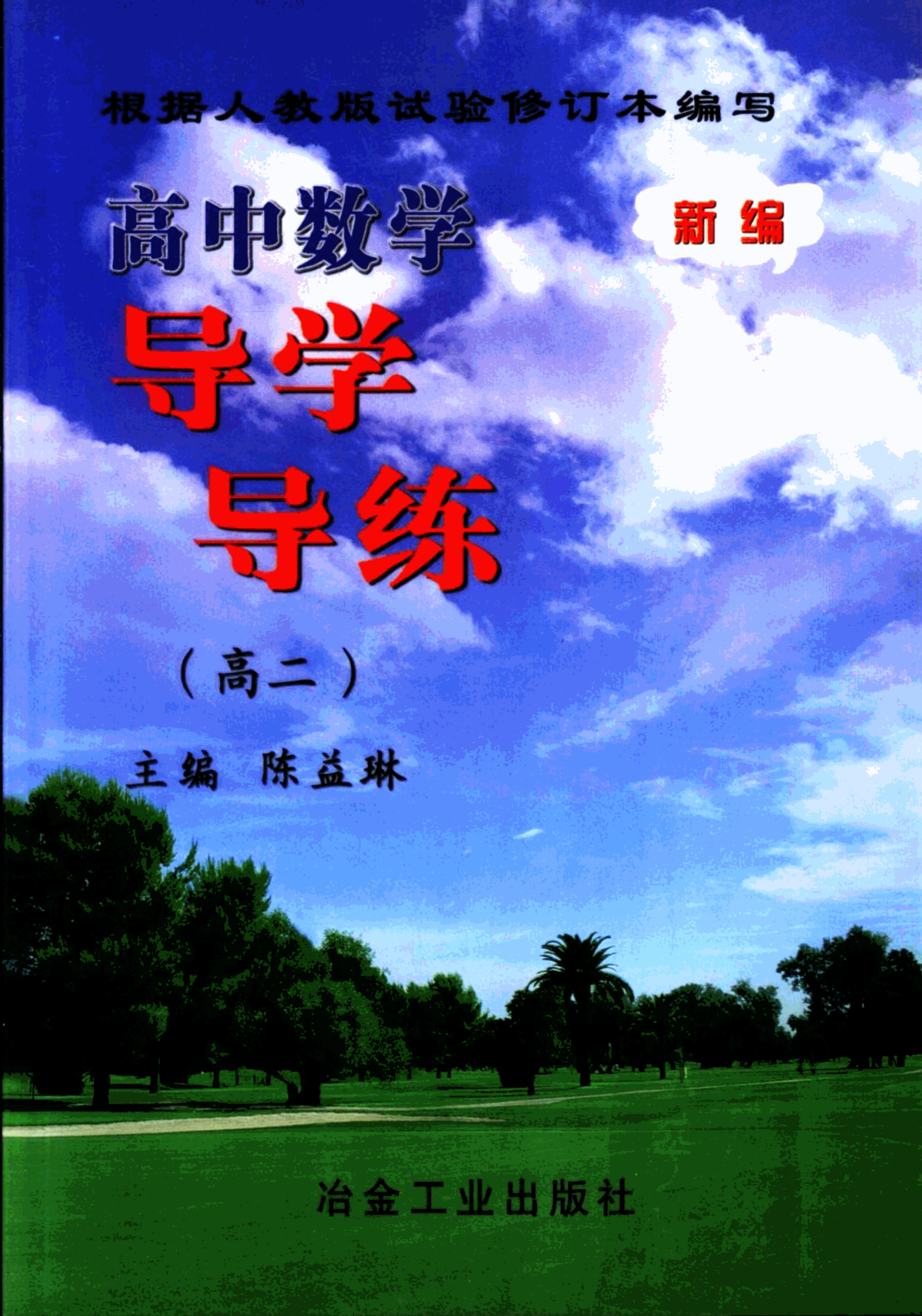

根据人教版试验修订本编写

高中数学导学导练

新编

（高二）

主编 陈益琳

冶金工业出版社

前　言

教育部已对新高中数学教学大纲及新编高中数学试验教材作了再进一步的修订。为了及时向广大高中学生和数学教师提供一套与新试验教材配套的高质量的教辅用书,我们组织部分使用过新教材的省市的一些高级教师,编写与最新教材配套的《高中数学导学导练》丛书,它既可作为教师的教学参考资料,也可作为学生自学与练习用书。

本书以最新试验用的高二数学课本为主线,紧密配合新编课本的课堂教学进行同步训练。所编选内容严格按照教学大纲要求,紧扣教材。本册(高二)分成五章,每章分成若干课时,共 133 节。原则上每课时与新教材每课时同步,按〔学习目标〕、〔例题析解〕、〔课堂练习〕、〔归纳小结〕、〔能力训练〕五部分编排。

〔学习目标〕——根据大纲要求,制定出该课时的具体学习目标。使学生学习时,对于应该掌握的学习内容和重点、难点心中有数,一目了然。

〔例题析解〕——除讲授课本规定的例题(即本书中留空的例题)外,还增选了一些典型例题,并作详细析解。所设计的例题紧扣重点、难点,具有实践性、实用性、典型性和启发性,析解例题过程中,既注重知识应用、方法示范,又注重思维方法和解题技巧的传授,让学生理解重要知识点的深刻内涵和外延,领悟知识的用法,以便达到由理论到实践的过渡。

〔课堂练习〕——除完成课本规定的课堂练习外,还围绕所讲内容补充少量的简单练习题在课堂上进行专门练习,以达到当堂巩固所授知识、方法的目的。

〔归纳小结〕——每课时都把该课的关键、重点的知识、规律、技能、观点、方法进行归纳,以便学生重点掌握。

〔能力训练〕——除完成与该课时对应的课本习题外,还按〔选择题〕、〔填空题〕、〔解答题〕三个部分,选编适当的题目让学生课外进行练习。针对高一新生特点,选编的原则是注重知识的基础性、同步性、应用性、题目的新颖性,把握好难度、梯度、广度和量度,着眼于培养学生的自学能力、创新能力与应用能力。

请注意:本书中,凡标有“※”号的内容,在难度上略有提高,可由老师根据实际情况酌情选用。

多年来,全国各地的师生对我们编写的中学数学方面的书籍,给予了热情的关怀和支持,在此衷心感谢!《高中数学导学导练》丛书能够及时与广大读者见面,也得到多方的大力支持,在此一并谢过。由于时间仓促,错误和不足在所难免,请广大读者斧正,以便我们今后进一步修改完善。

目 录

第六章　不等式

6.1 不等式的性质

第一课时　不等式

一、学习目标

理解实数的运算性质与大小顺序之间的关系,能正确运用这些性质和关系比较两实数(式)的大小.

