

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

# 微积分

主 编 张银生 安建业

 中国人民大学出版社

72  
30

新世纪大学数学立体化系列教材

总主编 于义良

# 微 积 分

主 编 张银生 安建业  
副主编 李美凤 王全文

中国人民大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

微积分/张银生,安建业主编.  
北京:中国人民大学出版社,2004  
(新世纪大学数学立体化系列教材)

ISBN 7-300-05782-9/O·63

- I. 微…  
II. ①张…②安…  
III. 微积分-高等学校-教材  
IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 072450 号

**新世纪大学数学立体化系列教材**

总主编 于义良

**微积分**

主 编 张银生 安建业

副主编 李美凤 王全文

---

**出版发行** 中国人民大学出版社  
**社 址** 北京中关村大街 31 号 邮政编码 100080  
**电 话** 010-62511242(总编室) 010-62511239(出版部)  
010-82501766(邮购部) 010-62514148(门市部)  
010-62515195(发行公司) 010-62515275(盗版举报)  
**网 址** <http://www.crup.com.cn>  
<http://www.ttrnet.com>(人大教研网)  
**经 销** 新华书店  
**印 刷** 北京东君印刷有限公司  
**开 本** 787×965 毫米 1/16 版 次 2004 年 8 月第 1 版  
**印 张** 31 印 次 2004 年 8 月第 1 次印刷  
**字 数** 568 000 定 价 39.00 元(含光盘)

---

**版权所有 侵权必究 印装差错 负责调换**

## 总 序

随着科学技术的迅猛发展,数量分析已渗透到各个领域,数学的重要性已被整个社会所公认;由于计算机技术的广泛普及与提高,许多繁难的计算和抽象的推理已不再是高不可攀,数学的应用越来越深入;随着人类素质的不断提高,数学素质教育已成为全体公民的必修课,数学的普及越来越广泛。为适应新形势的发展和社会的需要,信息技术与学科课程整合已是教育教学改革的“重中之重”,运用信息技术改造和优化传统学科内容是培养新世纪具有创新能力的高素质人才的必然要求。经过多年的教学研究和实践,我们组织了具有丰富教学经验的第一线教师,编写了这套“新世纪大学数学立体化系列教材”,奉献给大家。

这套系列教材是“21 世纪初天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》”成果的延伸,包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《数学建模》、《运筹学》五本教材和《微积分名师导学》、《线性代数名师导学》、《概率论与数理统计名师导学》三本教学指导书。这套教材力求体现如下特点:

第一,以实用为原则,“教、学、做”融为一体,内容体系整体优化,使读者实现由知识向能力的转化。

第二,以实际为背景,概念阐述简明、通俗化,举例贴近

生活,运用多媒体技术使内容直观化、图形化,使读者消除对数学的陌生感、抽象感、恐惧感,激活求知欲,增强学好数学、做好数学的信心。

第三,以计算机为工具,传统内容与信息技术应用融为一体,注重基本知识、基本思想、基本能力的培养,对繁、难、抽象的内容,充分利用当前极为流行的 Mathematica 软件、Excel 软件来实现,比如函数图形描绘、矩阵计算、数据分析等。

第四,每册教材均配有多媒体助学助教光盘,包括课程要求、电子教案、模拟演示、练习详解、单元测试、实例选编、试题分析、名人简介等众多模块,信息量大,使用方便,便于读者更好地理解、掌握、巩固所学知识,并有助于及时检测和提高。

总之,这套系列教材配有光盘,方便教学,信息量大;融入软件,突出技能,实用性强。内容可视化,你不会再为抽象而烦恼;计算软件化,你不会再为繁难而困扰;方法现实化,你不会再因无用而厌学。

2003年冬季,我有幸到澳大利亚 La Trobe 大学学习考察,亲身经历了国外大学数学教育对学生能力、素质培养的实践,它们特别重视数学思想的熏陶和数学知识的应用,“做中学、学中悟、悟中醒、醒中行”做得非常出色。让我们可喜的是即将出版的这套系列教材恰好在这方面做了有益的尝试。

