int_0^L dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

如在等柱端載荷 P 下發生彎曲， P 力所做的功等於

$$U_e = Ps' = \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (13-5)$$

因柱側向撓曲，橫斷面的形心不在柱端載荷作用線上，故每一斷面上發生彎矩 M (M 等於柱端載荷和撓度的乘積)。因此，每小柱承受柱端載荷及彎曲的合成應力 $f = P/A + Mv/I$ ，式中的 v 是小柱距斷面形心的距離。以 f 代入方程式 (13-3)，得小柱所貯的應變能

$$dU_i = \frac{f^2}{2E} dA dx = \frac{1}{2E} \left(\frac{P^2}{A^2} \pm \frac{2PMv}{AI} + \frac{M^2 v^2}{I^2} \right) dA dx \quad (13-6)$$

對全橫斷面積分，因 v 從斷面形心軸量出，故 $\int v^2 dA = I$ ， $\int v dA = 0$ 。以內功量出的柱應變能等於

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{1}{2E} \int_0^L \left(\frac{P^2}{A} + 0 + \frac{M^2}{I} \right) dx \\ &= \frac{P^2 L}{2AE} + \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \end{aligned} \quad (13-7)$$

從方程式 (13-4)，即知上式的第一項表示支柱均縮時所生的應變能，第二項表示彎曲變形時所生的應變能。

假定柱端載荷以直線變化從零增至 P 值，此時柱軸保持不彎，軸向縮短是支柱的唯一變形；再在柱端載荷 P 下，發生側向撓曲，得外功和內功的互等式如下：

$$\begin{aligned}\frac{Ps}{2} + Ps' &= \frac{P^2L}{2AE} + \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \\ &= \frac{P^2L}{2AE} + \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}\end{aligned}\quad (13-8)$$

在上列外功式和內功式中，有同一軸向柱縮功式，而有不同柱彎功式。這表示須在

$$\frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (13-9a)$$

條件下，等軸向載荷下所生的側向彎曲，才合於平衡。

假定解除彈性應變時，柱軸恢復直軸，並且 y 比 L 小得多，可用 d^2y/dx^2 代 M/EI ，得：

$$\frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx \quad (13-9b)$$

上式顯和柱軸撓曲線有關。卡思的義安諾氏指出在彈性範圍內，合於上式的柱軸撓曲線，須含有最小應變能的撓曲線（參攷書 A1, 280 頁）。

在許多普通問題，如欲合於卡氏最小應變能條件，則須採用構件的實曲線，因此不易應用方程式(13-9)。如假定的撓曲線能合理的接近實曲線（須與實柱的邊界條件相符），所得的結果和實值相差極小。

13-4 歐拉臨界載荷 上節假定支柱是個理想柱，並用梁原理導出方程式(13-8)。當載荷從零增至 P 時，假定支柱只有軸向柱縮而保持不彎；在 P 載荷下發生無限大彎曲，但尚保持平衡。上述理想柱作用，須在彎曲時所生的應力，不超過材料的屈點應力，並

撓度不大,仍可應用 $d^2y/dx^2 = M/EI$ 時,才適用。如前節所述,過大應力使構件發生塑性流。在過大撓度下,為維持平衡,柱內發生過大應力,支柱亦將損壞。由上述限制,方程式(13-9)的彈性曲線,應是最小彈性應變能的撓曲線,或近似曲線。例如,可用實曲線 $y = \delta \sin(\pi x/L)$ 作為圖 13-2 支柱的撓曲線,或用受均佈載荷 w 的簡支梁撓曲線 $y = wx(L^3 - 2Lx^2 + x^3)/24EI$ 作為彎柱的近似曲線。從方程式(13-9)算出兩者的結果,相差極小。後者和圖 13-2(b)的彎柱實曲線極接近,並且便於計算,故採用後式作為彎柱的近似曲線。

第一曲線的 δ 表示柱撓曲線未定值的最大撓度。以下式表出任一斷面的斜度

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi\delta}{L} \cos \frac{\pi x}{L}$$

當 $x = L/2$, 斜度為零,此式合於邊界條件。任一斷面的彎矩式,或 M/EI 為

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2\delta}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$$

當 $x = 0, x = L; M = 0$, 上式亦合邊界條件。代入方程式(13-9), 得

$$U_e = \frac{P}{2} \int_0^L \frac{\pi^2\delta^2}{L^2} \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

$$\text{及} \quad U_i = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{\pi^4\delta^2}{L^4} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

因 $\int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi = \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi = \frac{\pi}{2}$, 故上式變為

$$U_e = \frac{P\pi^2\delta^2}{4L} \quad (13-10a)$$

及
$$U_i = \frac{EI\pi^4\delta^2}{4L^3} \quad (13-10b)$$

使兩式相等,得

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (13-11)$$

上式和兩世紀前瑞士數學家歐拉氏用他法所得的結果相同。此式稱為歐拉公式,式中的 P 是支柱在中性穩定時柱端載荷的臨界值,常稱歐拉載荷,並以 P_e 表出。

在設計時,須知相當於歐拉載荷的平均抗壓應力。以柱面積 A 除方程式(13-11)等號兩端,並以迴轉半徑 ρ 代 $\sqrt{I/A}$,得

$$f_e = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 E}{(L/\rho)^2} \quad (13-12)$$

上式的 L/ρ ,稱為柱的長細比。計算方程式(13-10a)及(13-10b)對 δ 的偏導數,得

$$\frac{\partial U_e}{\partial \delta} = \frac{P\pi^2\delta}{2L} \quad \text{與} \quad \frac{\partial U_i}{\partial \delta} = \frac{EI\pi^4\delta}{2L^3} = \frac{P_e\pi^2\delta}{2L}$$

上式表示:如 $P < P_e$,撓度微小增加時所生的外功變率小於內功變率; $P > P_e$,外功變率大於內功變率, $P = P_e$,兩功變率相等。當 P 小於 P_e 時,力移動柱端位移時所生的能量,比柱再彎 $\partial\delta$ 時所需的能量小;理想柱在此情形下彎曲時,有變直趨向,使內力系和外力系達到平衡而成穩定體系。可見在導出方程式(13-8)時,自可假定全部載荷是依直線性作用於柱上以後,支柱才生彎曲。 $P > P_e$ 時,外功變率大於內功變率,加於體系的能量,比用應變能