NSFC

信息科学系列

国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

多维系统的稳定性分析

肖 扬 著

INformation

上海科学技术出版社

国家自然科学基金研究专著
NATIONAL NATURAL SCIENCE FOUNDATION OF CHINA

多维系统的稳定性分析

肖 扬 著

上海科学技术出版社

内容提要

本书是阐述多维系统稳定性分析的专著，内容以作者主持的两项国家自然科学基金课题：动态多维离散系统的鲁棒稳定性研究和时变多维离散系统的理论与应用研究中所取得的最新成果为主。书中给出了一维与 M 维系统的稳定性与鲁棒稳定性的检验理论与算法等，涉及该领域内多项国际研究的前沿课题。

本书可供高等院校与科研院所从事系统设计与系统分析的教师、科研人员和研究生等参考，也可供控制系统与信息处理系统分析及企业设计部门的工程技术人员使用。本书中的全部定理的算法均以软件实现，可满足读者实际应用的需要。

图书在版编目（CIP）数据

多维系统的稳定性分析／肖扬编著．—上海：上海科学技术出版社，2003.8
（国家自然科学基金研究专著）
ISBN 7－5323－7021－6

Ⅰ．多…　Ⅱ．肖…　Ⅲ．自动控制系统—稳定性—分析　Ⅳ．TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 021935 号

责任编辑　静晓英　张　晨

上海科学技术出版社出版发行
（上海瑞金二路 450 号　邮政编码 200020）
上海新华印刷有限公司印刷　新华书店上海发行所经销
2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
开本 787×1092　1/16　印张 14　插页 4　字数 330 000
印数 1—1 200　定价：30.00 元

前　　言

在系统控制与系统实现中,诸多问题涉及鲁棒稳定性问题。鲁棒稳定性分析是系统的鲁棒控制的前提。在已知系统参数的动态范围的情况下,对系统的有限子集进行镇定,进而实现对整个系统的镇定,无疑具有重要的实际意义。然而,现有的稳定性分析方面的专著多集中于以常微(差)分方程组为系统方程经典的稳定性理论,即一维系统稳定性理论,而未有专著专门论述多维系统的稳定性与鲁棒稳定性分析问题。就一维系统而言,也有许多问题未有专著予以讨论,如区间矩阵与多胞形矩阵鲁棒稳定的充分必要条件等。

本书系国内外第一部研究多维系统稳定性和鲁棒稳定性的专著,以作者及其合作者在国家自然科学基金课题中所取得的最新成果为主,系统地给出了一维与 M 维系统的稳定性与鲁棒稳定性检验理论与算法,其内容涉及多个控制理论与电路系统领域的稳定性研究的前沿问题。本书还用了少量的篇幅介绍了一维动态系统分析的基础理论与进展,使全书的内容不至脱节,具有一定的连贯性。

1979 年,美国威斯康星大学 Barmish 教授将俄国学者 Kharitonov 的端点检验定理介绍给西方控制理论界的学者后,系统控制理论有了突飞猛进的进展。Kharitonov 的端点检验定理的重要意义在于:只检验四个端点多项式,便可确定整个区间多项式的 Hurwitz 稳定性,这不仅极大地简化了系统的稳定性分析,也使原来非常复杂和困难的系统镇定变得简单。1979 年以来,为数众多的文章研究了 Kharitonov 的端点检验定理的应用与推广,同时也研究了 Kharitonov 的端点检验定理的局限性。本书第 7 章介绍了 Kharitonov 的端点检验定理及其推广。

Kharitonov 的端点检验定理只能用于区间多项式的 Hurwitz 稳定性的判别,它要求系统是连续时间的,而且系统的特征多项式的系数是相互独立的。而实际问题是:系统有可能是离散时间的,系统的特征多项式的系数是非独立的,存在某种仿射关系,如多胞形多项式。1988 年,Bartlett,Hollot 与黄琳提出的棱边检验定理解决了多胞形多项式的稳定性检验问题。棱边检验定理更具有一般性,它可用于多胞形多项式的 Hurwitz 稳定性和 Schur 稳定性的检验,及区间多项式的 Schur 稳定性的检验。本书第 8 章介绍了 Bartlett 等提出的棱边检验定理及其推广。