我们期盼这套系列教材能为广大读者带来学数学的轻松、做数学的快乐和用数学的效益。

“新世纪大学数学立体化系列教材”编委会主任、总主编 于义良

2004年3月

## 前 言

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华,它的出现,不仅整个地更新了数学的面貌,而且显著地促进了整个科学技术的发展。目前,微积分的理论与方法,已广泛地应用于自然科学、工程技术乃至社会科学等各个领域。它供给人们的不仅是一种高级的数学技术,而且是一种人类进步所必需的文化素质和修养。学习和在一定程度内掌握微积分的知识,不仅是对理工类学生的要求,而且也是对经济管理、人文科学等各类学生的基本要求和必备要素。

但是由于数学的抽象形式和符号语言与人们的直接生活距离较大,给微积分的教与学带来了很大的障碍和困难,因此在大学的微积分的教学过程中还有许多不尽人意的地方:抽象难教,枯燥难学,糊涂难用,以至使本来生动活泼的一门课程成为学校中老师与学生的老大难。

面向新世纪,随着社会经济的迅猛发展,社会中各个行业及大学里的各个专业都对微积分提出了新的更高的要求,微积分教学改革显得更加紧迫和重要。能否把微积分的教学变得生动一些,实用一些呢?这是我们时常在思考的一个问题。为此,我们编写了这本教材。

在编写本书时,我们注意了以下几点:

1. 尽量从实际出发,注重概念与定理的直观描述和实

际背景,克服学生在数学认知上的心理障碍,逻辑推理做到适可而止。

2. 充分利用计算机等先进的现代教育技术手段,尽量使抽象的概念形象化,使烦琐的计算简单化。注重知识的生动性和趣味性,削弱了过难过繁的计算技巧,使学生从枯燥的公式中解放出来。

3. 增加联系实际的例题、练习题和数学模型,注重学生运用数学的意识,培养学生用数学的能力,从而不断提高学生学习数学的主动性和积极性。

《微积分》是天津市普通高校教学改革项目《信息技术与经济数学课程整合的研究和实践》成果的延伸。

本书包括文字教材与电子辅助教材两部分。参加本书编写的有:张银生、安建业、李美凤、王全文、李乃华、龙建新、肖晴初、段玉、滕树军、王玉津。

在本书编写过程中,我们得到了天津市教委高教处、天津商学院教务处的指导,特别是得到天津商学院教材中心、中国人民大学出版社许多同志的大力支持,天津工程师范学院何文章教授、天津科技大学张大克教授以及湖南商学院、上海水产大学、天津理工大学、山西大学工程学院、运城学院的老师们提出了非常好的建议,为体现内容的典型性与广泛性,书中部分例题与练习题引自他人著作,在此一并表示感谢。由于我们水平所限,书中若有不尽如人意的地方,敬请读者雅正。

编著者

2004年7月18日

# 目 录

<b>第 1 章 函数与极限</b> .....	(1)
第 1.1 节 函数及其基本性质 .....	(1)
习题 1.1 .....	(14)
第 1.2 节 常见的函数 .....	(17)
习题 1.2 .....	(29)
第 1.3 节 极限及其性质 .....	(33)
习题 1.3 .....	(49)
第 1.4 节 极限的运算 .....	(51)
习题 1.4 .....	(66)
第 1.5 节 函数的连续性 .....	(68)
习题 1.5 .....	(77)
第 1.6 节 二元函数中的极限与连续 .....	(80)
习题 1.6 .....	(89)
第 1.7 节 Mathematica 环境下对函数与 极限的讨论 .....	(91)
习题 1.7 .....	(100)
<b>第 2 章 导数与微分</b> .....	(102)
第 2.1 节 导数的基本概念 .....	(102)
习题 2.1 .....	(112)
第 2.2 节 导数的运算 .....	(114)