二、例题析解

例 1

例 2

例 3　比较 $3x^2-2x+1$ 与 $(x+1)^2-3$ 的大小.

解　$\because 3x^2-2x+1-[(x+1)^2-3]$

$=2x^2-4x+3$

$=2(x-1)^2+1>0$

$\therefore 3x^2-2x+1>(x+1)^2-3.$

※**例 4**　已知 $a,b\in R^+$,且 $a\neq b$,比较 a^ab^b 与 a^bb^a 的大小.

解　$\because a,b\in R^+$,且 $a\neq b$,$\therefore a^bb^a>0,a^ab^b>0$,

$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}=a^{a-b}\cdot b^{b-a}=(\frac{a}{b})^{a-b}$

当 $a>b>0$ 时,$\frac{a}{b}>1,a-b>0,\therefore(\frac{a}{b})^{a-b}>1$

当 $0<a<b$ 时,$\frac{a}{b}<1,a-b<0,\therefore(\frac{a}{b})^{a-b}>1$

$\therefore$对于 $a,b\in R^+$ 且 $a\neq b$,总有$(\frac{a}{b})^{a-b}>1$

即$\frac{a^ab^b}{a^bb^a}>1$,$\therefore a^ab^b>a^bb^a$

三、课堂练习

比较 $3^{15}\cdot5^{13}$ 与 15^{14} 的大小.

四、归纳小结

1. 对于任意两个实数 a 与 b 的运算性质及大小顺序之间的关系是:

$\left.\begin{array}{l}a-b>0\Leftrightarrow a>b\\a-b<0\Leftrightarrow a<b\\a-b=0\Leftrightarrow a=b\end{array}\right\}$左边是实数运算性质,右边是大小顺序.

实数运算的符号法则是本章内容的基础,是不等式性质的证明和证明不等式及解不等式的主要依据.

2. 要比较大小的两个代数式如果是多项式或分式、根式、对数式时,一般用差比较法;其步骤是:作差⇒变形(分解因式、通分、配方等)⇒判断符号(>0 或 <0)⇒作出结论.其关键是变形,要变到能明显的利用已知条件判断差的符号.

3. 当要比较大小的两个代数式是幂的形式时,一般用商比较法($a,b\in R^+$,有:$\frac{a}{b}>1\Leftrightarrow a>b;\frac{a}{b}<1\Leftrightarrow a<b;\frac{a}{b}=1\Leftrightarrow a=b$),其步骤是:作商⇒变形(利用幂的运算法则)⇒判断商是大于还是小于1⇒作出结论.

4. 字母式子的大小比较,若是出在选择、填空题中,还可用特殊值法判定.

五、能力训练

1. 选择题

(1)设 $M=2x^2-x+3,N=x^2-x-4$,则 M 与 N 的大小关系是(　　).

(A)$M>N$　　(B)$M<N$

(C)$M=N$　　(D)不确定

(2)设 $A=2a^4+1,B=2a^3+a^2,a\in R$,则 A、B 的大小关系是(　　).

(A)$A>B$　　(B)$A<B$

(C)$A\geqslant B$　　(D)$A\leqslant B$

(3)已知 $a>b>c$,且 $a+b+c=0$,则 b^2-4ac(　　).

(A)恒正　(B)恒负　(C)非正　(D)非负

(4)若 $a>b>c$,则$\frac{b}{a}$与$\frac{b+1}{a+1}$的大小关系是(　　).

(A)$\frac{b}{a}>\frac{b+1}{a+1}$　　(B)$\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$

(C)$\frac{b}{a}=\frac{b+1}{a+1}$　　(D)不确定

(5)不等式①$x^2+3>2x$,②$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$,③$a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$,④$x^3>x^2$ 中,恒成立的是(　　).

(A)①,②　　(B)①,④

(C)①,③　　(D)①,②,③

2. 填空题:(用"="、">"、"<"号填空)

(1)若 $a>b$ 且 $ab>0$,则$\frac{1}{a}$____$\frac{1}{b}$.

(2)$3^7\times7^3$____21^5.

(3)3^{22}____2^{33}.

(4)若 $a<-1,-1<b<0$,则 a^2b,ab^2 的大小关系是________.

3. 解答题

(1)设 $a>b$,比较 a^3 与 b^3 的大小.

(2)设 $a>0,b>0$ 比较$(\frac{a^2}{b})^{\frac{1}{2}}+(\frac{b^2}{a})^{\frac{1}{2}}$与 $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$的大小.

※(3)设 $a>0,b>0$,比较 $2\lg(1+\sqrt{ab})$ 与 $\lg(1+a)+\lg(1+b)$ 的大小.

※(4)比较 8^{12} 与 12^{8} 的大小.

第二课时 不等式的性质(一)

一、学习目标

能正确的理解和证明不等式的性质定理及其推论.会用不等式的性质去判断不等式是否成立.

不等式的性质定理及其推论:

定理1. $a>b\Leftrightarrow b<a$ (对称性)

定理2. $a>b,b>c\Rightarrow a>c$(传递性)

定理3. $a>b\Rightarrow a+c>b+c$ (加法性质)

定理4. $\left.\begin{matrix}a>b\\c>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bc$; $\left.\begin{matrix}a>b\\c<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac<bc$ (乘法法则)

定理5. $\left.\begin{matrix}a>b>0\\(n\in N,n>1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

推论:

1. 若 $a+b>c\Rightarrow a>c-b$ (移项法则)
2. 若 $\left.\begin{matrix}a>b\\c>d\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+c>b+d$ (同向不等式相加)
3. 若 $\left.\begin{matrix}a>b>0\\c>d>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ac>bd$ (同向不等式相乘)
4. 若 $\left.\begin{matrix}a>b>0\\(n\in N,n>1)\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^n>b^n$ (乘方法则)
5. 若 $a>b$ 且 a,b 同号 $\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ (倒数法则)

二、例题析解

例1 对于实数 a,b,c,判断下列命题的真假(真则打√,假则打×).

(1)若 $a>b$,则 $ac>bc$( ).

(2)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$( ).

(3)若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$( ).

(4)若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$( ).

(5)若 $a>b,c>d$,则 $ac>bd$( ).

(6)若 $a>b,c>d$,则 $a-c>b-d$( ).

(7)若 $c>a>b>0$,则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$( ).

解 (1)×,当 $c\leqslant0$ 时不成立. (2)×,$c=0$ 时不成立. (3)√,由条件知 $c\neq0$,两边同乘以 $\frac{1}{c^2}>0$ 故成立.

(4)√,$\left.\begin{matrix}a<b\\a<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a^2>ab$,又 $\left.\begin{matrix}a<b\\b<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow ab>b^2$,

$\therefore a^2>ab>b^2$ 成立.

(5)×,a,b,c,d 不是正数时不一定成立.

(6)×,如 $5>3,4>1$ 但 $5-4>3-1$ 不成立.

(7)√,$c>a>b>0\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}-a<-b\Rightarrow0<c-a<c-b\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0\\a>b>0\end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

三、课堂练习

四、归纳小结

1.不等式的性质是进行不等式的证明和解不等式的依据,定理1、3、4、5都是不等式同解变形的基础,由它们得到的5个推论是不等式运算的法则,要注意理解和掌握.

2.在运用不等式的性质时,一定要严格掌握它们成立的条件。如两边同乘以(或除以)一个正数不等号不变,若是同乘以(或除以)一个负数则不等号反向,因此在不等式中,若不能肯定分母是正数(或负数),不要采用去分母的运算;又如同向不等式相乘、不等式两边同时乘方(或开方)时,要求不等式两边均为正数.

五、能力训练

1.选择题:

(1)若 a,b 是任意实数,且 $a>b$,则( ).

(A)$a^2>b^2$ (B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$ (D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

(2)若 $a>b,c>d$,下列结论中不成立的是( ).

(A)$a+c>b+d$ (B)$a-c>b-c$

(C)$a+d>b+c$ (D)$a-c<a-d$

(3)下列命题中正确的是( ).

(A)若 $a>b$,则 $a^2>b^2$

(B)若 $a^2>b^2$,则 $a>b$

(C)若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$

(D)若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$

(4)若 $a>b>0$ 且 $ac>bd$,则 c 与 d 的大小关系是( ).

(A)$d>c>0$ (B)$c>d>0$

(C)$d<c<0$ (D)$c<d<0$

(5)如果 $a>b$,给出下列不等式:

①$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,②$a^3>b^3$,③$\lg(a^2+1)>\lg(b^2+1)$,④$2^a>2^b$,其中成立的是( ).

(A)②,③　　(B)①,③

(C)③,④　　(D)②,④

2. 填空题:

(1)下列推断正确的是______.(填上序号即可)

①$ax>b\Rightarrow x>\frac{b}{a}$

②$\frac{x}{3a}>5\Rightarrow x>15a$

③$a^2x>a^2y\Rightarrow x>y$

④$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0\Rightarrow ab<b^2$

(2)若$a<b<0,c<0$,则$(a-2)c$与$(b-2)c$的大小是______.

(3)若$x+y<x-y$,则y ______ 0.(用>或<填空)

(4)若$a\lg\frac{1}{2}>b\lg\frac{1}{2}$,则$a$ ______ b.(用>或<填空)

第三课时　不等式的性质(二)

一、学习目标:

会用不等式的性质去证明一些简单的不等式及求某个式子的取值范围.

二、例题析解

例1

例2

例3　已知$\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}>0$,

求证:$\frac{a}{a+b}\geqslant\frac{c}{c+d}$.

证明　$\because\frac{a}{b}\geqslant\frac{c}{d}>0,\therefore\frac{b}{a}\leqslant\frac{d}{c}$

$\therefore 1+\frac{b}{a}\leqslant 1+\frac{d}{c},\therefore 0<\frac{a+b}{a}\leqslant\frac{c+d}{c}$

$\therefore\frac{a}{a+b}\geqslant\frac{c}{c+d}$.

※**例4**　设$8<a<20,12<b<36$,求$a+b,a-2b,\frac{a}{b}$的取值范围.

分析　本题关键是求出$-2b$和$\frac{1}{b}$的取值范围,然后根据同向不等式的可加性和两边都是正数的同向不等式的可乘性,问题即可得到解决.

解　由$\left.\begin{cases}8<a<20\\12<b<36\end{cases}\right.\Rightarrow 20<a+b<56$

由$\left.\begin{array}{r}12<b<36\Rightarrow -72<-2b<-24\\8<a<20\end{array}\right\}\Rightarrow$

$-64<a-2b<-4$

由$\left.\begin{array}{r}\frac{1}{36}<\frac{1}{b}<\frac{1}{12}\\8<a<20\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{2}{9}<\frac{a}{b}<\frac{5}{3}$.

三、课堂练习

若$\alpha、\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则$2\alpha-3\beta\in$______.

四、归纳小结

1. 应用不等式的性质证明不等式,一般是从已知的不等式出发,应用不等式的性质进行变形,直至变换出所要证的不等式.

2. 根据不等式的性质,同向不等式可以相加,同向且两边均为正数的不等式可以相乘;同向不等式不能相减和相除,异向不等式的相减或相除应转化为同向不等式(相乘时还应符合是正数)后用相加或相乘来进行.

3. 同号两数的顺序关系与其倒数的顺序相反.

4. 用不等式的性质求变量的范围时,是通过同向不等式相加或相乘来完成的,如果是有等号的,还应注意两端能否取"="号.

五、能力训练

1. 选择题

(1)若$a>b+1$,则下列各式中正确的是(　　).

(A)$a^2>b^2$　　(B)$\frac{a}{b}>1$

(C)$\lg(a-b)>0$　　(D)$\lg a>\lg b$

(2)若$-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是(　　).

(A)$-2<\alpha-\beta<0$　　(B)$-2<\alpha-\beta<-1$

(C)$-1<\alpha-\beta<0$　　(D)$-1<\alpha-\beta<1$

(3)若$a>b,c>d$,则一定有(　　).

(A)$a>b+c-d$　　(B)$a>c-b+d$

(C)$a>b-c+d$　　(D)$b>a-c+b$

(4)给出下面的推理过程:

$\left.\begin{array}{l}a>b\\c>d\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}ac>bc\\bc>bd\end{array}\right\}\Rightarrow ac>bd\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$,

其中错误之处的个数为(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

(5)当$a>b>c$时,恒有(　　).

(A)$ab>ac$　　(B)$a|c|>b|c|$

(C)$|ab|>|bc|$　　(D)$(a-b)|c-b|>0$

2. 填空题

(1)若$x\lg\frac{1}{\pi}>3\lg\frac{1}{\pi}$,则$x$ ______ 3.

(2)若$a<b<0$,则a^2 ______ b^2;a^3 ______ b^3.

(3)若$\alpha、\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,则$\alpha-\beta\in$______.

(4)若$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2}),\beta\in(-\frac{\pi}{2},0)$,则$\alpha-2\beta\in$______.

3. 证明题

(1)已知,$a>b>0,c>d>0$,求证,$a^3-\sqrt{d}>b^3$

$-\sqrt{c}$

求证：$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

※(2)已知：$a>b>0,c<d<0,e<0$,

6.2 算术平均数与几何平均数

第四课时　算术平均数与几何平均数(一)

一、学习目标

理解和掌握"两个正数的算术平均数不小于它们的几何平均数"这一定理，并能应用定理证明一些简单的不等式及相关的问题.

二、例题析解

例 1

例 2　求证：$a^2+b^2\geqslant a+b+ab-1$

证明　$\because a^2+1\geqslant 2a,b^2+1\geqslant 2b,a^2+b^2\geqslant 2ab$

三式相加得：$2a^2+2b^2+2\geqslant 2a+2b+2ab$

$\therefore a^2+b^2\geqslant a+b+ab-1$（当且仅当 $a=b=1$ 时等号成立）

例 3　若 $a,b\in R^+,a+b=1$,

求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 4$.

证明　$\because a+b=1,a,b\in R^+$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}$

$=1+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+1$

$=2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=4$.

※例 4 设 $n>1$，求证：

$\log_n(n-1)\cdot\log_n=(n+1)<1$

证明　$\because n>1,\therefore n-1>0,n+1>0$.

$\therefore \log_n(n-1)\cdot\log_n(n+1)<$

$\left[\frac{\log_n^{(n-1)}+\log_n^{(n+1)}}{2}\right]^2$

$=\left[\frac{\log_n^{(n^2-1)}}{2}\right]^2<(\frac{\log_n^{n^2}}{2})^2=1$.

三、课堂练习

四、归纳小结

1. $\frac{a+b}{2}$与$\sqrt{ab}(a>0,b>0)$分别称为 a 与 b 的算术平均数和几何平均数. 在公式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及平均值不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$中$(a>0,b>0)$，当且仅当 $a=b$ 时，等号才成立，且前一个公式中的 $a,b\in R$，后一个公式中的 a、$b\in R^+$，必须牢记清楚.

2. 由基本不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 及均值不等式 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 可得 $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ 及 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$，应注意这些公式左、右两边结构上的特点("和、积互化")以提高运用公式的能力.

3. 在使用基本不等式和均值不等式证明问题时，要注意它们反复使用后，再相加减或相乘时字母应满足的条件及多次使用后等号成立的条件是否一致，若不一致，则不等式不能取等号.

五、能力训练

1. 选择题

(1)$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$ 成立的条件是(　　).

(A)$a,b\in R$　　(B)a,b 非负

(C)$ab>0$　　(D)$ab\neq 0$

(2)若 $0<a<1,0<b<1$，则 $2\sqrt{ab},2ab,a+b,a^2+b^2$ 最大的一个是(　　).

(A)a^2+b^2　　(B)$a+b$

(C)$2ab$　　(D)$2\sqrt{ab}$

(3)下列推论中，错误的是(　　).

(A)若 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\tan x+\cot x\geqslant 2$.

(B)若 $x\in(0,+\infty)$，则 $x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

(C)$\lg x+\log_x 10\geqslant 2$ $(x>0$，且 $x\neq 1)$

(D)$a\in R^+$，则$(1+a)(1+\frac{1}{a})\geqslant 4$

(4)设 $y=x+\frac{1}{x},(x<0)$，则(　　).

(A)$y\geqslant 2$　　(B)$y\leqslant 2$

(C)$y\geqslant -2$　　(D)$y\leqslant -2$

(5)设 $a=2\lg 2\cdot\lg 5+\lg^2 5$，则(　　).

(A)$a>1$　　(B)$a<1$

(C)$a>2$　　(D)$a<2$

2. 填空题

(1)$\lg 9$ 与 $\lg_{11}10$ 的大小关系是________.

(2)不等式$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$ 成立的充分条件是________.

(3)设 $x,y\in R$，且 $x+y=4$，则 $xy=$________，取等号时 $x=$________，$y=$________.

(4)若 $a>1,b>1$,则 $\log_a b+\log_b a\geq$________.

(5)若 $\lg x+\lg y=2$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq$________.

3. 证明题

(1)已知 $a^2+b^2+c^2=1$,求证:$ab+bc+ca\leq 1$

(2)设 $a>b>c$,求证:$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geq\frac{4}{a-c}$

※(3)已知,$a>0,b>0,a+b=1$,

求证:$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geq 9$.

※(4)已知方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根 x_1,求证方程 $cx^2+bx+a=0$ 必有一根 x_2,使 $x_1+x_2\geq 2$.

第五课时　算术平均数与几何平均数(二)

一、学习目标

掌握用均值不等式求最大值和最小值的方法.

二、例题析解

例 1

例 2　设 $x\geq 0,y\geq 0$,且 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$,求 $u=x\sqrt{1+y^2}$ 的最大值.

解　由已知得 $2x^2+y^2=2$.

$\therefore u=x\sqrt{1+y^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{1+y^2}$

$\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2x^2+1+y^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2+1}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\therefore$ 当且仅当 $\sqrt{2}x=\sqrt{1+y^2}$　即 $y=\frac{\sqrt{2}}{2},x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时,u 有最大值 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

例 3　求函数 $y=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+2}}$ 的最小值.

解　$y=\frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+2}}=\frac{(x^2+2)+4}{\sqrt{x^2+2}}$

$=\sqrt{x^2+2}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2}}\geq 2\sqrt{4}=4$.

$\therefore$ 当且仅当 $\sqrt{x^2+2}=\frac{4}{\sqrt{x^2+2}}$

即 $x=\pm\sqrt{2}$ 时,$y_{最小}=4$.

例 4

三、课堂练习

四、归纳小结

1. 两个正数、若它们的积为常数,则当且仅当这两个数相等时,它们的和有最小值.

2. 两个正数,若它们的和为常数,则当且仅当这两个数相等时,它们的积有最大值.

3. 使用均值不等式求最值时,必须具备三个条件:

①在所求最值的代数式中,各变数均应是正数(如不是,则进行变号转换).

②各变数的和(或积)要为常数,以确保不等式的一端为定值(如不是,则进行拆项或分解,务必使不等式的一端的和或积为常数).

③各变数有相等的可能(即相等时,变量字母有实数解,且解在定义域内,如无,则说明拆项、分解不当,应重新拆项、分解或改用其他方法).

4. 求生产、生活实际问题中的最大、最小值时应注意:

①理解题意,设变量,一般是把要求的最值设为函数.

②建立目标函数.

③在定义域内,求出该函数的最值.

④正确的写出答案.

五、能力训练

1. 选择题

(1)函数 $y=x^2+\frac{4}{x^2+1}$ 的最小值是(　　).

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

(2)函数 $y=x^2(8-2x^2)$ $(0<x<2)$ 的最大值是(　　).

(A)2　(B)4　(C)8　(D)16

(3)若 $a,b\in R^+$,且 $ab=2$,则 $a+2b$ 的最小值是(　　).

(A)1　(B)2　(C)4　(D)8

(4)已知 $x>1,y>1$,且 $\lg x+\lg y=4$,则 $\lg x\lg y$ 的最大值是(　　).

(A)2　(B)4　(C)8　(D)16

(5)已知 $x,y\in R^+$,且 $x+2y=1$,则 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值是(　　).

(A)$2\sqrt{\frac{1}{xy}}$ (B)$\frac{3}{4}$

(C)$3+\sqrt{2}$ (D)$3+2\sqrt{2}$

2.填空题

(1)若 $x>0$,则函数 $y=2-3x-\frac{4}{x}$ 的最大值是________.

(2)设 $x,y\in R$,且 $x+y=4$,则 5^x+5^y 的最小值是________.

(3)若 $x>1$,则函数 $y=x+\frac{1}{x-1}$ 的最小值是________,这时 $x=$________.

(4)用长为 l 的铁线折成一个矩形,则该矩形的最大面积是________,此时矩形的边长为________.

3.解答题

(1)当 $x>-2$ 时,求 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+7+\frac{4}{x+2})$ 的最大值.

(2)已知直角三角形的周长为2,求它的面积的最大值.

※(3)某工厂生产的某种产品当年产量在150吨至250吨之间时,其年生产的总成本 y(万元)与年产量 x(吨)之间的关系可近似地表示为 $y=\frac{1}{10}x^2-30x+4000$,求年平均产量为多少吨时,每吨的平均成本最低,并求出每吨的最低成本.

※(4)建造一个容积为8米^3,深为2米的长方体无盖水池,如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元,那么水池的最低总造价是多少?

测验:同步测试题一

6.3 不等式的证明

第六课时 不等式的证明(一)

一、学习目标

掌握用比较法证明不等式的步骤和方法.

二、例题析解

例1

例2

例3

例4

※例5 已知 $a,b\in R^+,n\in N$,求证:$(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$

证明 $(a+b)(a^n+b^n)-2(a^{n+1}+b^{n+1})$

$=ab^n+a^nb-a^{n+1}-b^{n+1})$

$=(a^n-b^n)(b-a)$

$\because a,b\in R^+$

$\therefore$ 当 $a\geqslant b$ 时,$a^n-b^n\geqslant 0,b-a\leqslant 0$,

当 $a\leqslant b$ 时,$a^n-b^n\leqslant 0,b-a\geqslant 0$,

故均有 $(a^n-b^n)(b-a)\leqslant 0$

$\therefore(a+b)(a^n+b^n)\leqslant 2(a^{n+1}+b^{n+1})$

三、课堂练习

四、归纳小结

1. 若要证的不等式两边是多项式,或分式,或对数式等,作差后能化简为因式或完全平方式的形式的,则一般用差比较法,其基本思路是:欲证 $A\geqslant B$,只要证 $A-B\geqslant 0$ 即可。其基本步骤是:作差⟶变形(变形为因式、商式、完全平方式等)⟶判断差的符号⟶作出结论.

2. 若要证的不等式两边是幂的形式,常用求商法,其思路是:欲证 $A\geqslant B$,只要记 $\frac{A}{B}\geqslant 1$ 即可,其一般步骤为:作商⟶变形⟶判断商与1的大小.(注意:得出 $\frac{A}{B}\geqslant 1$ 后去分母得 A 与 B 的大小时,要注意分母的正、负,以确定不等号的方向).(见第一课例4)

3. 比较法(差比较或商比较),是证不等式或比较两数(式)大小或证函数的单调性的最基本、最重要的方法之一,要切实的掌握好其基本步骤,并能灵活运用.

五、能力训练

1.选择题

(1)设 $p=a+2b,q=a+b^2+1$,则 p 与 q 的大小关系(　　).

(A)$p\geqslant q$　　(B)$p\leqslant q$

(C)$p>q$　　(D)$p<q$

(2)设 $a,b\in R^+$,且 $a\neq b$,则 $m=\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}$ 与 $n=a+b$ 的大小关系是(　　).

(A)$m>n$　　(B)$m=n$

(C)$m<n$　　(D)$m\leqslant n$

(3)已知 $a<0,-1<b<0$,则 a,ab,ab^2 之间的大小关系(　　).

(A)$a>ab>ab^2$　　(B)$ab^2>ab>a$

(C)$ab>a>ab^2$　　(D)$ab>ab^2>a$

(4)函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是(　　).

(A)增函数　　(B)减函数

(C)常数函数　　(D)单调性不确定

2.填空题

(1)设 $a=1-\sqrt{3},b=\sqrt{3}-1,c=3-2\sqrt{3}$,则 a,b,c 的大小顺序是________.

(2)若 $0<a<\frac{1}{2},n\in N$,则 $(1-a)^n$ 与 a^n 的大小是________.

(3)设 $x\neq 1,m=2x^4+1,n=2x^3+x^2$,则 m 与 n 中较大的是________.

3.证明题

(1)已知 $a,b,c\in R$,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$.

※(2)已知 $a,b\in R^+$,且 $a+b=c$,求证:$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$.

※(3)试证 $f(x)=-x^3-x+1(x\in R)$ 是定义域上的减函数.

第七课时　不等式证明(二)

一、学习目标

掌握用综合法证明不等式的方法.

二、例题析解

例1

例2　已知 $0<a<1$,证明:$\frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}\geqslant 9$.

证明　$\because 0<a<1,\therefore 1-a>0$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{4}{1-a}=\frac{1-a+a}{a}+\frac{4(1-a)+4a}{1-a}$$

$$=\frac{1-a}{a}+\frac{4a}{1-a}+5$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{1-a}{a}\cdot\frac{4a}{1-a}}+5=9$$

当且仅当 $\frac{1-a}{a}=\frac{4a}{1-a}$ 即 $a=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

例3　已知 $a,b,c\in R^+$ 且 $a+b+c=1$

求证:$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant 8$.

证明　$\because a+b+c=1\quad\therefore 1-a=b+c$

$$\therefore \frac{1}{a}-1=\frac{1-a}{a}=\frac{b+c}{a}\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}>0$$

同理:$\frac{1}{b}-1=\frac{a+c}{b}\geqslant\frac{2\sqrt{ac}}{b}>0$

$$\frac{1}{c}-1=\frac{a+b}{c}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{c}>0$$

以上三式相乘得:

$$(\frac{1}{a}-1)(\frac{1}{b}-1)(\frac{1}{c}-1)\geqslant\frac{2\sqrt{bc}}{a}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{ab}}{c}=8.$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时等号成立.

※例4　设实数 x,y 满足 $y+x^2=0$,又 $0<a<1$,

求证:$\log_a(a^x+a^y)<\log_a 2+\frac{1}{8}$

证明　$\because y+x^2=0$,又 $0<a<1$,

$$\therefore \log_a(a^x+a^y)\leqslant\log_a 2\sqrt{a^x\cdot a^y}$$

$$=\log_a(2\cdot a^{\frac{x+y}{2}})$$

$$=\log_a 2\cdot a^{\frac{x-x^2}{2}}$$

$$=\log_a 2+\frac{1}{2}(x-x^2)$$

$$=\log_a 2-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{8}\leqslant\log_a 2+\frac{1}{8}.$$

等号在 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\a^x=a^y\end{cases}$ 时成立,此时 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}$,

但 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2}$ 不满足 $y+x^2=0$,$\therefore y\neq\frac{1}{2}$,故等号不成立.

$\therefore \log_a(a^x+a_y)<\log_a 2+\frac{1}{8}$.

三、课堂练习

四、归纳小结

1. 从已知条件或已证明过的不等式出发，利用不等式的性质推出所要证明的不等式，这种证明不等式的方法叫做综合法，其实质就是"由因导果"，即从"已知"看"需知"逐步推出"结论".

2. 要证的不等式一边是积，另一边是和的形式时，可考虑用均值不等式证之.

3. 使用均值不等式时要注意成立的条件.

五、能力训练

1. 选择题

(1)若 $a,b\in R^+$，且 $a+b\leqslant 4$，则下列各式成立的是( ).

(A)$\sqrt{ab}\geqslant 2$　　(B)$\frac{1}{ab}\geqslant 1$

(C)$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 1$　　(D)$\frac{1}{a+b}\leqslant\frac{1}{4}$

(2)若 a,b 为非零实数，则在不等式

①$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant ab$，②$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，③$(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$

④$\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{ab}{a+b}$ 中，恒成立的个数是( ).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

(3)设 $b>a>0$，且 $a+b=1$，则下列四个式子中，值最大的是( ).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$2ab$　(C)b　(D)a^2+b^2

(4)对于 $x\in R$，下列各式成立的是( ).

(A)$\lg(x^2+1)\geqslant\lg 2x$　　(B)$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$

(C)$\frac{1}{x^2+1}<1$　　(D)$x^2+3>2x$

2. 填空题

(1)$x^2+\frac{9}{x^2+1}\geqslant 5$ 中等号成立时 $x=$________.

(2)函数 $y=\frac{x^2+7}{\sqrt{x^2+3}}$ 的值不小于________.

(3)若正数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 ab 的取值范围是________.

3. 证明题

(1)已知 $a,b\in R^+$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}$

(2)若 $a>0,b>0$，求证：$a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$

(3) $a,b,c\in R^+$，求证：$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

※(4)若 a,b,c 为正数，且 $a+b+c=1$，求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$.

※(5)设 x,y 满足 $y-x^2=0$，

求证：$\log_2(2^x+2^y)>\frac{7}{8}$.

第八课时　不等式证明(三)

一、学习目标

掌握用分析法证题的思路和论证的结构，领悟适合用分析法证明的不等式的类型，能灵活的运用分析法进行思考和证题.

二、例题析解

例 1

例 2

例 3　设 a,b,c 是三角形三边，S 是三角形面积，求证：$c^2-a^2-b^2+4ab\geqslant 4\sqrt{3}S$.

证明　要证 $c^2-a^2-b^2+4ab\geqslant 4\sqrt{3}S$.

需证　$-(a^2+b^2-c^2)+4ab\geqslant 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$.

只需证：$-2ab\cos C+4ab\geqslant 2\sqrt{3}ab\sin C$.

又需证：$\sqrt{3}\sin C+\cos C\leqslant 2$

即需证　$\sin(C+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，此式显然成立.

故 $c^2-a^2-b^2+4ab\geqslant 4\sqrt{3}S$.

说明　用分析法证题时，必须有："要证"、"只需证"等语言的出现，否则无法体现是用分析法证明.

三、课堂练习

四、归纳小结

1. 分析法就是从需证的不等式出发，不断用不等式的性质进行推理变换，直至推出明显成立的不等式，从而说明原不等式成立，这就是"分析法"，其特点

和思路是“执果索因”，即从“未知”看“需知”逐步靠拢“已知”。其推理过程中每一步必须是可逆的，其格式常用“要证…只需证…显然成立”或用符号“$\Leftarrow$”.

2. 分析法常用于比较法、综合法难于入手的题型.

3. 分析法的优点是利于思考，因为它方向明确思路自然，易于掌握，而综合法的优点是易于表述，条理清楚，形式简洁，因而证不等式时，常常用分析法寻找解题思路，再用综合法写出证明过程.

五、能力训练

1. 求证：$\sqrt{3}+\sqrt{5}<\sqrt{2}+\sqrt{7}$

2. 设 $a\geqslant1$，求证：$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}<\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$.

3. 比较：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$与$\sqrt{6}-2$的大小.

※4. 求证：$\left(\frac{1}{\sin^4x}-1\right)\left(\frac{1}{\cos^4x}-1\right)\geqslant9$.

第九课时　不等式的证明(四)

一、学习目标

能熟练的应用比较法、综合法、分析法证明不等式，能准确的确定各种不等式的证明方式及寻找证明的思路.

二、例题析解

例1　设 $a>2$，求证：$\log_{(a-1)}a>\log_a(a+1)$

证法一　(比差法)

$\because a>2,\therefore\log_{(a-1)}a>0,\log_a(a+1)>0$

$\therefore\log_{(a-1)}a-\log_a(a+1)$

$=\frac{1}{\log_a(a-1)}-\log_a(a+1)$

$=\frac{1-\log_a(a+1)\cdot\log_a(a-1)}{\log_a(a-1)}\cdots\cdots⊛$

而 $\log_a(a+1)\cdot\log_a(a-1)<$

$[\frac{\log_a(a+1)+\log_a(a-1)}{2}]^2=\frac{\log_a^2(a^2-1)}{4}$

$<\frac{\log_a^2a^2}{4}=\frac{2^2}{4}=1.$

$\therefore1-\log_a(a+1)\cdot\log_a(a-1)>0,$

又 $\log_a(a-1)>0$

$\therefore$⊛式为正，故 $\log_{(a-1)}a>\log_a(a+1)$

证法二　(比商法)

$\because a>2,\therefore\log_{(a-1)}a>0,\log_a(a+1)>0.$

$\therefore\frac{\log_a(a+1)}{\log_{(a-1)}a}=\log_a(a+1)\cdot\log_a(a-1)$

$<[\frac{\log_a(a+1)+\log_a(a-1)}{2}]^2$

$=[\frac{\log_a(a^2-1)}{2}]^2<\left(\frac{\log_aa^2}{2}\right)^2=1$

$\therefore\log_{(a-1)}a>\log_a(a+1).$

说明　不等式两边是不同底的对数式，故用比较法后换成同底再根据所出现的式子的特点，利用均值不等式及对数的运算法则和放缩的技巧而获证.

例2　已知 $a,b,c\in R^+$，且 $ab+bc+ac=1$.

求证：$a+b+c\geqslant\sqrt{3}$.

分析　用比较法或综合法不好入手，故考虑用分析法.

证明　要证 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$，$\because a,b,c\in R^+$.

需证：$(a+b+c)^2\geqslant3$

即证：$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac0)\geqslant3$，

$\because ab+bc+ac=1$

$\therefore$只需证 $a^2+b^2+c^2\geqslant1=ab+bc+ac$

而 $a^2+b^2\geqslant2ab,b^2+c^2=2bc,a^2+c^2=2ac$

三式相加得 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac=1$

故 $a^2+b^2+c^2\geqslant1$ 成立，

$\therefore$原不等式 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$成立.

说明　先用分析法探路，再用综合法证明，这是解决不好入手的问题的一种常用方法.

※例3　设 $a>0,a\neq1,t>0$，比较$\frac{1}{2}\log_at$ 与 $\log_a\frac{t+1}{2}$的大小.

解　$\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_at$

$=\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}=\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}$

$\because\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}\geqslant1$　当且仅当 $t=1$ 时取等号.

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}=\log_a 1=0$

此时 $\frac{1}{2}\log_a t=\log_a \frac{t+1}{2}$

当 $t\neq 1$ 时，$\dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}>1$.

若 $a>1$，则 $\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}>0$，

此时 $\frac{1}{2}\log_a t<\log \frac{t+1}{2}$.

若 $0<a<1$，则 $\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}<0$，

此时 $\frac{1}{2}\log_a t>\log_a \frac{t+1}{2}$.

另解：$\because t>0$，$\therefore \frac{t+1}{2}\geqslant\sqrt{t}$，当且仅当 $t=1$ 时取等号.

$\therefore t=1$ 时，$\log_a \frac{t+1}{2}=\log_a\sqrt{t}=\frac{1}{2}\log_a t$.

当 $t\neq 1$ 时，有 $\frac{t+1}{2}>\sqrt{t}$.

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，由于 $y=\log_a x$ 是增函数，

$\therefore \log_a \frac{t+1}{2}>\log_a\sqrt{t}$

即 $\log_a \frac{t+1}{2}>\frac{1}{2}\log_a t$.

当 $0<a<1$ 时，由 $y=\log_a x$ 是减函数得

$\log_a \frac{t+1}{2}<\log_a\sqrt{t}$，即 $\log_a \frac{t+1}{2}<\frac{1}{2}\log_a t$.

三、课堂练习

1. 已知 $a>0,b>0$，求证：$\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}>a+b$.

(2)若 $a,b,c\in R^+$，求 $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}\right)$ 的最小值.

(3)若 $a>0,b>0$，求证：$\sqrt{(1+a)(1+b)}\geqslant 1+\sqrt{ab}$.

四、归纳小结

1. 证明不等式常用方法有比较法(差比较法和商比较法)、综合法、分析法等，有时也可利用函数的单调性来证明.

2. 差比较法常用于不等式的两边都是多项式、分式或对数式的不等式. 商比较法常用于两边都是幂的形式的不等式. 比较法可用于证不等式，也可用于比较两数的大小，也可用于证等式.

3. 利用已知或已证明的不等式，结合不等式的性质推出所要证的不等式，这种证法称为综合法，它往往是利用基本的不等式，或一些放缩技巧把不等式的一边"放大"或"缩小"到另一边.

4. 分析法是从需证的不等式出发，逐步寻求使该不等式成立的条件，其优点是利于思考，因为它方向明确，思路自然，易于掌握，但它的表达具有一定的形式，因此书写时必须注意规范化.

5. 若不等式的差式的符号(或商式与1的大小比较)不能确定，且与某些字母的取值有关时，需要对这些字母进行讨论。

五、能力训练

1. 选择题

(1)若 $a<b<0$，则下列各式中恒不成立的不等式是(　　).

(A)$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　(B)$\frac{a}{b}>1$

(C)$a^2<b^2$　　(D)$a<4-b$

(2)已知 $f(x)=\frac{x}{1+x}$，且 $a>b>0$，则 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的大小是(　　).

(A)$f(a)>f(b)$　　(B)$f(a)<f(b)$

(C)$f(a)\geqslant f(b)$　　(D)$f(a)\leqslant f(b)$

(3)若 $a,b>0,a+b=1$，则下列不等式中正确的是(　　).

(A)$ab<\frac{1}{4}$　　(B)$\frac{1}{ab}>4$

(C)$a+b+ab\geqslant\frac{5}{4}$　　(D)$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

(4)已知 $x\in R$，则下列不等式恒成立的是(　　).

(A)$3^{x^2+1}>3^{2x}$　　(B)$\lg(x^2+1)>\lg 2x$

(C)$x^2+4\geqslant 4x$　　(D)$\lg x+\log_x 10\geqslant 2$

(5)在锐角三角形中，已知两边 $a=1,b=2$，那么第三边 c 的取值范围是(　　).

(A)$1<c<\sqrt{5}$　　(B)$\sqrt{3}<c<3$

(C)$\sqrt{3}<c<\sqrt{5}$　　(D)$1<c<3$

2. 填空题

(1)若 $a>0,b>0$，则 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{2(a+b)}$ 的大小关系是________.

(2)$a,b\geqslant 0,a+b=1$，则 $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}\leqslant$________.

(3)函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域是________.

(4)若 $a>b>0$，则 $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$________$\sqrt[3]{a-b}$.(填<或>)

(5)$\log_3 4$ 与 $\log_4 5$ 的大小关系是________.

3. 证明题

(1)已知 a,b,c 为互不相等的正数，且 $abc=1$，求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

※(2)求证：$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)\leqslant a+b-1$.

※(3)已知 $a>0,b>0,c>0$，

求证：$\lg\frac{c}{a}\lg\frac{c}{b}\geqslant\lg\sqrt{\frac{b}{a}}\lg\sqrt{\frac{a}{b}}$.

(4)求证：$\sqrt{7-4\sqrt{3}}<\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

(5)要挖一个面积为 $216m^2$ 的矩形鱼塘，周围两侧分别有宽 2m 和 3m 的堤堰，为使占地面积最小，问鱼塘的长与宽应是多少？

第十课时　不等式的证明(五)

一、学习目标

了解证明不等式的其他一些方法(如反证法、换元法、放缩法等)．扩大知识面．掌握反证法和换元法的论证结构及题型特征，掌握一些"放缩"的技巧．

二、例题析解

例1　设 a,b,c 均为小于 1 的正数，求证 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$

证明　假设 $(1-a)b,(1-b)c,(1-c)a$ 同时大于 $\frac{1}{4}$，则由 $\frac{1}{4}<(1-a)b\leqslant\left(\frac{1-a+b}{2}\right)^2$

得：$\frac{1-a+b}{2}>\frac{1}{2}$

同理：$\frac{1-b+c}{2}>\frac{1}{2}$

$\frac{1-c+a}{2}>\frac{1}{2}$

三相相加得 $\frac{3}{2}>\frac{3}{2}$ 矛盾，∴原结论成立．

说明　用反证法证题的实质就是从否定结论入手，经过一系列的逻辑推理，导出矛盾，从而说明原结论正确．例如要证不等式 $A>B$，先假设 $A\leqslant B$，然后根据题设及不等式性质，推出矛盾，从而否定假设 $A\leqslant B$ 不成立，而肯定 $A>B$ 成立．对于要证的结论中含有"至多"、"均不"、"至少"、"均是"、"不都"、"任何"、"唯一"等特征字眼的不等式，若正面难以找到解题的突破口，可转换视角，巧用反证法往往立见奇效．

例2　已知 $a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{3\cdot4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}$

求证：$\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$ $(n\in N)$.

证明　$\because\sqrt{k(k+1)}<\frac{k+k+1}{2}=\frac{2k+1}{2}$ 对任意 $k\in N$ 成立．

$$\therefore a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{3\cdot4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}+\cdots+\frac{2n+1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}[3+5+7+\cdots+(2n+1)]$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+2n)<\frac{1}{2}(n^2+2n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)^2$$

又 $a_n=\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+\sqrt{3\cdot4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}>1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$.

说明　根据要证的不等式的结构特征，应用均值不等式"放大"a_n 为一个等差数列的和，求和后再添加一个数 1，"放大"到所要证的右边，而左边是通过"缩小"的方法去根号而转化为等差数列的和，放大或缩小的技巧很多，如添项、减项、分子、分母加或减一个数，或用函数单调性、有界性等，但要注意放缩要适度．

※**例3**　求证：$-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant\sqrt{2}$

证明　$\because 1-x^2\geqslant0,\therefore -1\leqslant x\leqslant1$.

故可设 $x=\cos\theta,\theta\in[0,2\pi]$

则 $\sqrt{1-x^2}-x=\sqrt{1-\cos^2\theta}-\cos\theta$

$=|\sin\theta|-\cos\theta$

当 $\theta\in[0,\pi]$ 时，

$|\sin\theta|-\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$

而 $\theta-\frac{\pi}{4}\in[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$

$\therefore -1\leqslant\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$

当 $\theta\in[\pi,2\pi]$ 时，

$|\sin\theta|-\cos\theta=-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$

而 $\theta+\frac{\pi}{4}\in[\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}]$，

$\therefore -1\leqslant-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}$.

综上可得 $-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant\sqrt{2}$.

说明　①因变量字母 x 的取值范围与 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 的取值范围相同，故用三角换元，把所要证的不等式巧妙的换转为求三角函数的值域而获证. 一般地，题设中有形如 $x^2+y^2\leqslant R^2$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的条件可以分别引入三角代换 $\begin{cases}x=R\cos\theta\\y=R\sin\theta\end{cases}$ $|R|\leqslant1$，$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$，其中 θ 的取值范围取决于 x,y 的取值范围，凡不能用基本不等式求最值时，一般考虑换元(代数换元或三角换元)，然后利用函数的单调性来解决.

②不等式的证明除了上述方法外，还有判别式法，数学归纳法等，在此不再一一介绍了.

三、能力训练

(1)设 $n>0$，求证：

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\sqrt{n+2}-\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}$$

(2)已知 $a,b\in R$，且 $a^2+b^2=4$，求 $a-b$ 的取值范围.

(3)若 $x^2+y^2\leqslant1$，求证：$|x^2+2xy-y^2|\leqslant\sqrt{2}$

※(4)设 $a,b\in R^+$，且 $a+b>2$，则 $\frac{1+a}{b}$ 与 $\frac{1+a}{b}$ 中至少有一个小于 2.

※(5)设 $a,b\in R^+$，且 $a^3+b^3=2$，求证：$a+b\leqslant2$.

测验：同步测试题二

6.4　不等式的解法举例

第十一课时　不等式的解法举例(一)

一、学习目标

巩固一元一次不等式、一元二次不等式、绝对值不等式的解法，进一步掌握一元二次不等式的解法及应用，对含字母的不等式能够恰当地分类讨论.

二、例题析解

例 1

例 2　解关于 x 的不等式：

$ax^2+a^2x-2a^3>0$.

解　原不等式可化为 $a(x-a)(x+2a)>0$

当 $a=0$ 时，原不等式为 $0>0$ 不成立，

$\therefore$ 解集为 ϕ.

当 $a>0$ 时，原不等式化为 $(x-a)(x+2a)>0$.

由于 $a>-2a$，$\therefore$ 原不等式的解为 $x>a$ 或 $x<-2a$.

当 $a<0$ 时，原不等式化为 $(x-a)(x+2a)<0$.

由于 $a<0$ 时，$a<-2a$，$\therefore$ 原不等式解为 $a<x<-2a$.

综上所述，当 $a=0$ 时，不等式解集为 ϕ. 当 $a>0$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x>a$ 或 $x<-2a\}$，当 $a<0$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid a<x<-2a\}$.

例 3　已知函数

$f(x)=\sqrt{1-ax^2-(1-a)x-a}$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，求 a 的取值范围.

解　函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，

即不等式 $1-ax^2-(1-a)x-a\geqslant0$ 的解集为 R.

亦即 $ax^2+(1-a)x+a-1\leqslant0$ 的解集为 R.

当 $a=0$ 时，此不等式化为 $x-1\leqslant0$ 解集不是 R，$\therefore a\neq0$.

当 $\begin{cases}a<0\\\triangle\leqslant0\end{cases}$ 时，此不等式的解集为 R.

由 $\begin{cases}a<0\\(1-a)^2-4a(a-1)\leqslant0\end{cases}$ 得