Kharitonov 提出的端点检验定理和 Bartlett,Hollot 与黄琳提出的棱边检验定理能否推广到不确定矩阵与不确定矩阵多项式的鲁棒稳定性判定?这是我们的国家自然科学基金课题的研究结果,即本书第 6 章和第 9 章所要回答的问题。这两章给出了区间矩阵鲁棒稳定的充分必要条件、多胞形矩阵鲁棒稳定的充分必要条件、区间矩阵多项式的 Hurwitz 与 Schur 鲁棒稳定的充分条件。第 9 章给出的区间矩阵与多胞形矩阵鲁棒稳定的充分必要条件提供了一种二维面检验算法,无需对整个不确定矩阵簇的参数空间进行检验。这一结果使线性不确定连续系统与线性不确定离散系统的稳定性分析与镇定大为简化。

Kharitonov 的端点检验定理和 Bartlett 等的棱边定理能否推广到不确定多维多项式的稳

定性判定？在多维情况下端点检验定理和棱边定理应具有何种形式？如何证明？这是作者及其合作者的研究结果及本专著第 13 章至第 15 章所要回答的问题。在多维系统稳定性理论研究方面，1988 年，Kim 和 Bose 将 Kharitonov 的端点检验定理推广到二维，解决了钻石形两变量多项式簇的 Hurwitz 稳定性的判别问题。1994 年，Polyak 和 Shmulyian 基于 Kharitonov 的端点检验定理的结果，提出了不确定两变量多项式簇的稳定性的频域判据。然而，与不确定单变量多项式的诸多成果相比，多维系统的鲁棒稳定性检验有许多问题仍有待解决，包括前面提到的问题。

从 1997 年起，在国家自然科学基金的资助下，作者及其合作者对多维系统的鲁棒稳定性的多方面的问题与一维系统的鲁棒稳定性的公开问题进行了深入的研究，取得了一系列成果。基于这些成果，第 13 章至第 15 章系统地给出下列内容：区间二维多项式和多胞形二维多项式 Schur 鲁棒稳定的充分条件与充分必要条件；区间二维多项式和多胞形二维多项式 Hurwitz 鲁棒稳定的充分必要条件。第 5 章与第 18 章给出了时变离散系统、有限状态变系数离散系统与空变多维离散系统的稳定性检验方面的理论与算法。国内外对二维连续-离散系统的研究不多，第 16 章给出了二维连续-离散系统的稳定性与鲁棒稳定性理论与检验定理。时滞系统稳定性检验是一无限维问题，第 17 章给出了时滞系统稳定性检验的二维代数方法。多维离散系统模型复杂，涉及多维偏差分方程、多维 z 变换和多维 z 变换傅里叶变换，第 19 章给出了多维离散系统的机助分析方法。

多维系统的稳定性与鲁棒稳定性问题非常复杂，某些稳定性判据只适用于某种特殊情况，不具有一般性，因此本书试图针对各类问题给出相应的稳定性分析方法，各章内容具有相对的独立性。本书对部分检验定理提供了证明，而非仅简单地介绍结果，其目的在于研究解决问题的方法。掌握了这些方法后，类似的问题有可能触类旁通，得以解决。

本书主要读者对象为高等院校与科研院所从事系统设计与系统分析的教师、科研人员和研究生等，本书可同时作为控制系统与信息处理系统分析方面的专业参考书。由于本书提供了各类系统的稳定性分析的基本理论与算法，对许多工程上的系统稳定性的实际问题可以分析，所以本书亦适合于企业设计部门的工程技术人员使用。本书中的全部定理的算法均以软件实现，可满足读者实际应用的需要。

感谢国家自然科学基金、国家自然科学专著出版基金的资助与上海科学技术出版社张晨编辑和静晓英编辑为本书出版所做的大量工作。

肖　扬

2002 年 5 月 17 日

目　　录

第 1 章　一维线性时不变系统

一维线性时不变系统具有如下特征:①系统的状态变量为连续时间或离散时间的一维函数;②系统具有线性特性;③可用线性微分方程组或差分方程组描述;④系统的参数为时不变的。

一维线性时不变系统按时间的连续或离散性可分为一维线性时不变连续系统与一维线性时不变离散系统两大类。一维线性时不变系统的这些特征在多维空不变系统上有些得到保留,而有些则发生变化[1]。多维空不变系统的特征为:①系统的状态变量为连续空间或离散空间的多维函数;②系统具有线性特性;③需用线性偏微分方程组或偏差分方程组描述;④系统的参数为空间不变的。

一维线性时不变系统的许多重要特性是研究和分析多维空不变系统特性的基础,有助于理解和掌握更为复杂的多维系统理论与方法。本章研究一维线性时不变连续系统与一维线性时不变离散系统的渐近稳定性、输入输出稳定性、可控制性、可观测性等动态特性。

§1.1　一维线性时不变连续系统的渐近稳定性

许多系统可简化为一维线性时不变连续系统。一维线性时不变连续系统的系统方程表示为状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{1.1b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(t)=[x_1,\cdots,x_N]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 N 维状态向量,$\boldsymbol{u}(t)=[u_1,\cdots,u_M]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 M 维输入向量,$\boldsymbol{y}(t)=[y_1,\cdots,y_K]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 K 维输出向量,N 为系统的阶次,$\boldsymbol{A}$ 为 $N\times N$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $N\times M$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $K\times N$ 矩阵,$\boldsymbol{D}$ 为 $K\times M$ 矩阵。

在系统方程(1.1)中,尽管状态变量在状态变量空间是 N 维的,但由于它是时间 t 的一维函数,式(1.1a)是常微分方程组,所以系统(1.1)是一维的。在后续章节将遇到的多维系统[1],其状态变量是多变量 $t_1,\cdots,t_N$ 的 N 维函数,多维系统方程是偏微(差)分方程组。

定义 1.1　如果系统(1.1)的零输入解 $\boldsymbol{x}(t)$满足下列条件

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) = 0 \tag{1.2}$$

则一维线性时不变连续系统(1.1)是渐近稳定的。

若一个系统为渐近稳定的,则当系统的输入信号撤掉后,此时系统为自治的,经若干时间后,系统能自动恢复到零状态。输入信号为零的系统被称为零输入系统或自治系统,输入信号不为零的系统为受迫系统。对于线性系统(1.1)来说,其系统矩阵的特征根分布情况决定系统的渐近稳定性。

定理 1.1　当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根全部在左半开平面,系统(1.1)的零输入解是渐近稳定的。

证明 系统(1.1)的零输入通解可用指数矩阵表示[1]为

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) = \exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]\boldsymbol{x}_0 \tag{1.3}$$

令 $\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准型矩阵,则存在变换矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$,$\boldsymbol{T}^{-1}$为 $\boldsymbol{T}$ 的逆矩阵,$\boldsymbol{J}$ 具有的形式为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_N \end{bmatrix}$$

其中每一若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的形式为

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

这里 λ_i 是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的特征根。若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶次等于λ_i 的重数。利用下式展开

$$\exp(\boldsymbol{A}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{k!} \tag{1.4}$$

得到

$$\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)] = \boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.5}$$

其中

$$\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)] = \begin{bmatrix} \exp[\boldsymbol{J}_1(t-t_0)] & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \exp[\boldsymbol{J}_2(t-t_0)] & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \exp[\boldsymbol{J}_N(t-t_0)] \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

及

$$\exp[\boldsymbol{J}_i(t-t_0)] = \begin{bmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}\exp[\lambda_i(t-t_0)] \tag{1.7}$$

这里 r 是若尔当块$\boldsymbol{J}_i$ 的阶次。因此,式(1.1)系统的零输入通解为

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) = \boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{1.8}$$

由式(1.6)和式(1.7),显然对于 $t \geqslant t_0$,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根具有负的实部是 $\|\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\|$ 一致有界的充分必要条件,$\|\cdot\|$ 为·的范数,并且

$$\lim_{t\to\infty}\|\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]\| = 0 \tag{1.9}$$

如果 $\mathrm{Re}\lambda_i<0$,则对任意整数 n,有

$$\lim_{t\to\infty}t^n\exp(\lambda_i t) = 0 \tag{1.10}$$

由式(1.10)可见,指数矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$的零点的有界性和收敛性对于系统(1.1)的零输

入解的渐近稳定性是充分的,因为

$$\| \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) \| \leqslant \| \boldsymbol{T} \| \cdot \| \exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)] \| \cdot \| \boldsymbol{T}^{-1} \| \cdot \| \boldsymbol{x}_0 \|$$

指数矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$的零点的有界性和收敛性对于系统(1.1)的零输入解的渐近稳定性也是必要的,采用反证法证明必要性:

假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根具有非负的实部,则当 $t\to\infty$ 时,矩阵 $\exp[\boldsymbol{J}(t-t_0)]$不收敛于零,因此 $\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$不收敛于零,这意味着矩阵 $\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$至少有一个元素不收敛于零。设该元素为 b_{ij},$\exp[\boldsymbol{A}(t-t_0)]$的第 i 行 j 列的元素。取初始状态为向量 $\boldsymbol{y}_0$,由式(1.5)得

$$\| \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0) \| \geqslant | b_{ij} | \tag{1.11}$$

当 $t\to\infty$ 时,式(1.11)中的 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0)$并不收敛于零状态,所以这一零输入解不是渐近稳定的,从而系统的零输入解不是渐近稳定的,但这与题设矛盾。证毕。▌

§1.2 一维线性时不变连续系统的可控性和观测性

当系统(1.1)的输入信号向量 $\boldsymbol{u}(t)$不为零时,系统为受迫系统,系统的状态与输入信号有关,可用指数矩阵表示为

$$\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,0) = \exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.12}$$

因为系统(1.1)是时不变的,不失一般性,总可设 $t_0=0$。式(1.12)中的第一项为自治系统对初始扰动的状态(零输入响应),第二项为当受迫系统处于平衡状态时对施加的输入信号的状态(受迫响应)。

定义 1.2 如果系统(1.1)对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 都存在控制信号 $\boldsymbol{u}(t)$,使系统在有限时间内到达指定的状态 $\boldsymbol{x}_1$,则称系统为可控的。

定理 1.2 系统(1.1)为可控的,当且仅当下列矩阵的阶次为 N。

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB},\cdots,\boldsymbol{A}^{N-1}\boldsymbol{B}] \tag{1.13}$$

证明 必要性:设系统(1.1)是可控的,对于任意初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,存在一个控制信号 $\boldsymbol{u}(t)$,$0\leqslant t\leqslant T$,使 $\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$。代入式(1.12),得到

$$\boldsymbol{0} = \exp[\boldsymbol{A}(T)]\left(\boldsymbol{x}_0 + \int_0^T \exp[\boldsymbol{A}(-\tau)]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau\right) \tag{1.14}$$

由西尔维斯特公式,有

$$\exp(\boldsymbol{A}(-\tau)) = \sum_{k=0}^{N-1}\exp(\lambda_k\tau)\prod_{j=0,j\neq k}^{N-1}\frac{\boldsymbol{A}-\lambda_j\boldsymbol{I}}{\lambda_k-\lambda_j} \tag{1.15}$$

其中 λ_k 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。式(1.15)可写成

$$\exp(\boldsymbol{A}(-\tau)) = \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{A}^k r_k(\tau) \tag{1.16}$$

关于 $r_k(\tau)$的计算见附录,将式(1.16)代入式(1.14)并化简,得到

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^T \sum_{k=0}^{N-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}r_k(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.17}$$

如果 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的阶次小于 N,则存在一个非零向量 $\boldsymbol{q}$,使得 $\boldsymbol{qM}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$,即

$$qB = 0,\ qAB = 0,\ \cdots,\ qA^{N-1}B = 0$$

代入式(1.17),得到 $qx_0 \equiv 0$,但 x_0 为任意的,所以 $q = 0$ 与 q 是非零向量矛盾。

充分性:设 $M(A,B)$的阶次为 N,要证对于任意初始状态 x_0,存在一个控制信号 $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$,使 $x(T) = x_1 = 0$,即满足式(1.14)。在式(1.14)中用 τ 代替 $-\tau$,得到

$$x_0 = \int_0^T \exp[A\tau]Bu(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.18}$$

为简化讨论,设 A 的 N 个特征根 λ_k, $k = 1,\cdots,N$,是不重合的,因为 $\exp(\lambda_k t)$, $k = 1,\cdots,N$,是线性独立的,以 $\exp(\lambda_k t)$的积分为矩阵 M 的第 i 行 j 列元素

$$m_{ij} = \int_0^T \exp(\lambda_i \tau)\exp(\lambda_j^* \tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.19}$$

则矩阵 M 是对称正定的,因此,M 是非奇异的。那么,存在一个函数 $r_k(\tau)$,使对任意非负整数 k,有

$$\lambda_i^k = \int_0^T \exp(\lambda_i \tau) r_k(\tau)\mathrm{d}\tau, \quad i = 1,\cdots,N \tag{1.20}$$

设

$$r_k(\tau) = \sum_{i=1}^N d_i \exp(\lambda_i \tau) \tag{1.21}$$

代入式(1.20),得到

$$\lambda_i^k = \sum_{j=1}^N d_j^* m_{ij} \tag{1.22}$$

或表示为矩阵

$$[\lambda_1^k,\cdots,\lambda_N^k] = [d_j^*,\cdots,d_j^*]M^{\mathrm{T}}$$

因为 M 是非奇异的,d_i, $i = 1,\cdots,N$,是唯一和确定的,由式(1.21),$r_k(\tau)$也是唯一和确定的。因为

$$\exp(A\tau) = \sum_{i=0}^N \exp(\lambda_i \tau)Z_i, \quad A^k = \sum_{i=0}^N \lambda_i^k Z_i \tag{1.23}$$

其中 Z_i 是由 A 确定的一个 $N \times N$ 矩阵。设 e_j 为 I_N 的第 j 列,由式(1.21)和式(1.23)得

$$A^k B e_j = \int_0^T \exp[A\tau]Br_k^*(\tau)e_j\mathrm{d}\tau = \int_0^T \exp[A\tau]Bu_{kj}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.24}$$

而 $A^k B e_j$ 为 $A^k B$ 的第 j 列,所以 $M(A,B)$至少包括一个独立的列的线性组合,使 x_0 表示为这组基的线性组合。那么式(1.18)中所要求的 $u(\tau)$,可用式(1.24)中的 $u_{kj}(\tau)$的线性组合表示。证毕。▌

如果利用 A 的 N 个特征根 λ_i, $i = 1,\cdots,N$,则下述定理的检验要相对容易些。

定理 1.3 矩阵 $M(A,B) = [B, AB, \cdots, A^{N-1}B]$的阶次为 N 的充分必要条件是

$$\mathrm{rank}[\lambda_k I - A, B] = N, \quad k = 1,2,\cdots,N \tag{1.25}$$

证明 设存在某特征根 λ_k,使 $\mathrm{rank}[\lambda_k I - A, B] < N$,这意味着存在一个非零行向量 q,使得 $q[\lambda_k I - A, B] = 0$,即 $qA = \lambda_k q$, $qB = 0$,证明 q 是 λ_k 的左特征向量。因此,

$$qA^j B = \lambda_k^j qB = 0, \quad j = 1,\cdots,N-1 \tag{1.26}$$

所以

$$qB = 0,\ qAB = 0,\ \cdots,\ qA^{N-1}B = 0 \tag{1.27}$$

由于 q 是非零行向量,式(1.27)意味着 $M(A,B)$的阶次小于 N。

反之,设 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$的阶次小于 N,这意味着存在一个非零行向量 $\boldsymbol{q}$,使得式(1.26)成立。因为 $\boldsymbol{B}$ 不恒为零,式(1.27)意味着矩阵中的行是 $\boldsymbol{q},\boldsymbol{qA},\cdots,\boldsymbol{qA}^{N-1}\boldsymbol{B}$,矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的阶次小于N。这样可以定义另一非零列向量 $\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{p}=[p_1,\cdots,p_N]$使 $\boldsymbol{pC}=\boldsymbol{0}$,即

$$\boldsymbol{q}[p_1\boldsymbol{I}+p_2\boldsymbol{A}+\cdots+p_N\boldsymbol{A}^{N-1}]=\boldsymbol{0} \tag{1.28}$$

在式(1.28)中,令

$$p(\boldsymbol{A})=p_1\boldsymbol{I}+p_2\boldsymbol{A}+\cdots+p_N\boldsymbol{A}^{N-1}$$

因为 $p(\boldsymbol{A})$的特征根是 $\lambda_k,k=1,\cdots,N$,至少存在一个 λ_k,使 $p(\lambda_k)=0$,所以可以写出

$$p(\lambda)=f(\lambda)(\lambda-\lambda_k)=0 \tag{1.29}$$

其中 $f(\lambda)=f_1+f_2\lambda+\cdots+f_{N-1}\lambda^{N-2}$。将用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 代替式(1.29)中的 λ,再乘以向量 $\boldsymbol{q}$,代入得到

$$\boldsymbol{q}p(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{q}f(\boldsymbol{A})(\lambda_k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0} \tag{1.30}$$

其中 $f(\boldsymbol{A})=f_1\boldsymbol{I}+f_2\boldsymbol{A}+\cdots+f_{N-1}\boldsymbol{A}^{N-2}$,$\boldsymbol{q}p(\boldsymbol{A})\neq\boldsymbol{0}$。式(1.30)意味着

$$\boldsymbol{q}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=f_1\boldsymbol{qB}+f_2\boldsymbol{qAB}+\cdots+f_{N-1}\boldsymbol{qA}^{N-2}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0} \tag{1.31}$$

根据(1.27)式,(1.31)式意味着

$$\boldsymbol{q}f(\boldsymbol{A})[\lambda_k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{0} \tag{1.32}$$

由于式(1.30)中 $\boldsymbol{q}p(\boldsymbol{A})\neq\boldsymbol{0}$,所以式(1.32)意味着 $\mathrm{rank}[\lambda_k\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]<N$。证毕。▌

定义 1.3 如果由系统(1.1)在有限时间$(0,T)$内输入输出信息足以确定系统的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,则称系统为可观测的。

定理 1.4 系统(1.1)为可观测的,当且仅当下列矩阵的阶次为 N,

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{CA}\\ \vdots\\ \boldsymbol{CA}^{N-1}\end{bmatrix} \tag{1.33}$$

定理 1.4 的证明可参考定理 1.2 证明。

在系统的监测中,我们需要确定给定的系统是否可观测,利用定理 1.4 可完成这一工作。

§1.3 一维线性时不变连续系统的输入输出稳定性

定理 1.5 如果系统(1.1)是渐近稳定的,则该系统也是输入输出稳定的。

证明 系统(1.1)的零输入解的渐近稳定性意味着 $\boldsymbol{A}$ 的特征根全部在左半开平面,因此存在一个正实数 a 和 k 使

$$\|\exp[\boldsymbol{A}t]\|\leqslant K\exp(-at),\quad t\geqslant 0 \tag{1.34}$$

由式(1.1b)和式(1.12)得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{y}\|&\leqslant\|\boldsymbol{Cx}\|+\|\boldsymbol{Du}\|\leqslant\|\boldsymbol{Du}\|+\|\boldsymbol{C}\exp[\boldsymbol{A}(t)]\boldsymbol{x}_0\|\\&\quad+\|\boldsymbol{C}\|\int_0^t\|\exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]\boldsymbol{Bu}(\tau)\|\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\|\boldsymbol{D}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\|+K\|\boldsymbol{C}\|\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|+\|\boldsymbol{C}\|\cdot\|\boldsymbol{B}\|\cdot\|\boldsymbol{u}\|\frac{K}{a},\quad t\geqslant 0\end{aligned}$$

证毕。▌

定理 1.6 如果系统(1.1)为不可约的,即同时为可控的和可观测的,则系统的输入输出稳定性意味着系统的渐近稳定性。

证明 (1) 令 $\boldsymbol{R}(t)=\boldsymbol{C}\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{B}$,需要证明:如果系统为输入输出稳定的,则当 $t\to\infty$ 时,

$$\|\boldsymbol{R}(t)\|\to 0 \tag{1.35}$$

采用反证法证明:因为 $\boldsymbol{R}(t)$ 的任意元素 $r_{ij}(t)$ 的形式为 $\sum_k c_k t^n \exp(a_k t)$, 其中 a_k 和 c_k 为复常数。如果式(1.35)不成立,则至少存在一个元素 $r_{ij}(t)$,当 $t\to\infty$ 时,

$$\int_0^t |r_{ij}(t)|\,\mathrm{d}t\to\infty$$

令 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ 和 $t_0=0$,利用欧几里得范数,有不等式

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\|\geqslant|(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})_i|\geqslant\sum_{n=1}^{N}\int_0^t r_{in}(t-\tau)\boldsymbol{u}_n(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.36}$$

这里 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})_i$ 表示向量 $(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u})$ 的第 i 个元素。对于给定的时间 t,取 $\boldsymbol{u}_n(\tau)=\mathrm{sgn}[r_{in}(t-\tau)]$,这里

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

对任意时间,系统的输入都是有界的,则系统的输出满足

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\|\geqslant\int_0^t|r_{in}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \tag{1.37}$$

如果时间 t 取得足够大,由式(1.37),则 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}\|$ 可大于任意指定的常数。所以,除非式(1.35)成立,系统(1.1)不是输入输出稳定的。

(2) 需要证明:当 $t\to\infty$ 时,

$$\|\boldsymbol{R}(t)\|\to 0 \tag{1.38}$$

则如果系统(1.1)为不可约的,当 $t\to\infty$ 时,$\|\exp[\boldsymbol{A}t]\|\to 0$。

因为 $\boldsymbol{R}(t)$ 是 t 的正整数次幂的指数函数,式(1.38)意味着当 $t\to\infty$ 时,矩阵 $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}[\boldsymbol{R}(t)]$ 的任意元素趋于零。

因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\exp[\boldsymbol{A}t]$ 是可交换的,所以当 $t\to\infty$ 时,

$$\|\boldsymbol{M}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\|\to 0 \tag{1.39}$$

式(1.39)中的矩阵包含子矩阵

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^i\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{A}^j\boldsymbol{B}=\frac{\mathrm{d}^{i+j}}{\mathrm{d}t^{i+j}}[\boldsymbol{R}(t)],\quad i,j=0,1,\cdots,N-1$$

因为系统(1.1)为不可约的,所以 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的阶次为 N。如果 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的非奇异的方形子矩阵,则 $\boldsymbol{P}\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{Q}$ 是 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{C},\boldsymbol{A})\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的子矩阵。由

$$\|\exp(\boldsymbol{A}t)\|\leqslant\|\boldsymbol{P}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{P}\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{Q}\|\cdot\|\boldsymbol{Q}^{-1}\|$$

和式(1.39)得到:当 $t\to\infty$ 时,$\|\exp[\boldsymbol{A}t]\|\to 0$。所以系统(1.1)是渐近稳定的。证毕。▌

由式(1.12)很容易证明下述定理。

定理 1.7 如果系统(1.1)的输入为零时是渐近稳定的,并且当 $t\to\infty$ 时,系统输入 $\boldsymbol{u}(t)$

趋于零,则当 $t\to\infty$ 时,对所有初始状态 $\boldsymbol{x}_0$,系统输出 $\boldsymbol{y}(t)$ 亦趋于零。

§1.4 一维线性时不变离散系统的渐近稳定性

类似于连续系统(1.1),线性时不变离散系统的系统方程为

$$\boldsymbol{x}(n+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \tag{1.40a}$$

$$\boldsymbol{y}(n)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n) \tag{1.40b}$$

其中 $\boldsymbol{x}(n)=[x_1,\cdots,x_N]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 N 维状态向量,N 为系统的阶次,$\boldsymbol{u}(n)=[u_1,\cdots,u_M]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 M 维输入向量,$\boldsymbol{y}(n)=[y_1,\cdots,y_K]^{\mathrm{T}}$ 为系统的 K 维输出向量,$\boldsymbol{A}$ 为 $N\times N$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $N\times M$ 矩阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $K\times N$ 矩阵,$\boldsymbol{D}$ 为 $K\times M$ 矩阵。

定义 1.4 如果系统(1.40)的零输入解 $\boldsymbol{x}(n)$ 满足下列条件,

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)=0 \tag{1.41}$$

则称时不变离散系统(1.40)是渐近稳定的。

类似于连续系统,一个离散系统为渐近稳定的,则当系统的输入信号撤掉后,此时系统为自治的,经若干时间后,系统能自动恢复到零状态。我们称输入信号是零的系统为零输入系统或自治系统,输入信号不是零的系统为受迫系统。同样,对于线性离散系统(1.40)来说,其系统矩阵的特征根分布情况决定系统的渐近稳定性。

定理 1.8 当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根全部在单位开圆盘内,系统(1.40)的零输入解是渐近稳定的。

证明 系统(1.40)的零输入通解可用指数矩阵表示[1]

$$\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)=\boldsymbol{A}^{n-n_0}\boldsymbol{x}_0 \tag{1.42}$$

令 $\boldsymbol{J}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准型,则

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

具有

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & \boldsymbol{0} & \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_N\end{bmatrix}$$

其中每一若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的形式为

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & \boldsymbol{0} & \ddots & 1\\ & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

这里 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶次等于 λ_i 的重数,得到

$$\boldsymbol{A}^{n-n_0}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{n-n_0}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{1.43}$$

其中

$$\boldsymbol{J}^{n-n_0}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1^{n-n_0} & & & \\ & \boldsymbol{J}_2^{n-n_0} & \boldsymbol{0} & \\ \boldsymbol{0} & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_N^{n-n_0}\end{bmatrix} \tag{1.44a}$$

及

$$J_i^{n-n_0}=\begin{bmatrix}1 & n & \frac{n^2}{2!} & \cdots & \frac{n^{r-1}}{(r-1)!}\\ 0 & 1 & n & \cdots & \frac{n^{r-2}}{(r-2)!}\\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 1\end{bmatrix}\lambda_i^{n-n_0} \tag{1.44b}$$

这里 r 是若尔当块 $\boldsymbol{J}_i$ 的阶次。因此，系统(1.40)的零输入通解为

$$\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{J}^{n-n_0}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{1.45}$$

由式(1.44)，显然对于 $n\geqslant n_0$，$\boldsymbol{A}$ 的特征根小于 1 是 $\|\boldsymbol{J}^{n-n_0}\|$ 一致有界的充分和必要条件，并且

$$\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{J}^{n-n_0}\|=0 \tag{1.46}$$

如果 $|\lambda|<1$，则对任意整数 n_0，

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^{n-n_0}=0 \tag{1.47}$$

由式(1.47)可见，矩阵 $\boldsymbol{J}^{n-n_0}$ 的零点的有界性和收敛性对于系统(1.40)的零输入解的渐近稳定性是充分的，因为 $\|\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)\|\leqslant\|\boldsymbol{T}\|\cdot\|\boldsymbol{J}^{n-n_0}\|\cdot\|\boldsymbol{T}^{-1}\|\cdot\|\boldsymbol{x}_0\|$。

矩阵 $\boldsymbol{J}^{n-n_0}$ 的零点的有界性和收敛性对于系统(1.40)的零输入解的渐近稳定性也是必要的，采用反证法证明必要性：

假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根大于 1，则当 $n\to\infty$ 时，矩阵 $\boldsymbol{J}^{n-n_0}$ 不收敛于零，因此 $\boldsymbol{A}^{n-n_0}$ 不收敛于零，这意味着矩阵 $\boldsymbol{A}^{n-n_0}$ 至少有一个元素不收敛于零。设该元素为 b_{ij}，即 $\boldsymbol{J}^{n-n_0}$ 的第 i 行 j 列的元素。取初始状态为向量 $\boldsymbol{x}_0$，由式(1.43)，得

$$\|\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)\|\geqslant|b_{ij}| \tag{1.48}$$

当 $n\to\infty$ 时，式(1.48)中的 $\boldsymbol{x}(n,\boldsymbol{x}_0,n_0)$ 并不收敛于零状态，所以这一零输入解不是渐近稳定的，从而系统的零输入解不是渐近稳定的，但这与题设矛盾。证毕。▌

§1.5 一维线性时不变离散系统的输入输出稳定性

当离散系统(1.40)的输入信号 $\boldsymbol{u}(n)$ 不为零时，系统为受迫系统，系统的状态与输入信号有关，可表示为

$$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{A}^{n-n_0}\boldsymbol{x}(0)+\sum_{i=n_0}^{n-1}\boldsymbol{A}^{n-i-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i) \tag{1.49}$$

式(1.49)中的第一项为自治系统对初始扰动的状态(零输入响应)，第二项为当受迫系统处于平衡状态时对施加的输入信号的状态(受迫响应)。

定理 1.9 如果系统(1.40)的输入为零时是渐近稳定的，则系统(1.40)受迫时是输入输出稳定的。

证明 如果 $c_3=|\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})|$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征根的幅度，则存在一个正数 c_4 使

$$\|\boldsymbol{A}^n\|\leqslant c_4c_3^n \tag{1.50}$$

因为系统(1.50)的输入为零时是渐近稳定的，所以式(1.50)中 $c_3<1$。由式(1.49)和式