	习题 2.2 .....	(129)
第 2.3 节	微 分 .....	(132)
	习题 2.3 .....	(138)
第 2.4 节	偏导数与全微分 .....	(139)
	习题 2.4 .....	(152)
第 2.5 节	Mathematica 环境下导数与 微分的计算 .....	(155)
	习题 2.5 .....	(160)
<b>第 3 章</b>	<b>微分学的定理及应用</b> .....	(162)
第 3.1 节	中值定理 .....	(162)
	习题 3.1 .....	(167)
第 3.2 节	洛必达法则 .....	(168)
	习题 3.2 .....	(173)
第 3.3 节	泰勒公式 .....	(174)
	习题 3.3 .....	(179)
第 3.4 节	函数的单调性、极值与最值 .....	(180)
	习题 3.4 .....	(186)
第 3.5 节	函数作图 .....	(188)
	习题 3.5 .....	(194)
第 3.6 节	二元函数的极值与条件极值 .....	(194)
	习题 3.6 .....	(198)
第 3.7 节	经济中的优化问题 .....	(199)
	习题 3.7 .....	(207)
第 3.8 节	Mathematica 环境下 求函数的极值 .....	(209)
	习题 3.8 .....	(213)
<b>第 4 章</b>	<b>积 分</b> .....	(215)
第 4.1 节	定积分的基本概念 .....	(216)

	习题 4.1 .....	(227)
第 4.2 节	定积分的性质 .....	(229)
	习题 4.2 .....	(236)
第 4.3 节	微积分基本定理与原函数 .....	(238)
	习题 4.3 .....	(246)
第 4.4 节	不定积分的概念与性质 .....	(249)
	习题 4.4 .....	(255)
第 4.5 节	常用积分法 .....	(257)
	习题 4.5 .....	(280)
第 4.6 节	定积分的近似计算 .....	(283)
	习题 4.6 .....	(287)
第 4.7 节	广义积分 .....	(288)
	习题 4.7 .....	(295)
第 4.8 节	二重积分 .....	(296)
	习题 4.8 .....	(312)
第 4.9 节	Mathematica 环境下 积分的计算 .....	(313)
	习题 4.9 .....	(318)
<b>第 5 章</b>	<b>定积分的应用</b> .....	<b>(320)</b>
第 5.1 节	定积分在几何中的应用 .....	(320)
	习题 5.1 .....	(326)
第 5.2 节	定积分在经济中的应用 .....	(327)
	习题 5.2 .....	(331)
第 5.3 节	平均值 .....	(332)
	习题 5.3 .....	(334)
<b>第 6 章</b>	<b>无穷级数</b> .....	<b>(335)</b>
第 6.1 节	数项级数 .....	(335)
	习题 6.1 .....	(341)

第 6.2 节	正项级数 .....	(343)
	习题 6.2 .....	(350)
第 6.3 节	绝对收敛与条件收敛 .....	(351)
	习题 6.3 .....	(355)
第 6.4 节	幂级数 .....	(357)
	习题 6.4 .....	(367)
第 6.5 节	函数的幂级数表示 .....	(368)
	习题 6.5 .....	(373)
第 6.6 节	Mathematica 环境下 对级数的讨论 .....	(373)
	习题 6.6 .....	(377)
<b>第 7 章</b>	<b>微分方程</b> .....	(379)
第 7.1 节	微分方程的概念 .....	(380)
	习题 7.1 .....	(385)
第 7.2 节	一阶微分方程 .....	(387)
	习题 7.2 .....	(406)
第 7.3 节	斜率场与欧拉法 .....	(409)
	习题 7.3 .....	(419)
第 7.4 节	二阶微分方程 .....	(420)
	习题 7.4 .....	(434)
第 7.5 节	Mathematica 环境下 解微分方程 .....	(436)
	习题 7.5 .....	(439)
<b>第 8 章</b>	<b>差分方程</b> .....	(441)
第 8.1 节	差分的概念 .....	(441)
	习题 8.1 .....	(447)
第 8.2 节	差分方程的概念 .....	(448)
	习题 8.2 .....	(453)

