测绘科技专著出版基金资助

郑宏 著

遗传算法在影像处理与分析中的应用

YICHUAN SUANFA ZAI YINGXIANG CHULI YU FENXI ZHONG DE YINGYONG

测绘出版社

遗传算法在影像处理与分析中的应用

郑 宏 著

测 绘 出 版 社

·北京·

内 容 简 介

本书以影像解译的自动化和智能化为根本目的，着重于介绍在影像自适应处理和分析中应用的遗传算法的理论和方法，其内容涵盖了遗传算法在影像的预处理、特征提取、分割与分类等方面的应用，所涉及的学科有遗传学、模糊理论和神经网络等。本书的内容体现了多种学科相互交叉、相互渗透的特点，是多种学科在影像信息学中相互融合的一个缩影。

本书突出应用以及理论和方法的阐述，并配有图例，便于读者理解，是一本数字图像智能处理方面的书籍。本书可供信息工程、电子工程、计算机科学与技术和遥感等领域的科技工作者和高等院校的师生阅读与参考。

图书在版编目（CIP）数据

遗传算法在影像处理与分析中的应用/郑宏著．—北京：测绘出版社，2003．7

ISBN 7-5030-1132-7

Ⅰ．遗…Ⅱ．郑…Ⅲ．遗传—算法—应用—航空摄影测量—图像处理 Ⅳ．P231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 047668 号

测绘出版社出版发行

（100054　北京宣武区白纸坊西街 3 号）

北京通州区次渠印刷厂印刷 · 新华书店经销

2003 年 7 月第 1 版 · 2003 年 7 月第 1 次印刷

开本：890×1240 1/16 · 印张：6

字数：185 千字 · 印数：0001～3000 册

定价：19.00 元

序 言

随着信息技术的发展，当前科学技术正进入多学科互相交叉、互相渗透、互相影响的时代， 遗传算法就是生命科学和工程科学相互交叉、互相渗透和互相促进的一个典型代表。它启迪于自然界生物的进化过程，借鉴了达尔文的物竞天演、优胜劣汰和适者生存的自然选择和自然遗传的机理，其本质是一种求解问题的高效、并行、全局搜索的方法。它能在搜索中自动获取和积累有关搜索空间的知识，并自适应的控制搜索过程以求得最优解。

影像信息处理和分析的自动化和智能化一直是测绘学与遥感学科亟待解决的一个瓶颈问题，而遗传算法作为一种新兴的基于生物进化思想而发展起来的通用的问题求解方法，具有高度并行、自组织、自适应和自学习等特征。因此，本书将遗传算法引入到影像的处理与分析之中，力图探索一条利用遗传算法进行影像处理和分析的有效途径，为实现影像信息处理和分析的自动化和智能化打下一定的基础。

本书既参考了许多有关遗传算法的文献资料，更结合了作者近年来在遗传算法方面新的研究成果。全书共分 8 章，第 1 章至第 3 章分析和总结了遗传算法的发展前景、基本理论、模型和方法，并针对影像处理的特点介绍了一整套适用于影像处理和分析的面向参数优化的一维遗传算法和面向结构和分布优化的二维遗传算法，其中详细讨论了两种遗传算法中有关遗传编码设计、适应度函数确定、选择策略确定和遗传算子设计等方面的问题，并介绍了一些新的遗传编码和算子。第 4 章将面向参数优化的一维遗传算法与模糊增强算法中的控制参数的选取相结合，介绍了模糊控制参数的自动确定和影像自适应模糊增强的理论与方法。第 5 章阐述了利用“遗传调制”的新思想来自动生成影像稳健特征提取模板，该模板可以提取具有旋转和尺度不变性的稳健的影像能量特征，书中给出了具体的算法和实验结果。第 6 章针对影像模糊聚类的分割算法中存在的参数预定难和效率低等问题，在影像稳健的能量特征基础上，论述了利用遗传算法获取具有旋转和尺度不变性的模糊聚类中心的新方法，提高了传统的模糊聚类分割方法的聚类精度和分割效率。第 7 章讨论了将遗传算法与人工神经网络相结合以解决传统神经网络中存在的一些问题，其中全面地阐述了利用遗传算法优化神经网络的思想和方法，并以使用最为广泛的神经网络模型——多层前向神经网络为例，详细讨论了同时优化网络的结构和权值的遗传神经网络的设计方法，同时给出了利用得到的遗传神经网络进行了影像分类的实例。第 8 章介绍了本书的研究成果在整幅航空影像上的应用情况和进一步的工作。

本书在编写的过程中得到了中国测绘研究院林宗坚教授的指导与帮助，作者在此表示衷心的感谢。需要指出的是，本书的完成与家人在各方面的支持和理解也是分不开的。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

作 者

2002 年 1 月于珞珈山

目　　录

第1章　绪　论

1.1　引言

随着信息技术的发展，当前科学技术正进入多学科互相交叉、互相渗透、互相影响的时代，这一点在摄影测量与遥感学科领域表现得尤为突出。一方面是人工智能、计算机视觉、数据库技术、信息系统技术等其它学科向该学科渗透，这种渗透的结果是使该学科能够利用其它领域的思想方法与技术手段来解决自己的问题，并以此来丰富自己的思想；另一方面是该学科向其它领域的渗透，如：工业生产中的产品质量检测、医学图像处理等，这种渗透的结果是使得摄影测量学的应用领域不断扩大，因而能够使其摆脱传统的测量与制图这一狭窄领域的束缚。进入 90 年代，随着摄影测量与遥感学科的发展和应用领域的拓宽，人们又对这一学科提出了许多新的要求与期望。而所有的期望之中，自动化和智能化的要求是最迫切和最基本的。

实现摄影测量与遥感的自动化和智能化的核心是实现影像信息处理的自动化和智能化。目前已经取得较大进展的是影像自动匹配与几何信息（或非语义信息）的自动提取，而物理属性（即语义信息）的自动提取——自动解译方面尚需极大的努力[1]，这主要受下面几个方面的限制[100,101]。

・视觉计算理论不够完善，把数字摄影测量作为视觉信息处理过程实现全自动化需要借助于相关学科（如神经生理学、人工智能、计算机视觉等）对视觉过程的理论认识，即明确阐述如何从二维影像获取三维场景模型的机理，而这些学科迄今为止还很难就视觉问题给出一个统一的理论。这就使得现有的摄影测量研究缺少一个可靠的视觉计算模型，而常常依赖本学科的传统方法和经验。

・现实世界场景的复杂性和多样性。现有算法往往基于一些特定的假设，这样这些算法对某些场景效果很好，对于一般情况则缺少可靠性和通用性。

基于上述原因，寻求一种具有自组织、自适应和自学习等智能特征的影像处理方法已成为这一学科的一个研究目标。而近些年来，一些新的研究方向如神经网络、细胞自动机和进化计算等，由于它们都是模拟某一自然现象或过程而发展起来的，并且具有适于高度并行与自组织、自适应、自学习等特征，因而引起了人们的极大兴趣。其中遗传算法最引人注目，该算法是基于生物进化思想而发展起来的一种通用的问题求解方法[7,102]。它采用简单的编码技术来表示各种复杂的结构，并通过对一组编码表示进行简单的遗传操作和优胜劣汰的自然选择来指导学习和确定搜索的方向。由于它采用种群的方式组织搜索，这使得它可以同时搜索解空间内的多个区域，从而得到全局最优解。另一方面，用种群组织搜索的方式使得遗传算法特别适合大规模并行计算。在赋予遗传算法自组织、自适应、自学习等特征的同时，优胜劣汰的自然选择和简单的遗传操作使遗传算法具有不受其搜索空间限制性条件（如可微、连续、单峰等）的约束及不需要其它辅助信息（如导数）的特点。这些崭新的特点使得遗传算法不仅能获得较高的效率而且具有简单、易于操作和通用的特性。因此，将遗传算法引入到影像的处理与分析之中，也许能为解决影像处理中的某些难题提供新的契机。

遗传算法（Genetic Algorithms，简称 GA）是在 20 世纪六七十年代由美国 Michigan 大学的 J. H. Holland 教授及其学生和同事发展起来的。70 年代初，Holland 提出了“模板定理”（Scheme Theorem），一般认为是“遗传算法的基本定理”，从而奠定了遗传算法研究的理论基础。1975 年，Holland 出版了著

名的《Adaptation in Natural and Artificial Systems》[107]，这是第一本系统论述遗传算法的专著，因此有人把1975年称为遗传算法的诞生年。80年代以后，遗传算法广泛应用到各种复杂系统的自适应控制以及复杂的优化问题中。目前，有数种以遗传算法为主题的国际会议在世界各地定期召开[107~114]。国际互联网上也有多种相关的mailing list。由于遗传算法应用范围之广泛，从一些杂志及国际会议论文集中都比较容易看到有关遗传算法应用方面的文章。现在已出版两种专门关于遗传算法的新杂志："Evolutionary Computation"（由MIT Press出版，1993年创刊）和"IEEE Transactions on Evolutionary Computation"（IEEE汇刊，1997年创刊），而且一些国际性期刊也竞相出版以遗传算法为主题的专刊[103~106]。

当前，遗传算法的研究内容十分广泛，如遗传算法的设计与分析、遗传算法的理论基础及其在各个领域中的应用等等。遗传算法在影像处理领域中的应用目前尚处于起步阶段，本论文研究的主要目的是探索一条遗传算法在影像的处理和分析中应用的有效途径，为实现摄影测量和遥感的智能化打下一定的基础。

1.2 遗传算法研究应用现状及前景

1.2.1 遗传算法研究现状

遗传算法的研究内容相当广泛，反映了多学科相互交叉的特点，目前，遗传算法的研究主要集中在以下几个方面[6]。

1. *遗传算法的理论研究*

由于遗传算法尚未形成统一、完整的理论体系，目前理论研究主要集中在收敛性分析上，而且很难给出收敛速度的估计。对于诸如编码方案的选择、控制参数的选取、如何根据特定的编码方案设计有效的遗传算子以及算法的分析和性能评价等等，往往只能就具体问题具体分析，而且分析主要基于计算机模拟的实验结果，现在还缺乏严密、科学的一般规律和方法。因此，为推动进化计算研究的发展，迫切需要宏观的理论指导。在遗传算法的计算模型方面，目前采用的计算模型只是生物遗传模型的很小的一部分，而近年来新兴的免疫系统模型和协同进化模型等在解决某些问题时取得了令人鼓舞的成果，这有助于我们尝试新的进化模型。

2. *遗传优化问题*

在各个科学技术领域都存在大量的优化问题，虽然优化方法有很多分支且硕果累累，但是客观实际问题更是千变万化，形成的数学模型自然也是各种各样的。因此要想以某种通用的优化方法有效地解决所有的优化问题是不现实也是不可能的。近年来，遗传算法在解决复杂优化问题方面取得了令人振奋的成就，但是在如何根据具体的问题设计有效的遗传算法以提高计算速度及解决约束优化问题等方面尚有许多工作要做。

3. *遗传人工神经网络*

人工神经网络是近年来倍受关注的一个研究领域。在人工神经网络的实际应用中，其网络结构的设计和权值的训练一直是一个十分重要而困难的问题，传统的方法多是凭经验，启发知识或传统的搜索算法来设计网络，因而常常需要进行反复试验，而且还很难找到最优的网络结构和权值。而遗传算法为人工神经网络的自动设计和训练提供了一种新的途径。但目前的一些研究成果主要还集中在小型网络的设计上，在实用化方面还面临着很多问题需要解决。

4. *并行和分布式遗传算法*

近年来，对并行遗传算法的研究表明，通过多个种群的进化和适当地控制种群的相互作用，可以明显提高求解的速度和解的质量，甚至可以使遗传算法获得超线性加速比。由于遗传算法的并行处理平台可以是大规模并行计算机系统也可以是松散耦合的分布式处理系统（如工作站群集等）。因此，近几年来，对并行和分布式遗传算法的研究也越来越受到重视。目前已有几种较为成功的并行化或分布式模型。但是，

种群之间以什么方式进行联系和进行多大的通信才能获得更大的效率以及其它并行化模型的研究都将是以后研究的重点。

5. 机器学习

传统的机器学习方法都是根据预先确定的规则和知识来决定所采取的策略，因而很难应用于环境不断变化的问题之中，而遗传算法正好可以弥补这一缺陷。目前，基于遗传算法的机器学习方法，如分类系统等正被越来越多地应用到实际问题之中，把遗传算法与一些启发式的机器学习方法相结合将是今后研究的重点。

6. 遗传算法应用系统

以遗传算法的理论和算法研究为基础组成各种实际的应用系统，如用于图像处理和模式识别、机器人、工业最优控制等等。在设计各类应用系统的算法时，把遗传算法与传统的启发式搜索算法相结合可望取得更好的效果。

7. 进化硬件

微电子工业的发展使得计算机硬件的成本越来越低，而软件的成本越来越高。利用硬件的冗余实现对硬件的可编程是提高软件效率的一种途径。同时硬件可随环境的变化而变化本身在工业中也可找到很多应用。随着硬件电路的复杂度和密度的增加，按照蓝图设计方法进行设计，对于设计人员来说，必将超出其极限而不堪重负。实现硬件的自动进化无疑将是对传统的硬件设计方法的一场革命。

8. 遗传程序设计

基于遗传程序设计而开展的自动程序设计方法，正在发展成进化软件的研究，即仅仅告诉计算机要做什么，而不必精确地告诉计算机如何逐步地去做。

9. 遗传算法的拓展

遗传算法已从模拟生物的进化过程扩展到模拟大自然的进化过程。它不仅采用“仿生”策略，也通过模拟“拟物”进化过程来进行问题求解。另外，人们还探索在非优化问题中如何使用遗传算法。

1.2.2 遗传算法应用现状

遗传计算方法几乎在所有的科学和工程问题中都具有应用前景，有关其应用效果的报告不胜枚举。一些典型的应用领域如下[20-98]：

1. 复杂的非线性最优化问题

对具有多个局部极值的非线性最优化问题，普通的优化方法一般难以找到全局最优解；而遗传计算方法可以克服这一缺点，找到全局最优解。

2. 复杂的组合规划或整数规划问题

大多数组合规划或整数规划在解决诸如旅行商和装箱等问题上，难以找到有效的求解方法；而将遗传计算方法广泛用于求解这类问题，在可以承受的计算时间内求得满意的近似解。

3. 机器学习

机器学习是为解决专家系统设计中的知识获取瓶颈问题而兴起的，它力图实现知识的自动获取。遗法算法作为模拟生物界中的自然选择与生物遗传机制的一种优化搜索算法，从其开始就与机器学习有着密切的联系。从 1975 年起，Holland 和 Booker 就完善和发展了分类器系统。所谓的分类器系统，即由字符串规则（又称分类器）构成的学习系统，学习的目的就是调整字符串规则的参数，使之能够反映所学习的知识，这与用遗传算法优化模糊逻辑控制器中的规则库是相似的。近来，从例子中进行概念学习是机器学习研究领域中最活跃的分支之一，其目标是从概念的特殊例子中归纳出概念的一般性描述。

4. 生物学

遗传计算起源于对生物现象的模拟，现在又反过来用于生物学的研究，如利用遗传算法研究小生境理论和生物物种的形成等。

5. 计算机科学

遗传算法广泛用于计算机科学的研究，例如用于图像处理和自动识别及文档自动处理等。

6. 工程应用

遗传算法越来越多地用于工程实际，如通讯网络的优化设计、超大规模集成电路的布线、飞机外形的设计等。

7. 社会科学

遗传计算在社会科学的许多领域也有广泛应用，如人类行为规范进化过程的模拟、人口迁移模型的建立等。

随着遗传算法研究热潮的兴起，人工智能再次成为人们关注的一个焦点。有些学者甚至提出进化算法是人工智能的未来。其观点是虽然我们不能设计人工智能（即用机器代替人的自然智能），但我们可以利用进化获得智能。目前，遗传算法与神经网络、模糊系统一起已形成一个新的研究方向——计算智能(computational intelligence)。人工智能已从传统的基于符号处理的符号主义向以神经网络为代表的连接主义和以遗传算法为代表的进化主义方向发展。人们期待着它不是停留在一种单纯的搜索方法的地步，而应设法发展成为能创造新的科学技术的普遍方法论。从这个意义讲，作为对今后计算智能的发展有重大影响的关键技术之一，遗传算法无论在理论上还是在实际应用上都为我们提供了广阔的研究天地。