第 8.3 节	一阶常系数线性差分方程 .....	(455)
	习题 8.3 .....	(466)
第 8.4 节	二阶常系数线性差分方程 .....	(469)
	习题 8.4 .....	(475)
附录	Mathematica 中常用符号及函数简介 .....	(479)
	参考文献 .....	(483)

# 第 1 章

## 函数与极限

日常生活中的一切事物都在不停地变化着：从街道上汽车的行驶到天空中的星转月移；从孩子的出生至幼年至老年到世界人口的不断膨胀；从银行存款利息的逐日增加到世界上各种股票指数的涨涨落落；从加热时壶中的水温由  $20^{\circ}\text{C}$  升至  $100^{\circ}\text{C}$  到整个地球的气候逐渐变暖……我们自然要关注身边的这些事物，要研究它们的变化及其规律。作为变化着的事物及它们之间依存关系的反映，在数学中就产生了变量(variable)与函数(function)的概念。函数是数学中最基本的概念，它的基本思想是：通过某一事物的变化去推知另一事物的变化。它的基本手段是：将变化事物的关系抽象化(如用解析式表示)、形象化(如用图像表示)、简单化(如用表格表示)。

函数的概念是运动变化和对立统一等观点在数学中的具体体现，而极限正是人们研究事物变化趋势的一个必不可少的工具，它是从有限中认识无限、从近似中认识精确、从离散中认识连续、从量变中认识质变的一种重要的思维方法。

### 第 1.1 节 函数及其基本性质

#### 1. 函数的基本概念

在生活中我们经常和函数打交道，经常利用函数的思想去分析、推理、

表达事物之间的关系,只是我们没有意识到这个名词罢了. 我们看几个具体的例子.

**例 1.1.1** 下面是几个常见的表格.

(1)2002 年 2 月 21 日国务院公布的利率表. 如表 1.1.1.

**表 1.1.1**

时间	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率(%)	1.71	1.89	1.98	2.25	2.52	2.79

(2)国民生产总值统计表(《中国统计年鉴(2001)》). 如表 1.1.2.

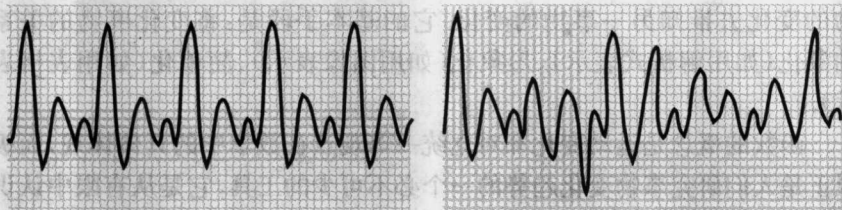
**表 1.1.2**

年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000
生产总值(亿元)	57 494.9	66 850.5	73 142.7	76 967.2	80 579.4	88 189.6

这些表格都简单明了地反映了两个变量之间的依存关系. 在利率表中,每一个年限都有一个确定的利率与之对应,人们根据表格就可算出存款的利息.

**例 1.1.2** 下面是几个常见的图形.

(1)两位患者的心电图. 见图 1.1.1.



**图 1.1.1**

(2)1995—2000 年天津市人才市场状况图(《天津年鉴(2001)》). 见图 1.1.2.

这些曲线非常形象地反映了变量之间的依存关系. 例如,心电图反映了患者心脏的电传导随时间变化的规律,有经验的医生根据心电图就可以作出初步诊断.

**例 1.1.3** 下面是几个常见的公式.

(1)自由落体运动的距离公式:

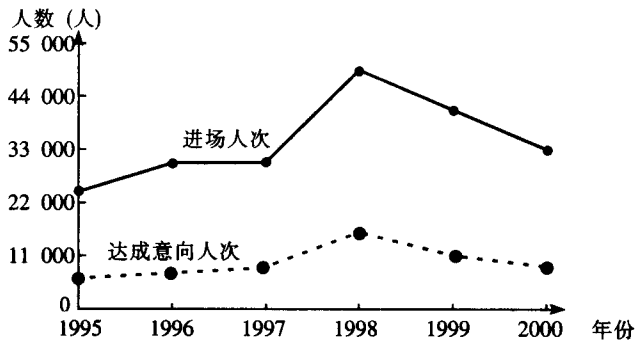


图 1.1.2

$$S = \frac{1}{2}gt^2, \quad g \text{ 为常数}$$

(2) **成本函数** (cost function):  $C(x) = C_0 + C_1(x)$ , 其中  $C_0$  为固定成本;  $C_1(x)$  为可变成本;  $x$  为生产量.

**收入函数** (revenue function):  $R(x) = px$ , 其中  $p$  为价格;  $x$  为销售量.

**利润函数** (profit function):  $L(x) = R(x) - C(x)$ .

通过这些公式可以精确地反映出变量之间的依存关系并能计算出相应的数值. 例如, 若某产品的成本函数为  $C(x) = 20 + 5x$ , 我们就可以知道它的固定成本为 20 元, 与产量无关 ( $x=0$ ); 生产 5 件产品时 ( $x=5$ ) 的可变成本为 25 元, 总成本为 45 元.

上面的几个例子虽然反映的事物不一样, 表现的形式也不尽相同, 但是它们都有一个共同的规律: 在变化过程中有两个变量, 当其中的一个变量取定某一特定值时, 另一变量按照一定的规律就有惟一确定的数值与之对应. 对于这种规律的研究, 历史上的不同时期以及不同的人都有过不同的描述. 下面我们用映射 (mapping) 的观点给出定义. 见图 1.1.3.

**定义 1.1.1** 设有两个非空的集合 (set)  $D_f$  和  $R$ , 其中  $D_f \subseteq R$ ,  $R$  是实数集. 称映射  $f: D_f \rightarrow R$  为  $D_f$  到  $R$  的函数, 通常记作  $y = f(x)$ , 并称  $y$  是  $x$  的函数, 其中  $x \in D_f$  称为自变量 (independent variable);

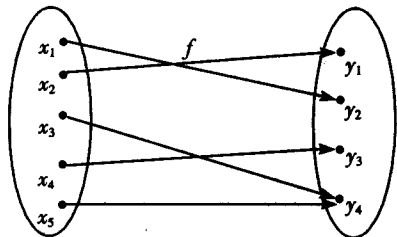


图 1.1.3

$y(\in R)$ 称为因变量(dependent variable);  $f$ 称为对应法则(corresponding rule).  $D_f$ 称为函数  $f$  的定义域(domain); 集合  $Z_f = \{f(x) | x \in D_f\}$ 称为函数  $f$  的值域(range), 且  $Z_f \subseteq R$ .

显然, 上面那些例子中变量之间的关系均为函数关系.

注 “函数”一词是德国数学家莱布尼兹(1646—1716年)于1692年首先提出的. 在我国, 清代数学家李善兰(1811—1882年)于1859年在《代数学》一书中首次将“function”译作“函数”. 函数符号  $f(x)$ 由瑞士数学家欧拉于1724年首次使用. 它既简洁、科学, 又符合语言规律, 对数学的发展有着深远的影响.

函数中的两个要素是定义域  $D_f$  和对应法则  $f$ . 定义域是我们所讨论问题的范围和前提, 在研究某一函数时, 首先要把定义域搞清楚. 一般来讲, 函数的定义域由所讨论问题的实际背景、性质和使函数表达式有意义等方面来决定. 对应法则  $f$  是因变量  $y$  与自变量  $x$  依存关系的一种具体反映, 它是函数中的灵魂. 有了法则  $f$ , 就便于进行计算、预测和控制等一系列工作. 许多问题的核心任务就是为了认识和探求变量之间存在的这种对应法则  $f$ . 如果两个函数的定义域和对应法则相同, 那么这两个函数就是相同的函数, 不管它们是用什么字母表示, 也不管它们是以什么形式出现.