1.3 本书的主要内容

本书在系统分析和总结遗传算法的基本理论和方法的基础上，讨论如何将这一算法应用于影像的处理和分析之中，从中归纳说明遗传算法在测绘学和遥感学科中的重要作用。主要内容包括：

- 系统地分析和总结了遗传算法的基本理论和应用方法，并介绍了一整套适用于影像处理的遗传编码方法、选择策略和遗传算子设计方案。
- 将遗传算法与模糊控制参数的选取相结合，阐述了模糊控制参数的自动确定和影像自适应模糊增强的理论与方法。
- 介绍了如何利用遗传算法自动生成一种影像稳健特征模板，该模板可以提取具有旋转和尺度不变性的影像能量特征，书中给出了具体的实现算法和实验结果。
- 在影像稳健特征的基础上，论述了利用遗传算法获取具有旋转和尺度不变性的模糊聚类中心的新方法，该方法可以提高传统的模糊分割方法的聚类精度和效率。
- 将遗传算法与人工神经网络相结合，讨论了如何利用遗传算法进行人工神经网络的权值和结构的同时优化，以形成更为有效的人工神经网络进行影像的分类。
- 介绍了利用本书的研究成果对整幅航空影像进行实验的结果，并指出了需要进一步做的工作。

第 2 章　遗传算法的基本原理

遗传算法是建立在自然选择和遗传学机理基础上的迭代自适应概率性搜索算法，其理论体系正在进一步完善，目前的理论成果主要集中在遗传算法的模式理论、模型建立和性能分析等方面。本章先介绍有关遗传算法的基本概念、过程和特征，然后讨论遗传算法的基本定理、基本模型和性能分析方法，其目的在于说明遗传算法的机理，为遗传算法在影像处理和分析中的应用打下理论基础。

2.1　遗传算法的基本概念、过程和特征

2.1.1　遗传算法的基本概念

遗传算法是以自然选择和遗传理论为基础，生物遗传学中的概念被引入到了遗传算法之中，下面就以一个优化问题 $\max\{f(x) \mid x \in X\}$（$f$ 是 X 上的一个正值函数）为例，说明遗传算法中常用的一些基本概念。

- 个体（染色体）：满足上述优化问题的一个可能解 x；
- 群体：满足上述优化问题的多个可能解的集合 $\{x_i \mid i=1, 2, \cdots\cdots, n\}$，即解空间 X；
- 编码：将问题的一个解表示成位串形式，即将解空间映射到遗传空间；
- 解码：编码的逆过程，即将遗传空间映射到解空间；
- 基因：编码成位串形式的个体中的每一位；
- 选择：根据一定的策略，将群体中的某两个个体选为父（母）体的过程；
- 交叉（杂交）：将选择出的两个个体按一定的原则交换部分基因的操作；
- 变异：按一定的规律改变某一个体中的某一个基因值的操作；
- 适应度：各个体自身适应环境的程度，通常用函数值表示，如上例中适应度值可用 $f(x)$ 表示；
- 表现型：解码后的解；
- 基因型：编码表示的解。

2.1.2　遗传算法的基本过程

不同的编码方案、选择策略和遗传算子相结合构成了不同的遗传算法，但不同遗传算法在计算中的迭代过程大体相同，都包含了编码、选择、交叉、变异和解码等五个阶段，其基本过程可用图 2.1 描述。

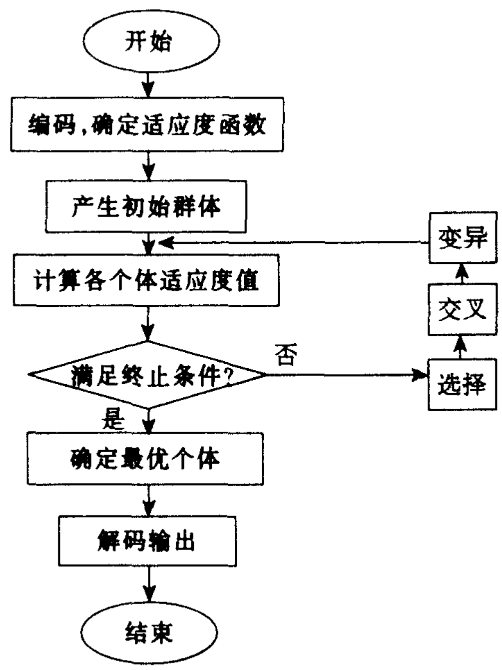

图 2.1　遗传算法的基本过程

2.1.3 遗传算法的基本特征

遗传算法的基本特征主要表现在以下几个方面[6,7]：

1. 智能性

遗传算法的智能性包括自适应、自组织和自学习性等。应用遗传算法求解问题时，在确定了编码方式、适应度函数及遗传算子以后，算法将利用遗传算法中获得的信息自行组织搜索。由于基于自然的选择规则为：适者生存、劣者淘汰，故而适应值大的个体具有较高生存概率。通常适应值大的个体具有与环境更适应的基因结构，再通过杂交和基因突变等遗传操作就可能产生与环境更适应的后代。遗传算法的这种自组织、自适应特征同时也赋予了它具有能根据环境的变化自动发现环境的特性和规律的能力。

自然选择使得我们在算法设计的过程中无需事先描述问题的全部特点，尤其适合于解决那些结构尚不清楚的复杂问题。

2. 并行性

遗传算法的并行性表现在两个方面：一是遗传算法的内在并行性，即遗传算法本身非常适合大规模并行操作。其最简单的并行方式是让几百甚至数千台计算机各自进行独立群体的进化计算，运行过程中可不进行任何通信，等到运算结束时才通信比较，选取最佳个体，这种并行处理方式对并行系统结构也没有什么限制和要求。二是遗传算法的隐式并行性。由于遗传算法采用种群的方式组织搜索，从而它可以同时搜索解空间内的多个区域，并相互交流信息，这种搜索方式使得它虽然每次只执行与种群规模 N 成比例的计算，而实质上已进行了大约 O（N^3）次有效搜索，这使得遗传算法能以较少的计算获得较大的收益。

3. 稳健性

算法的稳健性是指在不同条件和环境下算法的适用性和有效性。由于遗传算法利用个体的适应度推动群体的进化，而不管求解问题本身的结构特征。因而，用遗传算法求解不同问题时，我们只需要设计相应的适应性评价函数，而无需修改算法的其它部分。同时，因为遗传算法具有自然系统的自适应特征，算法在效率和效益之间的权衡使得它能适用于不同的环境并取得较好的效果。

4. 全局优化

传统的优化方法，一般采用的是梯度下降的爬山策略，当遇到多峰函数的情形往往容易陷入局部最优。而遗传算法能在解空间的多个区域内同时进行搜索，并且能以较大的概率跳出局部最优，以找出整体最优解。

5. 多解性

遗传算法是采用群体的方式组织搜索。它从多个解出发，通过这些点内部结构的调整和重组来形成新的解。因而，每次都将提供多个近似解，这对多目标搜索或有需要多个近似解作为参照的情况下是非常有用的。

6. 不确定性

遗传算法的不确定性是伴随其随机性而来的。遗传算法的主要操作都含有随机因子。从而在算法的进化过程中，事件发生的与否带有较大的不确定性。

7. 非定向性

自然选择和繁殖过程这种非定向机制是遗传算法的关键。它没有确定的迭代方程，也不依靠梯度下降法似的爬山策略，而是利用个体的内部结构的调整来增强其对环境的适应能力，以使得问题得到解决。

2.2 遗传算法的基本定理

遗传算法作为一种有效的智能搜索算法，人们一直试图对其进行理论分析以解释其为什么有效。J. Holland 在文献［107］中为解释简单遗传算法（SGA）的功效建立了基于模式分析的模式定理及隐式

并行性定理，它们被称为遗传算法的基本定理。

2.2.1 基本概念

模式：设用 * 表示一个通配符，即在该位置既可取 0 又可取 1，则空间 $V^l=\{0,1,*\}^l$（l 为串长）所表示的全体子集称为模式。如 $l=5$ 时，模式 $H=01**0$ 表示集合｛01000，01100，01110，01010｝。

模式的阶：模式 H 中取确定值的数目称为模式 H 的阶，记为 $O(H)$，如模式 $H=01*10$ 的阶为 4。

模式的长度：模式中第一个取确定值位置与最后一个取确定值位置之间的距离称为模式的长度，记为 $\delta(H)$，如模式 $H=01***1$ 的长度为 5。

模式、模式的阶及其长度对于严格地讨论和区分串的相似程度是很有用的概念。并且它们提供了分析基本遗传算子对群体中基因块作用之效果的一种基本方法。遗传算法的模式定理及内含并行性都是基于模式的概念来讨论的。

2.2.2 模式定理

定义 2.1[107][6][13] 设 X 为 SGA 群体状态的空间，$H\in V^l=\{0,1,*\}^l$ 是任一模式，$P(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots\cdots,x_n(t)\}\in X$ 表示 SGA 在第 t 代时的群体，f 为适应度函数，则称

$$f(H,t)=\frac{1}{N(H,t)}\sum_{x\in(H,t)}f(x) \tag{2.1}$$

为模式 H 的平均适应值，这里 $N(H,t)$ 表示 $P(t)$ 中含有 H 中元素的个数。称

$$\overline{f(t)}=\sum_{x\in p(t)}\frac{f(x)}{n}$$

为 $P(t)$ 的平均适应值，其中 n 为群体中的个体数目。

定理 2.1（模式定理）[107][6][13] 设 SGA 的交叉概率和变异概率分别为 p_c 和 p_m，模式 H 的定义长度为 $\delta(H)$、阶为 $O(H)$，第 $t+1$ 代群体 $P(t+1)$ 含有 H 中元素个数的期望值记为 $E(H,t+1)$，则

$$E(H,t+1)\geqslant N(H,t)\cdot\frac{f(H,t)}{\overline{f(t)}}\cdot\left[1-p_c\frac{\delta(H)}{l-1}-O(H)p_m\right] \tag{2.2}$$

证明：由于 SGA 采用按适应值比例的选择策略，则易见 t 时刻 H 中元素得以选择的期望值为：

$$\sum_{x\in(H,t)}\frac{f(x)}{\overline{f}}=N(H,t)\cdot\frac{f(H,t)}{\overline{f(t)}}$$

由于交叉操作是随机选取 1 到 $l-1$ 中的一个位置并交换两父体的一个对应子串，于是属于模式 H 的个体经交叉后仍属于 H（称为未被破坏）的概率不小于 $l-p_c$。而一个个体经变异后未被破坏的概率为 $(1-p_m)$。另外，$P(t)$ 中不属于 H 中的元素也有可能经交叉、变异后属于 H，所以第 $t+1$ 代群体 $P(t+1)$ 中属于 H 的个体数目的期望值不小于

$$N(H,t)\cdot\frac{f(H,t)}{\overline{f(t)}}\cdot\left[1-p_c\frac{\delta(H)}{l-1}\right]\cdot(1-p_m)^{O(H)}$$

又因为在 SGA 中 p_m 一般取值很小，故有

$$\left[1-p_c\cdot\frac{\delta(H)}{l-1}\right]\cdot(1-p_m)\,O(H)\approx\left[1-p_c\cdot\frac{\delta(H)}{l-1}\right]\cdot(1-O(H)\cdot p_m)$$

$$\geqslant 1-p_c\cdot\frac{\delta(H)}{l-1}-p_m\cdot O(H)$$

于是定理得证。

推论 2.2[107][6][13] 在 SGA 中，定义长度较短、低阶且适应值超过平均适应值的模式 H，在群体中数目的期望值按指数级递增。

证明：设对任意 $t'\leqslant t$，都有$\frac{f(H,t')}{\bar{f}(t')}$大于一个常数 $C>1$，再记

$$J = C\cdot[1-p_c\cdot\frac{\delta(H)}{l-1}]-p_m\cdot O(H)]$$

若 $J>1$，则由定理 2.1 知

$$E(H,t+1)\geqslant N(H,t)J$$

由此递推易得：$E(H,t+1)\geqslant N(H,t)J^t$。于是推论成立。

从上述证明可见，模式定理说明了在 SGA 群体中那些短的低阶模式是按指数增加还是减少的数目进行采样依赖于模式的平均适应度值，但它仍存在以下的一些问题：

(1) 模式定理是针对二进制编码的，对其它编码方案是否适用尚有待进一步证实；

(2) 模式定理提供的只是期望值的一个下界，我们无法根据它推断算法收敛与否；

(3) 模式定理对算法的设计如控制参数的选取等没有太大的帮助。

2.2.3 隐式并行性定理

在 SGA 中，对于串长为 l，规模为 N 的二进制编码的群体，算法一次处理的模式数在 2^l 到 $N\cdot 2^l$ 之间，但由模式定理知，并不是所有的模式都能以较大的概率被保存下来进行处理。为此，J. Holland 对有效模式（即那些按指数级递增的模式）的数目进行了分析，得到了如下关于估计有效模式处理数目的定理：

定理 2.3（隐式并行性定理）[102,6] 设 ϵ 是一个小正数，$l_s<\epsilon*(l-1)+1$，群体规模 $N=2^{l_s/2}$，则 SGA 一次处理的那些存活概率$\geqslant l-\epsilon$，且定义长度$\leqslant l_s$的模式数目与群体规模的立方成比例，即为 $O(N^3)$。

定理 2.3 表明，SGA 每一代中除了对 N 个串的处理外，实际上还处理大约 $O(N^3)$ 个模式，换句话说，SGA 每代只执行与群体规模成比例的计算量，就可以同时达到并行地对大约 $O(N^3)$ 个模式进行有效处理的目的，并且无须额外的存储。

定理 2.3 只在群体规模 N 为一定值时，对所处理的有效模式数目进行了估计，Bertoni 和 Dorigo 在文献［130］中对 N 取一般值时有效模式数目进行了估计，得到定理 2.4。

定理 2.4[130,6]设 l 为串长，$\epsilon>0$，令 $l_s=l_\epsilon/2$，若群体规模 $N=N(\beta)=2^{\beta l_s}$，这里 $\beta>0$ 是一个参数，则有

· SGA 一次处理的那些存活概率$>l-\epsilon$ 且定义长度$\leqslant 2l_s$的模式数目的期望值至少与 $N^{g(\beta)}/\sqrt{\log_2 N}$ 同阶，其中

$$g(\beta)=\begin{cases}1+2/\beta,\text{当 } 0<\beta<1\\ 1+2\cdot H(\frac{1}{2}\beta)/\beta,\text{当 } 1\leqslant\beta\leqslant\frac{4}{3}\\ \frac{2}{\beta}\log_2 3,\text{当 }\beta>\frac{4}{3}\end{cases}\tag{2.3}$$

这里 $H(\xi)=-\xi\log_2\xi-(1-\xi)\log_2(1-\xi)$，$(0<\xi<l)$ 称为熵函数；

· 当 $\beta\geqslant 1$ 时，$N^{g(\beta)}/\sqrt{\log_2 N}$大于某一常数；

· 当 $\beta\geqslant 1$ 时，存活概率$\geqslant l-2e^{-1}$的模式数至少与$\frac{1}{2}N^{g(\beta)}/\sqrt{\log_2 N}$ 同阶。

从上面的分析可见，在遗传算法的迭代过程中，除了长度长的高阶模式被交叉和变异算子破坏之外，遗传算法在处理相对数量较少的串的同时，还内在地处理大量的模式，从而说明遗传算法具有内在并行的处理能力，即隐式并行性。

2.2.4 遗传算法中的方法论[9]

遗传算法作为模拟生物进化论的一种工程模型，它的重要价值不仅在于能够对优化难题给出一种有效的计算方法，而且遗传算法的结构中饱含了大自然所赋予的一种哲理，在科学思想方法论上给予人们以深刻的启迪。

在遗传算法的结构中，主要包含选择、交叉和突然变异三个基本操作。选择操作体现了优胜劣汰的竞争和进化思想，而优秀的个体从何而来？是靠交叉和变异的操作而获得，交叉和变异的目的都是为了产生优秀的个体，实际上，变异是为了更好地交叉，从这个意义上说，交叉和变异实质上都是交叉。

因此，可以认为交叉是遗传算法的本质操作，而遗传算法的本质操作又是交叉的。所以，交叉的思想是遗传算法的核心。有了不断的交叉才能不断产生新的个体，才能不断推陈出新。

交叉从信息论的观点看，它是一种信息的交换并产生新信息的过程，交叉是两种信息重组的过程，“组合即创造”，交叉也就创造了新信息。

遗传算法的本质特征在于交叉，如果认为科学技术进步的一个重要原因在于不同科学部门和技术部门的交叉，那么，遗传算法其意义就不只是作为一种有效的搜索方法，而可望它成为创造新的科学技术的普遍的思想方法。

2.3 遗传算法的基本模型

模式理论可以在一定程度上估计 GA 在迭代过程中模式的期望变化情况，但对群体的构成、收敛速度及适应度的分布等难以作出适当的估计，即缺乏对遗传算法特性的系统描述。为了解决这个问题，有些学者建立了一些可以在算法行为方面描述 SGA 的特性的数学模型[102,143,151,152]。本节将简要地介绍有关 GA 的两个有代表性的模型：无限群体模型[151,6]和有限群体模型[143,6]。

2.3.1 无限群体模型

该模型主要借助概率论方法来估计 SGA 群体中适应值的分布情况，它适用于对大规模群体进行预测，文献［151］中对该模型的具体描述如下[6]：

1. 随机初始化群体，这里每个个体都是一个长度为 l 的二进制串；
2. 计算群体中个体 X 的适应值 $f(x)$；
3. 采用有放回方式及基于适应值比例的选择策略，从当前群体中选择两父体；
4. 采用单点杂交方式并以杂交概率 p_c 对两父体实行杂交，并随机地选中其中一个后代而舍弃另一后代；
5. 对所选后代的每一位以概率 p_m 进行变异，得到的后代放入新群体中；
6. 若新群体的规模小于额定规模，转 (3)；
7. 若终止条件成立，结束；否则，转 (2)。

由于 SGA 中每个个体是一个长度为 1 的二进制串，于是对应于 0 到 2^l-1 间的一个整数。这样，我们将第 t 代时的群体以两个实向量 $p(t)$ 和 $k(t)$ 来表示，这两个向量的长度均为 2^l。$p(t)$ 的第 i 个分量 $p_i(t)$ 为第 t 代时串 i 在群体中所占的比例，这里 i 取值范围为 0，l，…，2^l-1。$s(t)$ 的第 i 个分量 $s_i(t)$ 为串 i 在第 t 代时按适应值比例计算得到的选择概率。例如，当 $l=2$ 时，第 t 代的群体 $P(t)=\{01, 11, 10, 10\}$，则

$$p(t) = (0, 0.25, 0.5, 0.25)^T$$

若适应值取串中含有 1 的个数，则

$$k(t) = (0, 0.2, 0.4, 0.4)^T$$

注意，我们这里将 $p(t)$ 和 $k(t)$ 表示成列向量。

由上述可知，向量 $p(t)$ 可以精确地描述群体在第 t 代时的组成。而 $k(t)$ 则反映与适应值有关的选择概率，这两向量的关系可描述如下：

设 F 是一个 2^l-1 维方阵，当 $i\neq j$ 时，$F_{ij}=0$，且 $F_{ij}=f(i)$，即 F 的非对角元素皆为 0，而其对角元素对应于相应个体的适应值。于是

$$k(t)=\frac{F\cdot p(t)}{\sum_{i=0}^{2^l-1}F_{ii}\cdot p_i(t)} \tag{2.4}$$

即已知 F 和 $p(t)$，我们将很容易求得 $k(t)$；同样若已知 F 和 $k(t)$，也很容易导出 $p(t)$。

以 G 表示 SGA 作用于群体上的遗传操作，即

$$k(t+1)=G\cdot k(t) \tag{2.5}$$

于是，遗传操作 G 在 k (0) 上的迭代可精确地描述 SGA 的期望行为。

为了描述遗传操作 G，先只考虑选择算子，即假设不进行杂交和变异。以 $E(x)$ 表示 x 的期望值，则根据 $p(t)$ 和 $k(t)$ 的定义有

$$E(p(t+1))=k(t)$$

定义等价关系‘～’，两向量 x，y 具有关系‘～’，记 $x\sim y$ 当且仅当它们仅相差一常量因子。于是由式 (2.4) 知

$$k(t+1)\sim F\cdot p(t+1)$$

从而

$$E(k(t+1))\sim F\cdot k(t)$$

将此与式 (2.5) 比较可知，当只有选择操作时，有 $G=F$。

若同时还考虑杂交和变异（即重组）操作，并记重组操作的矩阵为 $M.$，则有 $G=F{\cdot}M.$。记 $r_{ij}(s)$ 为串 i 和 j 通过重组产生后代 s 的概率，则

$$E(p_k(t+1))=\sum_{i,j}k_i(t)k_j(t)r_{ij}(s)$$

即若已知 $r_{ij}(s)$，则可得到第 $t+l$ 代时串 s 在群体中的期望比值。$r_{ij}(s)$ 的计算及 M 的定义，可参见文献 [151]。

由上述分析可见，无限群体模型通过确定从某一代到下一代的选择概率，对群体中适应值的期望分布作出了预测。

2.3.2 有限群体模型

无限群体模型通过确定从某一代到下一代的选择概率，对群体中适应值的期望分布作出了预测。但由于它有一定的抽样误差，因而只适合无限群体算法的行为描述，对有限群体，要建立适当的模型，则需充分考虑抽样的随机特性。为此，有些学者根据 SGA 的当前群体只与其前一代群体有关这一特点，利用 Markov 链建立了一种描述 SGA 的模型，即有限群体模型[143]。该模型通过计算 SGA 从某一有限群体到另一有限群体的转移概率来描述 SGA 的行为变化，详情参见文献 [143]。

Nix 和 Vose 使用有限群体模型及 Markov 链理论得到了关于 SGA 的一系列有意义结果。Vose 在文献 [217] 中引入“GA 曲面”的概念以给出上述无限群体模型和有限群体模型的几何解释，即利用“GA 曲面”可对遗传搜索和群体的轨迹作出描述。我们知道，GA 的短期行为通常由其初始群体确定。Vose 指出，GA 的长期行为，即其渐近行为则由“GA 曲面”的结构来确定；通过“GA 曲面”可以确定哪些不动点具有较大的吸引域。而 Markov 链模型则可对 GA 的中期行为分析提供一定的信息，只是要获得中期行为方面的结果远较获得渐近性质难得多。

需要指出的是：本节所讨论的两种模型从理论上可以预测 SGA 的各方面的行为，但在实际应用中仍

有很多困难。

2.4 遗传算法的性能分析

遗传算法的性能主要包括收敛性和优化性等，其分析方法尚处于发展阶段，因此，本节主要讨论目前发展较为成熟的遗传算法收敛性分析方法和优化程度分析方法。

2.4.1 遗传算法的收敛性分析[127,138,139,141,146,147,217,6]

由于编码方案、选择策略和遗传操作的不同组合构成的遗传算法也不同。因此要想笼统地对各种遗传算法给出其收敛性分析是很困难的。下面的收敛性分析主要是针对简单遗传算法（SGA）模型的，但其分析思路有可能推广到更广泛的一类遗传算法。

1. 基本知识

假设考虑以下的优化问题

$$\max\{f(b) \mid b \in B^l\} \tag{2.6}$$

此处 $f(b) \in (0, +\infty)$ 对任一 $b \in B^l = \{0,1\}^l$ 都成立，且 $f(b)$ 不恒等于一个常数。则简单遗传算法就是以 $f(x)$ 作为适应值度量，采用二进制编码和转盘式选择并且只使用杂交和变异两种遗传操作的遗传算法。

定义 2.2　Hamming 距离

设 b、b' 是两个长度为 l 的 H 进制串，则它们的 Hamming 距离定义为

$$H(b,b') = \sum_{i=1}^{l}(b_i \& \sim b'_i)$$

此处 b_i，b_i' 分别表示 b、b' 的第 i 个分量，$i=1$，2，…，l，$b_i\& \sim b'_l$ 表示 b_i 与非 b_i 求与。由此式可以看出，b 与 b' 的 Hamming 距离即是 b 与 b' 相异的位数。

如果设变异概率为 $p_m \in (0, 1)$，则由 b 变换到 b' 的概率

$$P(b \rightarrow b') = p_m \cdot (1-p_m) \cdot p_m \cdot p_m \cdot (1-p_m) = p_m^{H(b,b')}(1-p_m)^{l-H(b,b')}$$

一般地，也有

$$P(b \rightarrow b') = p_m^{H(b,b')}(1-p_m)^{l-H(b,b')} > 0$$

成立。

定义 2.3　有限 Markov 链

设 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 是一列取值为有限状态空间 $S=\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}$ 上的随机变量，若所在的状态只与 x_k 有关，而与 x_0，x_1，…，x_{k-1} 无关，即对任意的 $k\geqslant 0$ 及正整数 i_0，i_1，…，i_{k+1}，有

$$p(x_{k+1}=s_{i_{k+1}} \mid x_0=s_{i0},\cdots,x_k=s_{ik}) = P(x_{k+1}=s_{i_{k+1}} \mid x_k=s_{i_k})$$

成立，则称 $\{x_t, t\geqslant 0\}$ 为 Markov 链，$P(x_{t+1}=s_j \mid x_t=s_i)$ 称为在时刻 t 由状态 s_i 转移到状态 s_j 的转移概率，记为 $p_{ij}(t)$。若转移概率与时间 t 无关，即对任 $s_i, s_j \in S$ 和任两时刻 t_1，t_2 都有 $p_{ij}(t_1) = p_{ij}(t_2)$，则称该 Markov 链是齐次的。此时称 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 为该齐次 Markov 链的转移矩阵。

设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 是一齐次 Markov 链的转移矩阵，则 $p_{ij}\in[0, 1]$，且对任意正整数 i 有 $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$，若 p^0 是初始分布向量，则时刻 t 的分布向量 $p^t = p^0 P^t$，因此一个齐次 Markov 链的行为完全由 (p^0, P) 所决定。

定义 2.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵

(1) 若 $a_{ij}\geqslant 0$，对任意 i，$j\in\{l, 2, \cdots, n\}$ 成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是非负的，记为 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$；

(2) 若 $a_{ij}>0$，对任意 i，$j\in\{l, 2, \cdots, n\}$ 成立，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正的，记为 $\boldsymbol{A}>0$.

定义 2.5　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶非负矩阵，