注 函数的定义域和值域必须是非空的集合, 否则集合中没有元素, 就不可能构成映射, 函数也就不存在了. 另外, 我们讨论的函数, 是指对自变量的任一数值只有惟一的函数值与之对应. 这类函数称为单值函数. 对于不满足这一条件的对应规律, 例如  $y^2 = 2x$ , 对于  $x=2$  就有两个  $y$  值:  $-2$ 和  $2$ (称为多值函数), 习惯上将其分解成两个单值函数  $y = \sqrt{2x}$ 和  $y = -\sqrt{2x}$ 分别进行讨论.

函数的表达形式一般有三种: 表格法、图像法和公式法. 这三种表示法各有优缺点: 表格法一目了然; 图像法形象直观; 公式法便于计算和推导. 在条件允许的情况下, 常将这三种方法结合起来使用, 更便于对问题的认识、分析和解决. 在生活中我们要注意观察事物, 要善于将变量之间的关系用函数来表示和处理.

例 1.1.4 某学生的家距离学校2.5公里, 早晨7:30从家里骑自行车出发去上学, 8:00上课. 试问下列图中哪几个图像与下述四件事吻合最好, 并将剩下的那件事用图形表达出来( $t$ 为时间,  $S$ 为离开家的距



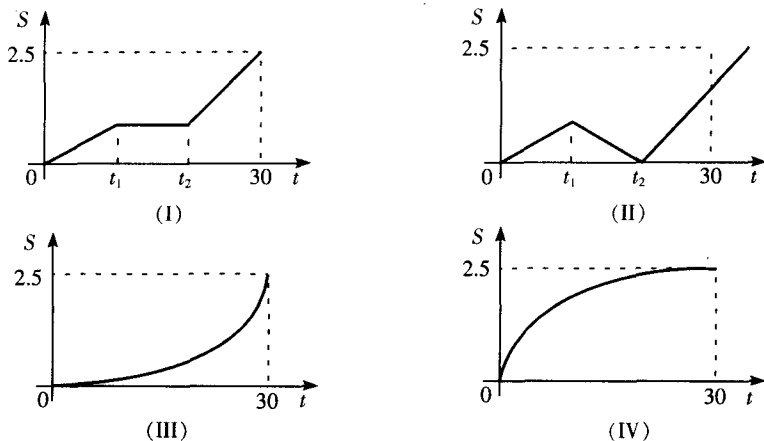


图 1.1.4

离)。

(1)离开家后不久,自行车坏了,修好后再继续走,准时到达学校。

(2)离开家后不久,发现忘带语文课本,立即回家取了语文课本再去上学,结果迟到了。

(3)离家后想早点到学校便快速行驶,半路上遇到同学后边聊天边走,准时到达学校。

(4)离家后不久出了车祸,到附近的医院治疗后回家了。

**解** 由事件的分析和图形的特点可以看出,事件(1)与图(I)对应, $t_1$ 到 $t_2$ 是修车的时间,距离没有变化.事件(2)与图(II)对应, $t_1$ 到 $t_2$ 是回家的时间,到达学校的时间超过了30分钟.事件(3)与图(IV)对应,曲线开始很陡峭,后来平缓,说明开始时速度快,后来速度慢了下来.事件(4)的图形可以见图1.1.5.

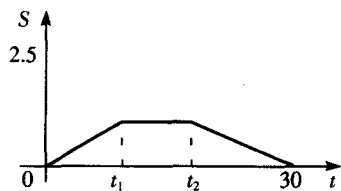


图 1.1.5

是否可以图形(III)写一段类似的过程描述?

**例 1.1.5** 求函数  $f(x) = \frac{\lg(3-x)}{\sin x} + \sqrt{5+4x-x^2}$  的定义域.

**解** 要使  $f(x)$  有意义,显然  $x$  要满足: