2005年高考总复习首选品牌书

GAOKAOBIAOZHUNQUANJIE

高考方略

王后雄

高考标准诠解

·学生用书·

总主编：王后雄
主　编：马春华
潘龙星

数学

赠送
黄冈高考1轮单元测试
内部卷

湖南大学出版社

高考标准解

2005高考版

依据教育部最新《考试说明》学科标准 编写

王后雄 高考标准诠解

WANG HOU XIONG GAO KAO BIAO ZHUN QUAN JIE

数学

学生用书

■总主编 王后雄

■主 编 马春华

潘龙星

一轮总复习

湖南大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

王后雄高考标准诠解·数学/王后雄主编;马春华,
潘龙星分册主编.—长沙:湖南大学出版社,2004.5
ISBN 7-81053-766-0
Ⅰ.王... Ⅱ.①王... ②马... ③潘...
Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 042469 号

王后雄高考标准诠解·数学

本册主编 **马春华 潘龙星**

□责任编辑 严小涛
□特约编辑 何 晋
□封面设计 李治国
□出版发行 湖南大学出版社
社址 长沙市岳麓山 邮码 410082
电话 0731-8821691 0731-8821594
□经 销 湖南省新华书店
□印 装 长沙鸿发印务实业有限公司

□开本 880×1230 16 开 □印张 17.5 □字数 743 千
□版次 2004 年 5 月第 1 版 □2004 年 5 月第 1 次印刷
□书号 ISBN 7-81053-766-0/G·204
□定价 26.00 元

《高考标准诠解》

——应对2005年高考的秘诀

2005年高考是在2004年分省(市)试点命题改革的基础上,进一步对高考进行大胆改革的一年。在教育部的统一要求下,高考应该怎么考,应该怎样命题,学生应该怎么学,特别是在实施新课程教材后应该如何进行复习备考和命题是当前基础教育研究的重要课题。有鉴于此,本套丛书编者将引领广大教师和学生按照考试标准要求,科学规划复习内容,合理设计训练模式,跟踪高考命题热点及趋势,整体提高高考成绩。

导读提示 本套丛书四大特色栏目及使用指南图示如下:

纲 考试说明诠释 标准依据

解题思路+答题要点

以最新《考试说明》为依据,系统归纳备考点的分考点,诠释高考答题要点和关键,引导学生掌握学科的解题规律。

本部分是对高考知识点和能力点的梳理和整合,归类科学,脉络清晰。与该栏目为友,可以使您系统掌握高考的答题要点和解题思路,快速实现能力转化,消除复习备考死角。

备

释 名题归类例释 标准思路

名师教你解剖考题

以近年来各类高考试题、统考模拟名题为对象,分类精析。通过诠释典型例题对高考"怎么考"做了全新的判断。

本部分透过试题表面,破译高考试题的形式规则,规范解题标准模式,有利于提高应试能力。与该栏目为友,您可以直接透视高考题型,把握高考命题走向,找准备考复习捷径。

考

真 五年高考透视 标准解密

看看以前是怎么考的……

备考实践表明,高考试题最有训练价值,特别是近5年全国、上海、春季等试题对训练考生应试心理十分有用。

本部分纵析近5年的高考命题,透视高考命题标准和答题标准,帮助您熟悉高考题型及难度。与该栏目为友,可使您高屋建瓴,减少临场失误和临场心理压力,提高临场应试技能。

方

预 高考命题预测 标准演练

今年高考这么考……

模拟高考样式,预测2005年高考命题格局,突出一个"新"字;科学捕捉高考新信息,着眼于一个"准"字。对高考命题趋向的分析精辟且深有见地。

本部分集黄冈名师多年备考经验及大型考试命题研究,试题原创率达90%以上。与该栏目为友,可使您站在备考前沿,训练高效,成绩卓越。

略

收获是甜蜜的,但收获前的耕耘却是苦涩的;金榜题名固然灿烂,但金榜题名前却凝结了十年寒窗的艰辛。愿我们在《高考标准诠解》的引领下,按黄冈名师缔造的标准复习模式和标准备战方略要求,走出泥泞,心向六月,春暖花开。

——掀开《高考标准诠解》,成就教育的未来!

2004.6

2005

高考标准诠解——数学

CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

2005

高考标准诠解——数学

第一章 集合与简易逻辑

考试说明扫描

考试内容：

集合、子集、补集、交集、并集.

逻辑联结词、四种命题、充要条件.

考试要求：

(1)理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号，并会用它们正确表示一些简单的集合.

(2)理解逻辑联结词"或"、"且"、"非"的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充要条件的意义.

第1讲 集合的概念与运算

纲 考试说明诠释 标准依据 解题思路+答题要点

一、集合有关概念

①一组确定对象的全体形成一个集合，它具有三大特性：确定性、互异性、无顺序性.

②元素与集合之间是属于关系，用$\in$或$\notin$表示；集合与集合之间是包含关系，用$\subsetneqq$、$\subseteq$表示.

③若 $x\in A\Rightarrow x\in B$，则 $A\subseteq B$，且$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$.

若 $A\subseteq B$，且存在 $x_0\in B$ 但 $x_0\notin A$，则 $A\subsetneqq B$.若 $A\neq\varnothing$，$\varnothing\subsetneqq A$.若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

二、集合的表示法

①列举法：将集合中的元素一一列举出来.

②描述法：将集合中的元素的共同属性表示出来.

③有的集合还可用韦恩图表示.

④常见的数集表示符号如下：

N表示自然数集，$\mathbf{N}^+$表示正整数集，**Z**表示整数集，**Q**表示有理数集，**R**表示实数集，**C**表示复数集，有时用$\mathbf{Q}^+$表示正有理数集，$\mathbf{R}^-$表示负实数集.$\varnothing$表示不含任何元素的集合，叫做空集.

三、集合之间的包含关系和交、并、补的运算

①子集：若 $x\in A$，则 $x\in B$，则 $A\subseteq B$，$A\subseteq B$包含：$A=\varnothing$，$A\subsetneqq B$，$A=B$三种情形，对于含有n个元素的集合的子集个数为2^n.

②交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$，即由$A$与$B$中的公共元素组成的集合.$A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，若$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$.

③并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$，即由$A$与$B$中的所有元素组成的集合.$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B$，$A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B$.若$A\cup B=A$，则$B\subseteq A$.

④补集：设I为全集，$A\subseteq I$，则 $C_IA=\{x\mid x\in I且x\notin A\}$，即所有全集中$A$以外的元素组成的集合.$A\cup C_IA=I$，$A\cap C_IA=\varnothing$，$C_I(C_IA)=A$，$C_II=\varnothing$.

四、集合运算中常用结论

(1)$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB)$

$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB)$

(2)$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$；$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$.

(3)由n个元素所组成的集合，其子集个数为2^n个，即是$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$.

(4)空集是任何集合的子集，即$\varnothing\subseteq A$，这个结论在解决集合问题时容易忽略.

结论(1)、(2)常常是作为"等价转化"的依据，如若已知$A\cap B=A$，则$A\subseteq B$.

结论(3)是集合与组合数的综合运用的结果，用以计算集合子集的个数.

五、集合问题的解决应注意的几个问题

(1)对于集合问题，要确定属于哪一类集合(数集、点集或某类图形)，然后再确定处理此类问题的方法.

(2)关于集合的运算，一般应把各参与运算的集合化到最简形式，再进行运算.

(3)含参数的集合问题，多根据集合的互异性处理，有时需要用到分类讨论、数形结合的思想.

(4)集合问题多与函数、方程、不等式有关，要注意各类知识的融会贯通.

释 名题归类例释 标准思路 名师教你解剖考题

题型1：集合的相关概念

【例1】 (2004·武汉)设集合 $A=\{(2n+1)\pi\mid n\in z\}$，集合 $B=\{(4k\pm1)\pi\mid k\in z\}$，则(　　).

A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\neq B$

【解析】 集合A表示π的奇数倍的全体.在集合B中，$4k\pm1$是一个奇数，而任一个奇数若不能表示成$4k+1$的形式，则必能表示成$4k-1$的形式.

【答案】 C

【点拨】 本题还可以借助坐标系，因为A、B均表示终边与x轴的负半轴重合的角的全体.

题型 2：集合的表示法

【例 2】 (2004·成都)设 $M=\{y\mid y=2^x,x\in R\}$，$N=\{y\mid y=x^2,x\in R\}$，则(　　).

A. $M\cap N=\{(2,4)\}$　　B. $M\cap N=\{(2,4),(4,16)\}$

C. $M=N$　　D. $M\subsetneqq N$

【解析】 集合 M 表示函数 $y=2^x$ 的集值域，

$\therefore$ $M=(0,+\infty)$，而集合 N 表示函数 $y=x^2$ 的值域，

$\therefore$ $N=[0,+\infty)$，显然 $M\subsetneqq N$.

【答案】 D

【点拨】 此题很容易误认为 $M\cap N$ 是方程组 $\begin{cases}y=2x\\y=x^2\end{cases}$ 的交点.这是对集合的表示形式认识不清.将数集与点集混淆而造成的错误.

题型 3：集合的运算

【例 3】 (2004·海淀)已知 $A=\{x\mid x^2\geqslant 9\}$，

$$B=\left\{x\left|\frac{x-7}{x+1}\leqslant 0\right.\right\},C=\{x\mid |x-2|<4\}.$$

(1)求 $A\cap B$ 及 $A\cup C$； (2)若 $U=\mathbf{R}$，求 $A\cap C_U(B\cap C)$.

【解析】 先将 A、B、C 化简，然后根据交集、并集、补集的定义求解.

由 $x^2\geqslant 9$ 得 $x\geqslant 3$，或 $x\leqslant -3$，

$\therefore$ $A=\{x\mid x\geqslant 3$，或 $x\leqslant -3\}$.

又由不等式 $\frac{x-7}{x+1}\leqslant 0$，得 $-1<x\leqslant 7$，

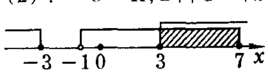
$\therefore$ $B=\{x\mid -1<x\leqslant 7\}$.

又由 $|x-2|<4$，得 $-2<x<6$，$\therefore$ $C=\{x\mid -2<x<6\}$.

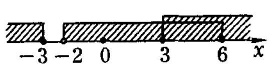
(1) $A\cap B=\{x\mid 3\leqslant x\leqslant 7\}$，如图(甲)所示；

$A\cup C=\{x\mid x\leqslant -3$，或 $x>-2\}$，如图(乙)所示.

(2) $\because$ $U=\mathbf{R}$，$B\cap C=\{x\mid -1<x<6\}$，



(甲)



(乙)

$\therefore$ $C_U(B\cap C)=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 6\}$，

$\therefore$ $A\cap C_U(B\cap C)=\{x\mid x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 6\}$.

【点拨】 数轴是解决数集问题的有效工具，它体现了数形结合的思想方法，简捷、直观.但在运用时，要特别关注边界值的取舍.

题型 4：集合与方程、不等式的联系

【例 4】 (2004·湖南)已知 $A=\{x\mid x^2+(P+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，$A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$，求 P 的取值范围是______

【解析】 一元二次方程 $x^2+(P+2)x+1=0$ 的根有三种情况：无实根，有相等实根，有不等实根.

A 有三种情况，应分三种情况讨论.

(1)当 $A=\varnothing$ 时，$A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$，

此时，$\Delta=(P+2)^2-4<0$，解得 $-4<P<0$.

(2)当 A 只有一个元素时，由 $A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$ 知这个元素不属于 $\mathbf{R}^*$，

此时，$\begin{cases}\Delta=(P+2)^2-4=0\\-(P+2)<0\end{cases}$

解得 $P=0$；

(3)当 A 有两个元素时，由 $A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$ 知两个元素不属于 $\mathbf{R}^*$.

此时，$\begin{cases}\Delta=(P+2)^2-4>0\\-(P+2)<0\end{cases}$　解得 $P>0$；

综合(1)、(2)、(3)得：$P>-4$.

【答案】 >-4

【点拨】 $A\cap\mathbf{R}^*=\varnothing$，容易理解方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 的两根为非正，而忽视了 $A=\varnothing$ 的可能.

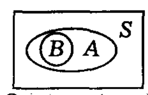
题型 5：“数形结合”思想在集合中的应用

【例 5】 (2004·山东)设 S 为全集，$B\subseteq A\subseteq S$，则下列结论中不正确的是(　　).

A. $C_SA\subseteq C_SB$　　B. $A\cap B=B$

C. $A\cap(C_SB)=\varnothing$　　D. $(C_SA)\cap B=\varnothing$

【解析】 由题意画出韦恩图如下：



显然，$C_SA\subseteq C_SB$，$A\cap B=B$，$(C_SA)\cap B=\varnothing$ 都是正确的.

【答案】 C

【点拨】 一般抽象集合问题往往借助于韦恩图求解，而数集之间的运算常用数轴直观显示.点集刻画出满足条件的点构成的图形进行求解.

真 五年高考透视 标准解密

看看以前是怎么考的……

1. (2004·安徽春)已知向量集合

$M=\{a\mid a=(1,2)+\lambda(3,4),\lambda\in\mathbf{R}\}$

$N=\{a\mid a=(-2,-2)+\lambda(4,5),\lambda\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$(　　).

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(1,1),(-2,-2)\}$

C. $\{(-2,-2)\}$　　D. ϕ

2. (2000·上海)若集合 $S=\{y\mid y=3^x,x\in\mathbf{Z}\}$，$T=\{y=x^2-1,x\in\mathbf{Z}\}$，则 $S\cap T$ 是(　　).

A. S　　B. T　　C. $\varnothing$　　D. 有限集

3. (2000·广东)已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，那么 A 的真子集的个数是(　　).

A. 15　　B. 16　　C. 3　　D. 4

4. (2000·全国)设集合 $M=\{x\mid x=\frac{k}{2}+\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，

$N=\{x\mid x=\frac{k}{4}+\frac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则(　　).

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$　　C. $M\supseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

5. (2002·北京)满足条件 $M\cup\{1\}=\{1,2,3\}$ 的集合 M 的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. (2003·北京)设集合 $A=\{x\mid x^2-1>0\}$，$B=\{x\mid \log_2x>0\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　).

A. $\{x\mid x>1\}$　　B. $\{x\mid x>0\}$

C. $\{x\mid x<-1\}$　　D. $\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$

7. (2000·上海春)集合 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$，$B=$

$\{(x,y)\mid(x-3)^2+(y-4)^2=r^2\}$,其中 $r>0$,若 $A\cap B$ 中有且仅有一个元素,则 r 的值是______.

8.(2000·上海)设集合 $A=\{x\mid 2\lg x=\lg(8x-15)\ x\in\mathbf{R}\}$, $B=\left\{x\left|\cos\frac{x}{2}>0,x\in\mathbf{R}\right.\right\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为______个.

9.(2002·上海春)若全集 $I=\mathbf{R}$,$f(x)$、$g(x)$均为 x 的二次函数,$P=\{x\mid f(x)<0\}$,$Q=\{x\mid g(x)\geqslant 0\}$,则不等式组 $\begin{cases}f(x)<0\\g(x)<0\end{cases}$ 的解集可用 P、Q 表示为______.

10.(2003·上海)设集合 $A=\{x\mid |x|<4\}$,$B=\{x\mid x^2-4x+3>0\}$,则集合 $\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin A\cap B\}=$______.

11.(1999·上海)设集合 $A=\{x\mid |x-a|<2\}$,$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$.若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

12.(2000·上海春)已知 $\mathbf{R}$ 为全集,$A=\left\{x\left|\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqslant-2\right.\right\}$,$B=\left\{x\left|\frac{5}{x+2}\geqslant 1\right.\right\}$,求 $C_{\mathbf{R}}A\cap B$.

预 高考命题预测 标准演练 今年高考这么考……

【预测1】 满足条件 $\varnothing\subsetneqq M\subsetneqq\{0,1,2\}$ 的集合共有( ).

A.3个 B.6个 C.7个 D.8个

【预测2】 集合 $M=\{(x,y)\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)\mid x=1,y\in\mathbf{R}\}$,则 $M\cap N$ 的元素个数是( ).

A.0个 B.1个 C.0个或1个 D.无数个

【预测3】 已知集合 $M=\{a,0\}$,$N=\{x\mid 2x^2-5x<0,x\in z\}$,若 $M\cap N\neq\varnothing$,则 a 等于( ).

A.1 B.2 C.1或2 D.1或$\frac{5}{2}$

【预测4】 $M=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$N=\{x\mid ax-1=0\}$.若 $M\cap N=M$,则实数 a 组成的集合中元素的个数为( ).

A.1个 B.2个 C.3个 D.不确定

【预测5】 $I=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$,$A=\left\{(x,y)\left|\frac{y-3}{x-2}=1\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid y=x+1\}$,则$(C_IA)\cap B=$( ).

A.I B.$\varnothing$ C.$\{(2,3)\}$ D.B

【预测6】 定义 $A-B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$,若 $A=\{2,4,6,8,10\}$,$B=\{1,4,8\}$,则 $A-B$ 等于( ).

A.$\{4,8\}$ B.$\{1,2,6,10\}$ C.$\{1\}$ D.$\{2,6,10\}$

【预测7】 已知集合 $A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+2\}$,$B=\{x\mid 3<x<5\}$,则能使 $A\supseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围是______.

【预测8】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-5x+4>0\}$,$B=\{x\mid |x-3|<4\}$,则 $A\cap B=$______.

【预测9】 已知集合 $A=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases},\theta\in[0,\pi]\right.\right\}$,$B=\{(x,y)\mid y=kx+k+1\}$,若 $A\cap B$ 含有两个元素,则 $k\in$______.

【预测10】 含有三个实数的集合可表示为 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$,也可以表示为 $\{a^2,a+b,0\}$,则 $a^{2003}+b^{2004}$ 的值为______.

【预测11】 设全集 $I=\mathbf{R}$,集合 $A=\{x\mid x^2-2x>0\}$,集合 $B=\{x\mid x^2-ax-b<0\}$,集合 $C=\{x\mid x^3+x^2+x=0\}$,且 $A\cap B=\{x\mid 2<x<4\}$,$(C_IA)\cap(C_IB)=C$,求 a、b 的值.

【预测12】 向50名学生调查对 A、B 两事件的态度,赞成 A 的人数是全体人数的五分之三,赞成 B 的比赞成 A 的多3人,其余的不赞成,另外,对 A、B 都不赞成的学生比对 A、B 都赞成的学生的三分之一多1人.问:对 A、B 都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

【预测13】 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-6<0\}$,集合 $B=\{x\mid x^2+2x-8>0\}$,集合 $C=\{x\mid x^2-4ax+3a^2<0\}$,若 $C\supseteq A\cap B$,试确定实数 a 的取值范围.

【预测14】 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2+mx-1\}$,$B=\{(x,y)\mid x+y=3,0\leqslant x\leqslant 3\}$.若 $A\cap B$ 为单元素集,求实数 m 的取值范围.

第2讲 含绝对值的不等式与一元二次不等式解法

纲 考试说明诠释 标准依据 解题思路+答题要点

一、绝对值的意义和含绝对值不等式解法

1. 绝对值的意义.

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

其几何意义是数轴上的点 $A(a)$离开原点 O 的距离 $|OA|=|a|$,它是去掉绝对值符号的"原始"依据,对于形如:$|x-a|+|x-b|>m$ 或 $|x-a|+|x-b|<m$(m 是正数)等含有多个绝对值符号的不等式,利用"零点分段"法(即个绝对值的意义)或实数绝对值的几何意义求解较为方便.

所谓"零点分段法"是指:设数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是分别使含有 $|x-x_1|,|x-x_2|,\cdots,|x-x_n|$ 的代数式中相应的一个绝对值为零,称 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为相应绝对值的零点,零点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 将数轴分为 $n+1$ 段,利用绝对值的意义化去绝对值符号,从而得到代数式在各段上的简化式,从而化为不含绝对值的不等式组来解.这种方法就叫做"零点分段法",通常适用于含有两个及其以上的绝对值符号的不等式.

2. 含有绝对值不等式的解法.

解绝对值不等式的关键在于去掉绝对值的符号,为此可利用:(1)定义法;(2)零点分段法;(3)不等式两端均为非负实数时,不等式两端平方;(4)图像法或"形数结合"思想;(5)不等式的同解变形原理.即

①$|x|<a$, $(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$;

②$|x|>a$, $(a>0)\Leftrightarrow x>a$ 或 $x<-a$;

③$|ax+b|<c$, $(c>0)\Leftrightarrow -c<ax+b<c$;

④$|ax+b|>c$, $(c>0)\Leftrightarrow ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$;

⑤$a\leqslant|x|\leqslant b$, $(b>a>0)\Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$ 或 $-b\leqslant x\leqslant -a$.

二、一元二次不等式的解法

1. 一元二次不等式经过变形,可以化成如下两种形式之一.

(1) $ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)(a>0)$;

(2) $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)(a>0)$.

我们称其为一元二次不等式的标准形式.

2. 二次函数、一元二次方程、一元二次不等式的联系.

从函数的观点来看,一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$的解集,就是二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$在 x 轴上方部分的点的横坐标 x 的集合.

因此,利用二次函数的图像就可以解一元二次不等式,具体关系读者可对比总结.

解一元二次不等式时,首先检查二次项系数.若 $a>0$,则利用总结结论;若 $a<0$,须将二次项系数化为正值,即不等式两边同乘 -1,此时,不等号方向改变.

3. **通常在解一元二次不等式时,应注意利用不等式的性质将二次项系数化为正数,注意含字母根的大小的判定与讨论.**

三、解含绝对值不等式的思想方法

解绝对值不等式常采用"零点分段法"、"定义法"、"两边平方法"、"数形结合"思想、"等价转化"思想、"分类讨论"思想等,其目的是将绝对值不等式转化为"熟知"的不含绝对值的不等式进行求解,即"化生为熟"、"化繁为简",体现"化归思想"的利用.

四、解一元二次不等式步骤的注意事项

1. 解一元二次不等式的步骤.

①将不等式化为标准形式:

$ax^2+bx+c>0(\geqslant 0)(a>0)$或 $ax^2+bx+c<0(\leqslant 0)(a>0)$

②解方程 $ax^2+bx+c=0$;

③据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像写出二次不等式的解集.

2. 关于一元二次不等式问题的注意事项.

注意二次函数、一元二次方程、一元二次不等式、二次三项式间的相互联系

$ax^2+bx+c(a\neq 0)$是二次三项式.把 x 当做自变量,a,b,c 为常量,则 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是二次函数.令 $y=0$,则 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$是一元二次方程.若 $\Delta=b^2-4ac>0$,则方程的两个根 x_1,x_2 就是函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的图像与 x 轴相交的两个交点的横坐标.

令 $y>0$(或 $y<0$),则 $ax^2+bx+c>0$(或 <0)是一元二次不等式.若 $a>0,\Delta>0$,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是 $(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)(x_1<x_2)$,即当 $x<x_1$,或 $x>x_2$ 时,$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像在 x 轴的上方;

若 $a<0,\Delta>0$,则不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集是$(x_1,x_2)(x_1<x_2)$,即当 $x_1<x<x_2$ 时,$y=ax^2+bx+c(a<0)$的图像在 x 轴的上方.

3. 可化为一元二次不等式的一元分式不等式.

(1)任何一个一元有理分式不等式,经过移项、通分和化简,都可以化成标准形式:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0\text{ 或 }\frac{P(x)}{Q(x)}<0$$

(其中 $P(x)$,$Q(x)$都表示 x 的某一整式)

然后按照商的符号法则转化成不等式组求解.

(2)解一元分式不等式的步骤如下:

①化简;②化为标准形式;③分组;④求各组解;⑤确定原不等式的解.

五、两类不等式解法规律总结

(1)解关于绝对值的不等式,关键是理解绝对值的意义,掌握其基本类型.

(2)解绝对值不等式有时要利用数形结合,利用绝对值的几何意义,结合数轴解决.

(3)解一元二次不等式时,应当考虑相应的二次方程,根据二次项系数的符号确定不等式解集的形式,当然还要考虑相应的二次方程根的大小.

(4)二次不等式的解集有两种特殊情况,即$\varnothing$和 $\mathbf{R}$,对其中的各种情况应理解.

(5)当二次项系数含有参数时,不能忽略二次项系数为零的情形.

(6)解简单的分式不等式要注意首先要将不等式一边化为0,一边分解因式,然后再转化为整式不等式去解.

释 名题归类例释 标准思路 名师教你解剖考题

题型1:含绝对值不等式的解法

【例1】 (2003·北京春)不等式$\left|1+x+\frac{x^2}{2}\right|<1$的解集是(　　).

A. $\{x|-1<x<0\}$　　B. $\left\{x\left|-\frac{3}{2}<x<0\right.\right\}$

C. $\left\{x\left|-\frac{5}{4}<x<0\right.\right\}$　　D. $\{x|-2<x<0\}$

【解析】 $\left|1+x+\frac{x^2}{2}\right|<1\Leftrightarrow -1<1+x+\frac{x^2}{2}<1$,

又 $1+x+\frac{x^2}{2}>0$ 恒成立　$\therefore$　$x+\frac{x^2}{2}<0$,

$\therefore$　$-2<x<0$.

【答案】 D

【点拨】 本题利用$|x|<a(a>0)$等价于 $-a<x<a$ 进行求解.

【例2】 (2002·东城)解不等式$|2x+1|+|x-2|>4$.

【解析】 去掉绝对值符号是解题的指导思想,分段讨论是基本方法.

(1)当 $2x+1<0$ 即 $x<-\frac{1}{2}$时.原不等式变形为:

$-2x-1+2-x>4$ 即 $x<-1$,　$\therefore$　$x<-1$;

(2)当 $-\frac{1}{2}\leqslant x<2$ 时,原不等式变形为:

$2x+1+2-x>4$　即　$x>1$,　$\therefore$　$1<x<2$;

(3)当 $x \geqslant 2$ 时,原不等式变形为:

$2x+1+x-2>4$ 即 $x>\frac{5}{3}$, $\therefore$ $x \geqslant 2$;

综合(1)(2)(3)可得 $x<-1$ 或 $x>1$.

故原不等式的解集为 $\{x \mid x<-1$ 或 $x>1\}$.

【点拨】 本题采用"零点分段法"去掉绝对值符号.如何去掉绝对值是解含绝对值不等式的关键.

题型 2: 一元二次不等式的解法

【例 3】 (2004·黄冈)解下列不等式:

(1) $-1<x^2+2x-1 \leqslant 2$;

(2) $\frac{x^2-2x+1}{x-1} \geqslant 0$.

【解析】 (1)转化成不等式组求解,即原不等式等价于

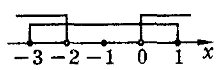
$$\begin{cases}x^2+2x-1>-1\\ x^2+2x-1\leqslant 2\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x^2+2x>0 & ①\\ x^2+2x-3\leqslant 0 & ②\end{cases}$$

由①得 $x(x+2)>0$,

所以 $x<-2$ 或 $x>0$;

由②得 $(x+3)(x-1) \leqslant 0$,

所以 $-3 \leqslant x \leqslant 1$.



将①、②解集在数轴上表示出来(如图).

$\therefore$ 原不等式解集为 $\{x \mid -3 \leqslant x<-2$ 或 $0<x \leqslant 1\}$.

(2)可以根据实数运算的符号法则,化为不等式组求解;也可采用标根分区间求解.

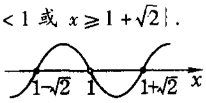
解法一 原不等式同解于:

$$(\mathrm{I})\begin{cases}x^2-2x-1\geqslant 0,\\ x-1>0.\end{cases} \quad 或(\mathrm{II})\begin{cases}x^2-2x-1\leqslant 0,\\ x-1<0.\end{cases}$$

解(Ⅰ)得: $x \geqslant 1+\sqrt{2}$, 解(Ⅱ)得: $1-\sqrt{2} \leqslant x<1$.

所以原不等式解集是: $\{x \mid 1-\sqrt{2} \leqslant x<1$ 或 $x \geqslant 1+\sqrt{2}\}$.

解法二 将分式中分子分母的根: $1-\sqrt{2}$、1、$1+\sqrt{2}$ 依次标在数轴上,如右图所示,所以原不等式解集是: $\{x \mid -\sqrt{2} \leqslant x<1$ 或 $x \geqslant 1+\sqrt{2}\}$.



【点拨】 ①利用转化的思想及数轴可以准确地找出不等式的解集;②通常对于高次(或可化为高次)不等式采用标根分区间法较为简便.用此法要注意对偶次幂因式的处理.

题型 3: 用分类讨论思想解含参的不等式

【例 4】 (2003·北京)解关于 x 的不等式:

$$ax^2-2 \geqslant 2x-ax(a \in \mathbf{R}).$$

【解析】 由于不等式中最高次幂系数为 a,$(a \in k)$,因而它可能为零,也可能大于零或小于零.因此,对 a 进行交分类讨论.

原不等式变形为 $ax^2+(a-2)x-2 \geqslant 0$,

① $a=0$ 时, $x \leqslant -1$;

② $a \neq 0$ 时,不等式即为 $(ax-2)(x+1) \geqslant 0$,

当 $a>0$ 时, $x \geqslant \frac{2}{a}$ 或 $x \leqslant -1$,由于 $\frac{2}{a}-(-1)=\frac{a+2}{a}$.

于是,当 $-2<a<0$ 时, $\frac{2}{a} \leqslant x \leqslant -1$,

当 $a=-2$ 时, $x=-1$,当 $a<-2$ 时, $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{a}$,

综上所述, $a=0$ 时, $x \leqslant -1$; $a>0$ 时, $x \geqslant \frac{2}{a}$ 或 $x \leqslant -1$;

$-2<a<0$ 时, $\frac{2}{a} \leqslant x \leqslant -1$; $a=-2$ 时, $x=-1$;

$a<-2$ 时, $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{a}$.

【点拨】 对于含字母参数的不等式要分类讨论解决,分类时要掌握好分类标准,做到不重不漏,对特殊的情况要单独考虑.

题型 4: 一元二次不等式、一元二次函数、一元二次方程之间的关系

【例 5】 (2003·黄冈)已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid \alpha<x<\beta, \alpha \in \mathbf{R}^+\}$,求不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集.

【解析】 已知一元二次不等式的解集,求二次三项式的系数,先判定系数的符号,再利用根与系数的关系即可求出.

方法一 $\because$ 原不等式的解为 $\alpha<x<\beta$, $\therefore$ $a<0$.

由韦达定理,得 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha \cdot \beta=\frac{c}{a}$,对 $cx^2+bx+a<0$ 两边同除以 a,得 $\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$.

$\therefore$ $\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)x+1>0$ 即 $(\alpha x-1)(\beta x-1)>0$.

又 $\beta>\alpha>0$, $\therefore$ $\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha}$.

故 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为 $\left\{x \,\middle|\, x<\frac{1}{\beta} 或 x>\frac{1}{\alpha}\right\}$,

方法二 $\because$ $a<0$,

$\therefore$ $x=0$ 是 $cx^2+bx+a<0$ 的一个解.

当 $x \neq 0$ 时 $x^2>0$,对不等式 $cx^2+bx+a<0$ 两边同除以 x^2 得:

$$a \cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2+b \cdot \frac{1}{x}+c<0 \qquad (*)$$

$\because$ $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $\{x \mid \alpha<x<\beta\}$,

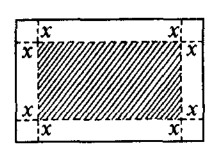
$\therefore$ $(*)$的解为 $\frac{1}{x}>\beta$ 或 $\frac{1}{x}<\alpha$.

即 $x<\frac{1}{\beta}$ 或 $x>\frac{1}{\alpha}$,解集为 $\left\{x \mid x<\frac{1}{\beta} 或 x>\frac{1}{\alpha}\right\}$.

【点拨】 对于一元二次不等式的问题往往转化为一元二次方程处理.有些问题转化为一元二次函数,利用二次函数的图像求解.

题型 5: 二次函数的应用

【例 6】 (2004·江西)要在长为 800 m、宽为 600 m 的一块长方形地面上进行绿化,要求四周种花卉(花卉带的宽度相等),中间种草坪(如图),阴影部分种草坪,要求草坪的面积不少于总面积的一半,求花卉带宽度的范围.



【解析】 正确理解题意,分析图中各元素之间的关系,构造二次函数模型求解.设花卉带宽度为 x m,则

$$(800-2x)(600-2x) \geqslant \frac{1}{2} \times 800 \times 600$$

即 $4x^2-1400 \times 2x+\frac{1}{2} \times 800 \times 600 \geqslant 0$,

$$x^2-700x+600 \times 100 \geqslant 0,$$

$$(x-600)(x-100) \geqslant 0$$

解之得 $0<x \leqslant 100$ 或 $x \geqslant 600$.

$x \geq 600$ 不符合题意,舍去.

故所求花卉宽度范围为 $0 < x \leq 100$.

【点拨】 解应用题的关键在于合理建构数学模型,但最终结果还应回到实际问题中去.

真 五年高考透视 标准解密 看看以前是怎么考的……

1.(2003·北京春)若不等式 $|ax+2|<6$ 的解集为 $(-1,2)$,则实数 a 等于(　　).

A.8　　B.2　　C.-4　　D.-8

2.(2002·京、皖春)不等组 $\begin{cases} x^2-1<0 \\ x^2-3x<0 \end{cases}$ 的解集是(　　).

A.$\{x|-1<x<1\}$　　B.$\{x|0<x<3\}$

C.$\{x|0<x<1\}$　　D.$\{x|-1<x<3\}$

3.(2004·安徽春)不等式 $|2x^2-1|\leq 1$ 的解集为(　　).

A.$[-1,1]$　　B.$[-2,2]$　　C.$[0,2]$　　D.$[-2,0]$

4.(2003·上海春)已知集合 $A=\{x\in R||x|\leq 2\}$,$B=\{x|x\geq a\}$,且 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是______.

5.(1999·上海)设集合 $A=\{x||x-a|<2\}$,$B=\left\{x\left|\frac{2x-1}{x+2}<1\right.\right\}$.若 $A\subseteq B$,求实数 a 的取值范围.

6.(2003·上海春)解不等式组 $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ \frac{x+3}{x-1}>2 \end{cases}$.

预 高考命题预测 标准演练 今年高考这么考……

【预测1】 设 $a>0$,不等式 $|ax+b|<c$ 的解集是 $\{x|-2<x<1\}$,则 $a:b:c$ 是(　　).

A.1:2:3　　B.2:1:3　　C.3:1:2　　D.3:2:1

【预测2】 不等式 $|x|\cdot(1-2x)>0$ 的解集是(　　).

A.$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　　B.$(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$

C.$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D.$\left(0,\frac{1}{2}\right)$

【预测3】 不等式 $|x^2-10|\leq 3x$ 的解集为(　　).

A.$\{x|2\leq x\leq\sqrt{10}\}$　　B.$\{x|2\leq x\leq 5\}$

C.$\{x|-2\leq x\leq 5\}$　　D.$\{x|\sqrt{10}\leq x\leq 5\}$

【预测4】 若不等式 $ax^2+bx+1>0$ 的解集为 $\{x|-\frac{1}{2}<x<1\}$,则(　　).

A.$a=2,b=-1$　　B.$a=2,b=1$

C.$a=-2,b=-1$　　D.$a=-2,b=1$

【预测5】 集合 $A=\{x||x-3|<5\}$,$B=\{x|x<a\}$,且 $A\subseteq B$,则 a 的取值范围是(　　).

A.$a\geq -5$　　B.$a>-5$　　C.$a>8$　　D.$a\geq 8$

【预测6】 已知三个不等式 $x^2-4x+3<0$ ①,$x^2-6x+8<0$ ②,$2x^2-9x+m<0$ ③,要使同时满足①和②的所有 x 的值都满足③,则实数 m 的取值范围是(　　).

A.$m>9$　　B.$m=9$　　C.$m\leq 9$　　D.$0<m\leq 9$

【预测7】 不等式 $x^2-ax-b<0$ 的解集是 $2<x<3$,则不等式 $bx^2-ax-1>0$ 的解集为______.

【预测8】 不等式 $|x+1|(2x-1)\geq 0$ 的解集为______.

【预测9】 若不等式 $|x-4|+|3-x|<a$ 的解集是空集,则实数 a 的取值范围是______.

【预测10】 不等式 $1<|3-2x|<5$ 的解集是______.

【预测11】 解关于 x 的不等式 $\frac{ax-2}{x+1}>0$ $(a\in\mathbf{R})$.

【预测12】 若关于 x 的不等式 $mx^2-(2m+1)x+(m-1)\geq 0$ 的解集非空,求 m 的取值范围.

【预测13】 已知函数 $f(x)=ax^2+(b-8)x-a-ab$,当 $x\in(-3,2)$ 时,$f(x)>0$;当 $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$ 时,$f(x)<0$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内的值域;

(2)c 为何值,$ax^2+bx+c\leq 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

【预测14】 某工厂生产商品 A,每件售价 80 元,每年产销 80 万件,工厂为了开发新产品,经过市场调查,决定提出商品 A 的销售金额的 $p\%$ 作为新产品开发费(即每销售 100 元提出 p 元)并将商品 A 的年产销量减少 $10p$ 万件,问:

(1)若工厂提出的新产品开发费不少于 96 万元,求 p 的取值范围;

(2)若工厂仅考虑每年提出最高的开发费,求此时 p 的值.

第3讲　简易逻辑

纲 考试说明诠释 标准依据 解题思路+答题要点

一、逻辑联结词

1. 命题:可以判断真假的语句叫做命题.

2. 逻辑联结词:"或"、"且"、"非"这些词叫做逻辑联结词.

或:两个简单命题至少一个成立;

且:两个简单命题都成立;

非:对一个命题的否定.

3. 简单命题与复合命题:不含逻辑联结词的命题叫简单命题;由简单命题和逻辑联结词构成的命题叫做复合命题.

4. 真值表:表示命题真假的表叫做真值表.

复合命题的真假可通过下面的真值表来加以判定:

p	q	非 p	p 或 q	p 且 q
真	真	假	真	真
真	假	假	真	假
假	真	真	真	假
假	假	真	假	假

二、四种命题

1. 四种命题.

一般地,用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论,用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定.于是四种命题的形式为:

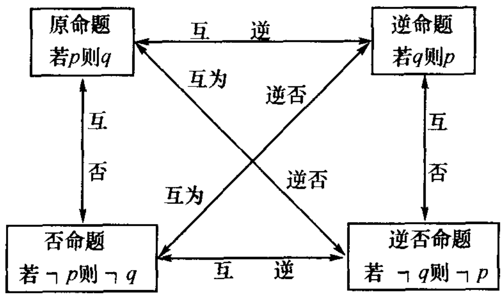
原命题:若 p 则 q;

逆命题：若 q 则 p；

否命题：若 $\neg p$ 则 $\neg q$；

逆否命题：若 $\neg q$ 则 $\neg p$.

2. 四种命题的关系.



三、充分条件与必要条件

1. 充分条件、必要条件和充要条件.

(1)充分条件.

如果 A 成立，那么 B 成立，则条件 A 是 B 成立的充分条件.

(2)必要条件.

如果 A 成立，那么 B 成立，这时 B 是 A 的必然结果，则条件 B 是 A 成立的必要条件.

注意：A 是 B 的充分条件，与 B 是 A 的必要条件，这两句话是完全等价的，它们是同一个逻辑关系"$A \Rightarrow B$"的不同表达方法.

(3)充要条件.

如果 A 即是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，则 A 是 B 成立的充要条件，与此同时，B 也一定是 A 成立的充要条件，所以我们称 A、B 互为充要条件.

2. 充要条件的判断.

我们常用推出符号"$\Rightarrow$"来判断两个命题之间的充要条件.

(1)若 $A \Rightarrow B$ 成立，则 A 是 B 成立的充分条件，B 是 A 成立的必要条件.

(2)若 $A \Rightarrow B$，且 $B \not\Rightarrow A$，则 A 是 B 成立的充分且不必要条件，B 是 A 成立的必要且非充分条件.

(3)若 $A \Leftrightarrow B$ 成立，则 A、B 互为充要条件.

四、简易逻辑问题的理解应注意的几个问题

(1)四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题，理解其关系(尤其是两种等价关系)的产生过程，关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以叙述为：

①交换命题的条件和结论，所得的新命题就是原来命题的逆命题；

②同时否定命题的条件和结论，所得的新命题就是原来的否命题；

③交换命题的条件和结论，并且同时否定，所得的新命题就是原命题的逆否命题.

(2)"充分条件"和"必要条件"是数学中重要的概念之一，它讨论"若 p 则 q"的命题中的条件和结论的逻辑关系，因此，必须真正弄懂它并善于应用它去分析和解决有关问题.

五、解决简易逻辑问题的方法规律

(1)对于"p 或 q"、"p 且 q"、"非 p"这三个复合命题的真假，可进行如下概括：

①对于复合命题"p 或 q"，当且仅当 p、q 中至少有一个为真时，它是真命题；当且仅当 p、q 都为假时，它是假命题；

②对于"p 且 q"形式的复合命题，当且仅当 p、q 都为真时，它是真命题；当且仅当 p、q 中至少有一个为假时，它是假命题；

③对于复合命题"非 p"，当且仅当 p 为真时，它是假命题；当且仅当 p 为假时，它是真命题.

(2)"否命题"与"命题的否定"不是同一概念."否命题"是对原命题"若 p 则 q"既否定其条件，又否定其结论；而"命题 p 的否定"即：非 p，只是否定命题 p 的结论.

(3)否定命题时，要注意特殊的词，如"全"、"都"、"一定"等等.

(4)不易用直接法去证明的命题可尝试用反证法.

(5)两个命题的充要关系是等价转换或非等价转换的基础.对这部分内容的复习要着眼基础，立足基本题.

(6)处理充分，必要条件问题时，首先要分清条件与结论，然后才能进行推理和判断.

(7)在复习这部分内容时，可以广泛联系中学范围的内容，以使一些基本关系得以澄清，加深对整个中学数学的认识.

(8)从集合的角度考查充分、必要条件，不仅为判断此类问题提供了新的解题途径，而且开阔了视野，深化了对集合及充要条件这两个重要概念的理解.

释 名题归类例释 标准思路 名师教你解剖考题

题型 1：命题的构成

【例 1】 (2003·合肥)给出命题：p：$3 \geqslant 3$，q：函数 $f(x)=\begin{cases}1 & x \geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数，则在下列三个复合命题："p 且 q"；"p 或 q"；"非 p"中，真命题的个数为(　　).

A.0 个　　B.1 个　　C.2 个　　D.3 个

【解析】 要判断三个复合命题的真假，先必须判断 p 与 q 的真假，再结合复命题的真假表作出判断.

p：$3 \geqslant 3$ 为真命题，而 q：$f(x)=\begin{cases}1 & x \geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数是假命题，则 p 或 q 为真 p 且 q 为假，$\neg p$ 为假命题.

【答案】 B

【点拨】 判断复合命题的真假的前提：掌握"真值表".

题型 2：四种命题之间的关系

【例 2】 (2002·希望杯)某个命题与自然数 n 有关，若 $n=k(k \in \mathbf{N}_+)$ 时该命题成立，那么可推得当 $n=k+1$ 时该命题也成立.现已知当 $n=5$ 时，该命题不成立，那么可推得(　　).

A.当 $n=6$ 时该命题不成立　B.当 $n=6$ 时该命题成立

C.当 $n=4$ 时该命题不成立　D.当 $n=4$ 时该命题成立

【解析】 原命题与逆否命题等价.

由题意可知，$n=k(k\in \mathbf{N}_+)$ 时该命题成立，那么可推得当 $n=k+1$ 该命题也成立，故 $n=4$ 时该命题不成立，否则 $n=5$ 该命题成立，这与题设条件矛盾.

【答案】 C

【点拨】 判断一个命题的真假往往转化判断其逆否命题的真假.

【例 3】 (2004·山西)判断命题“已知 a,x 为实数，如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空，则 $a\geqslant 1$”的逆否命题的真假.

【解析】 解法一　直接由原命题写出其逆否命题，然后判断逆否命题的真假.

原命题：已知 a,x 为实数，如果关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集非空，则 $a\geqslant 1$.

逆否命题：已知 a,x 为实数，如果 $a<1$，则关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集.

判断如下：

抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 开口向上，

判别式 $\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)=4a-7$.

$\because$　$a<1$，　$\therefore$　$4a-7<0$，

即抛物线 $y=x^2+(2a+1)x+a^2+2$ 是 x 轴无交点.

$\therefore$　关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为空集.

故逆否命题为真.

解法二　根据命题之间的关系“原命题与逆否命题同真同假”，只需判断原命题的真假即可.

$\because$　a,x 为实数，且关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 的解集为非空，

$\therefore$　$\Delta=(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0$，

即 $4a-7\geqslant 0$，解得 $a\geqslant \dfrac{7}{4}$.

$\because$　$a\geqslant \dfrac{7}{4}\geqslant 1$，　$\therefore$　原命题为真.

又因为原命题与其逆命题同真同假，所以逆否命题为真.

解法三　利用充要条件与集合的包含、相等关系求解.

命题 p：关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 有非空解集，命题 q：$a\geqslant 1$.

$\therefore$　p：$A=\{a\mid$ 关于 x 的不等式 $x^2+(2a+1)x+a^2+2\leqslant 0$ 有实数解$\}=\{a\mid(2a+1)^2-4(a^2+2)\geqslant 0\}=\left\{a\,\middle|\,a\geqslant \dfrac{7}{4}\right\}$.

q：$B=\{a\mid a\geqslant 1\}$.

$\because$　$A\subseteq B$，　$\therefore$　“若 p 则 q”为真.

$\therefore$　“若 p 则 q”的逆否命题：“若 $\neg q$ 则 $\neg p$”为真.

即原命题的逆否命题为真.

【点拨】 要判断一个命题的真假，可根据定义直接判断，如解法一；也可利用原命题与其逆否命题的等价关系求解，如解法二；而解法三是从集合观点出发，建立命题 p,q 相应的集合，利用充要条件与集合的包含、相等关系求解.

题型 3：充要条件的判断

【例 4】 (2004·黄冈)指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件(在“充分而不必要条件”、“必要而不充分条件”、“充要条件”、“既不充分又不必要条件”中选出一种作答).

(1)在 $\triangle ABC$ 中，p：$A>B$，q：$BC>AC$；

(2)对于实数 x,y，p：$x+y\neq 8$，q：$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$；

(3)在 $\triangle ABC$ 中，p：$\sin A>\sin B$，q：$\tan A>\tan B$；

(4)已知 $x,y\in \mathbf{R}$，

p：$(x-1)^2+(y-2)^2=0$，q：$(x-1)(y-2)=0$.

【解析】 (1)在 $\triangle ABC$ 中，显然有 $A>B\Leftrightarrow BC>AC$，

$\therefore$　p 是 q 的充要条件.

(2)$\because$　逆否命题：$x=2$ 且 $y=6\Rightarrow x+y=8$，

$\therefore$　p 是 q 的充分不必要条件.

(3)取 $A=120°,B=30°$，$p\not\Rightarrow q$，又取 $A=30°,B=120°$，$q\not\Rightarrow p$，　$\therefore$　p 是 q 的既不充分又不必要条件.

(4)$\because$　$p=\{(1,2)\}$，$q=\{(x,y)\mid x=1$ 或 $y=2\}$，$p\subsetneqq q$，

$\therefore$　p 是 q 的充分不必要条件.

【点拨】 判断一个命题的充要条件，首先要分清命题的条件和结论、条件 $\Rightarrow$ 结论为充分性，结论 $\Rightarrow$ 条件为必要性.

题型 4：反证法的应用

【例 5】 (2003·北京)已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，$a,b\in \mathbf{R}$，对命题“若 $a+b\geqslant 0$，则 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$”

(1)写出逆命题，判断其真假，并证明你的结论.

(2)写出其逆否命题，并证明你的结论.

【解析】 写出原函数的逆命题，逆否命题后运用函数单调性定义，对于 $x_1>x_2$ 时，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

逆命题：已知函数 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上增函数，$a,b\in \mathbf{R}$.“若 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，则 $a+b\geqslant 0$”.

假设 $a+b<0$，则 $a<-b$，$b<-a$. 因为 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，则 $f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$，所以 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，与条件矛盾，所以逆命题为真.

逆否命题：若 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$，则 $a+b<0$.

下面用反证法给出证明：

假设 $a+b\geqslant 0$，则 $a\geqslant -b$ 且 $b\geqslant -a$；

又 $f(x)$ 为增函数，　$\therefore$　$f(a)\geqslant f(-b)$，$f(b)\geqslant f(-a)$；

两式相加：$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，

这与题设条件 $f(a)+f(b)<f(a)+f(-b)$ 矛盾，故假设不成立.

$\therefore$　$a+b<0$.

【点拨】 (1)用反证法证明命题的一般步骤为：

①假设命题的结论不成立，即假设命题结论的反面成立；

②从这个假设出发，经过推理论证得出矛盾；

③由矛盾判断假设不正确，从而肯定命题的结论正确.

(2)常用的正面叙述词语和它的否定词语：

正面词语	等于	大于(>)	小于(<)	是	都是	任意的
否定词语	不等于	不大于(≤)	不小于(≥)	不是	不都是	某个

正面词语	所有的	任意两个	至多有一个	至少有一个	至多有 n 个
否定词语	某些	某两个	至少有两个	一个也没有	至少有 $n+1$ 个

真 五年高考透视 标准解密 看看以前是怎么考的……

1.(2001·上海)已知 a,b 为两条不同的直线,α,β 为两个不同的平面,且 $a\perp\alpha,b\perp\beta$,则下列命题中的假命题是( )。

A.若 $a\parallel b$,则 $\alpha\parallel\beta$　　B.若 $\alpha\perp\beta$,则 $a\perp b$

C.若 a,b 相交,则 α,β 相交　　D.若 α,β 相交,则 a,b 相交

2.(2001·上海)$a=3$ 是直线 $ax+2y+3a=0$ 和直线 $3x+(a-1)y=a-7$ 平行且不重合的( )。

A.充分非必要条件　　B.必要非充分条件

C.充要条件　　D.既非充分也非必要条件

3.(2002·北京)设命题甲:"直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,平面 ACB_1 与对角面 BB_1D_1D 垂直";命题乙:"直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 是正方体".那么,甲是乙的( )。

A.充分必要条件　　B.充分非必要条件

C.必要非充分条件　　D.既非充分又非必要条件

4.(2002·全国)函数 $y=x^2+bx+c(x\in[0,+\infty))$ 是单调函数的充要条件是( )

A.$b\geqslant0$　B.$b\leqslant0$　C.$b>0$　D.$b<0$

5.(2002·河南、广东、广西)函数 $f(x)=x|x+a|+b$ 是奇函数的充要条件是( )

A.$ab=0$　B.$a+b=0$　C.$a=b$　D.$a^2+b^2=0$

6.(2003·北京)"$\cos2\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$"是"$\alpha=k\pi+\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$"的( )。

A.必要非充分条件　　B.充分非必要条件

C.充分必要条件　　D.既非充分又非必要条件

7.(2001·天津)在空间中:

①若四点不共面,则这四点中任何三点都不共线;

②若两条直线没有公共点,则这两条直线是异面直线;

以上两个命题中,逆命题为真命题的是______.

(把符合要求的命题序号都填上)

8.(2002·上海)已知函数 $y=f(x)$(定义域为 D,值域为 A)有反函数 $y=f^{-1}(x)$,则方程 $f(x)=0$ 有解 $x=a$ 且 $f(x)>x(x\in D)$ 的充要条件是 $y=f^{-1}(x)$ 满足______.

9.(2004·上海春)若非空集合 $M\subset N$,则"$a\in M$ 或 $a\in N$"是"$a\in M\cap N$"的( ).

A.充分必要条件　B.必要非充分条件

C.充要条件　D.既非充分又非必要条件

预 高考命题预测 标准演练 今年高考这么考……

【预测1】 今有命题 p、q,若命题 m 为"p 且 q",则"$\neg p$ 或 $\neg q$"是 $\neg m$ 的( ).

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

【预测2】 命题"a,b 都是奇数,则 $a+b$ 是偶数"的逆否命题是( ).

A.a,b 都不是奇数,则 $a+b$ 是偶数

B.$a+b$ 是偶数,则 a,b 都是奇数

C.$a+b$ 不是偶数,则 a,b 都不是奇数

D.$a+b$ 不是偶数,则 a,b 不都是奇数

【预测3】 A 是原命题,$\neg A$ 是 A 的否命题,如果 $\neg A\Rightarrow B$,那么 A 是 B 的( ).

A.充分不必要条件　B.必要不充分条件

C.充要条件　D.既不充分又不必要条件

【预测4】 设 $a、b、c、d\in\mathbf{R}$,则 $b^2-4ac<0$ 是不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的( ).

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.既不充分也不必要条件　　D.必要条件

【预测5】 已知下列四个命题,其中真命题的个数为( ).

①"若 $xy=0$,则 $x=0$ 且 $y=0$"的逆否命题;

②"正方形是菱形"的否命题;

③"若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$"的逆命题;

④"若 $m>2$,则不等式 $x^2-2x+m>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$".

A.0个　B.1个　C.2个　D.3个

【预测6】 下列命题中,使命题 M 是命题 N 成立的充要条件的一组命题是( ).

A.$M:a>b,N:ac^2>bc^2$

B.$M:a>b,c>d,N:a-d>b-c$

C.$M:a>b>0,c>d>0,N:ac>bd$

D.$M:|a-b|=|a|+|b|,N:ab\leqslant0$

【预测7】 下列命题正确的是( ).

A."$a>b$"是"$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$"成立的必要非充分条件

B."$a+b>0$"是"$|a|+|b|>0$"成立的充要条件

C.z 是复数,"$z+z=0$"是"$z=0$"成立的必要非充分条件

D.设 z_1,z_2 是复数,则"向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 重合"是"$|z_1|=|z_2|$"成立的充要条件

【预测8】 给出下面四个命题:①"直线 $a、b$ 为异面直线"的充分非必要条件是"直线 $a、b$ 不相交";②"直线 l 垂直于平面 α 内所有直线"的充要条件是"$l\perp$平面 α";③"直线 $a\perp b$"的充分非必要条件是"a 垂直于 b 在平面 α 内的射影";④"直线 $a\parallel$平面 β"的必要非充分条件是"直线 a 至少平行于平面 β 内的一条直线".其中正确命题的个数是( ).

A.1个　B.2个　C.3个　D.4个

【预测9】 在 $\triangle ABC$ 中,条件甲:$A<B$;条件乙:$\cos^2A>\cos^2B$,则甲是乙的( ).

A.充分但非必要条件　　B.必要但非充分条件

C.充要条件　　D.既非充分又非必要条件

【预测10】 直线 $l_1、l_2$ 互相平行的一个充分条件是( ).

A.$l_1、l_2$ 都平行于同一个平面

B.$l_1、l_2$ 与同一个平面所成的角相等

C.l_1 平行于 l_2 所在的平面

D.$l_1、l_2$ 都垂直于同一个平面

第二章 函数

考试说明扫描

考试内容：

映射、函数、函数的单调性、

反函数、互为反函数的函数图像间的关系、

指数概念的扩充、有理指数幂的运算性质、指数函数、

对数、对数的运算性质、对数函数、

函数的应用举例．

考试要求：

(1)了解映射的概念，理解函数的概念．

(2)了解函数的单调性的概念，掌握判断一些简单函数的单调性的方法．

(3)了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系，会求一些简单函数的反函数．

(4)理解分数指数幂的概念，掌握有理指数幂的运算性质．掌握指数函数的概念、图像和性质．

(5)理解对数的概念，掌握对数的运算性质．掌握对数函数的概念、图像和性质．

(6)能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题．

第4讲　映射与函数

纲 考试说明诠释 标准依据 解题思路+答题要点

一、映射

1．映射．

设 A、B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，则这样的对应(包括集合 A、B 以及 A 到 B 的对应法则 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射，记作：$f:A\to B$．

2．象与原象．

如果给定一个从集合 A 到集合 B 的映射，那么，和 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a 的象，a 叫做 b 的原象．

3．一一映射．

设 A、B 是两个集合，$f:A\to B$ 是 A 到 B 的映射，如果在这个映射下，对于集合 A 中的不同元素，在集合 B 中有不同的象，而且 B 中的每一个元素都有原象，那么这个映射叫做 A 到 B 上的一一映射．

二、函数

1．函数的定义．

(1)原始定义：设在某变化过程中有两个变量 x、y，如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有惟一确定的值与它对应，那么就称 y 是 x 的函数，x 叫做自变量．

(2)近代定义：设 A、B 都是非空的数的集合，$f:x\to y$ 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$ 就叫做函数，记作 $y=f(x)$，其中 $x\in A$，$y\in B$，原象集合 A 叫做函数的定义域，象集合 C 叫做函数的值域．

上述两个定义实质上是一致的，只不过原始定义是从运动的观点出发，而近代定义是从集合、映射的观点出发，侧重点不同．函数实质上是从 A 到 B 的一个特殊的映射，其特殊性在于 A、B 都是非空的数集，自变量的取值集合 A 叫做函数的定义域，函数值的集合 C 叫做函数的值域．应注意，值域 C 不一定等于 B，而只能说 $C\subseteq B$．

2．构成函数概念的三要素．

(1)三要素是指定义域、对应法则、值域．

(2)三要素中只要有一个不同的两个函数就是不同的函数．

(3)三要素中都相同的两个函数是同一个函数．

3．函数的表示方法．

表示函数的方法，常用有解析法、列表法、图像法三种．

(1)解析法：就是把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式．中学研究的函数主要是用解析式表示的函数．

(2)列表法：就是列出表格来表示两个变量的函数关系．

(3)图像法：就是用函数图像来表示两个变量之间的关系．

三、映射与函数概念的理解

1．映射定义的理解．

①集合 A、B 不加约束，可以是数集，也可以是点集或其他类元素构成的集合．

②集合 A、B 与对应法则 f 是确定的，是一个系统．

③对应法则具有方向性，即 A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是不同的．

④定义中强调 A 中元素的任意性和 B 中元素的惟一性．

⑤映射允许 A 中的不同元素在 B 中有相同的象，但不要求 B 中的元素都有原象，即 A 中元素在 B 中象的集合是 B 的子集．

2．一一映射概念的理解．

由一一映射的定义可知，一一映射只可以是“一对一”，同时映射具有“单向性”这一特征，所以“一一对应”与“一一映射”是两个不同的概念．一般地，“一一映射”是由正向、逆向的两个“一一对应”来确定的．

3．判断一个对应是映射的方法．

要判断一个对应是否为映射，只看第一集合 A：集合 A 中的每一个元素是否都有对应元素，且对应元素是惟一的，至于

第二个集合 B 中的每一个元素是否都有原象不作要求.

4. 判断一个映射是一一映射的方法.

判断一个映射是否为一一映射,只须抓住两点:

①A 中不同元素在 B 中有不同的象;

②B 中的每一个元素都有原象.

5. 函数记号 $y=f(x)$ 的理解.

对应法则 f 是函数概念的核心,$y=f(x)$ 的含义是:y 等于 x 在法则 f 下的对应值,而 f 是对应得以实现的方法和途径,是联系 x 与 y 的纽带,因此 f 是函数关系的本质特征.至于用什么字母表示自变量、因变量和对应法则,是无关紧要的.

符号 $y=f(x)$ 即"y 是 x 的函数"这句话的数学表示形式,它是数学符号,不是表示"y 等于 f 与 x 的乘积",$f(x)$ 也不一定是函数解析式.且 $f(a)$ 的含义与 $f(x)$ 又不同,前者表示自变量 $x=a$ 时所得的函数值,它是一个常量,后者是 x 的函数,在通常情况下,是一个变量,$f(a)$ 是 $f(x)$ 的一个特殊值.

6. 掌握函数的三种表示方法——列表法、解析法和图像法.

若函数在其定义域的不同子集上,因对应法则分别不同或用几个不同式子来表示,这种表示形式的函数叫做分段函数.应注意不要误认为它是"几个函数",而是一个函数的分段(根据自变量的不同取值范围)表示.

7. 如果 $y=f(u)$,$u=g(x)$,那么 $y=f[g(x)]$ 叫做 f 和 g 的复合函数,其中 $u=g(x)$ 叫内函数,$y=f(u)$ 叫外函数.

四、映射与函数问题解决中的规律方法

(1)映射的定义是有方向性的,即从集合 A 到 B 与从集合 B 到 A 的映射是两个不同的映射.映射是一种特殊对应关系,只有一对一、多对一的对应才是映射.

(2)函数的定义有两种形式,都描述了定义域、值域和从定义域到值域的对应法则.函数是一种特殊的映射.

(3)判断两个函数是否同一,紧扣函数概念三要素是解题关键.

释 名题归类例释 标准思路 名师教你解剖考题

题型1:映射的概念

【例1】 (2003·东城)已知映射 $f:A\to B$,其中 $A=B=\mathbf{R}$,对应法则 $f:y=x^2-2x+3$,$x\in A$,$y\in B$,对于集合 B 中的元素1,下列说法正确的是(　　).

A. 在 A 中有1个原象　　B. 在 A 中有2个原象

C. 在 A 中有3个原象　　D. 在 A 中无原象

【解析】 令 $y=1$,则 $x^2-2x+2=0$ 无实根,故1在 A 中无原象.

【答案】 D

【点拨】 象与原象是映射中的两个重要概念,象是 B 中的元素,原象是 A 中的元素.此题是用方程的思想求解的.

【例2】 (2003·黄冈)下列各对应 f 中为映射的是(　　).

A. $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}^+$, $f:x\to y=|x|$

B. $x\in\mathbf{R}$, $y\in\mathbf{R}$, $f:x\to y=\frac{1}{x-1}$

C. $x\in\mathbf{N}$, $y\in\{$奇数$\}$, $f:x\to y=4x-5$

D. $x\in\mathbf{R}^+$, $y\in\mathbf{R}$, $f:x\to y$ 是 x 的平方根

【解析】 紧扣映射的概念迅速作出判断,$x=0$,$y=|x|=0\notin\mathbf{R}^+$,排除选项A;$x=1$ 时,$y=\frac{1}{x-1}$ 无意义,排除选项B;正数的平方根有两个,不是惟一的,排除选项D.

【答案】 C

【点拨】 本题考查映射的概念:对应 $f:A\to B$,使 A 中的每一个元素在 B 中都有象,且是惟一象.

题型2:函数的概念

【例3】 (2003·武汉)下列四个命题:

①从定义域到值域的映射是函数

②$f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ 是函数

③函数 $y=2x(x\in\mathbf{N})$ 的图像是一条直线

④函数 $y=\begin{cases}x^2 & (x\geq 0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$ 的图像是抛物线

其中正确的个数是(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【解析】 由函数定义知①正确;从表面现象看②也正确,但是据考察其定义域为 $\varnothing$,这与函数定义中定义域为非空数集相悖,故②不正确;③的图像是直线 $y=2x$ 上的满足定义域为自然数的一些不连续的点集,故③不正确;④是由两段抛物线组成,故④不正确,综上可知正确的有1个.

【答案】 A

【点拨】 函数是特殊的映射,特殊在定义域、值域都是非空数集,否则就不是函数.

【例4】 (2004·湖北)判断下列各组函数是否表示同一个函数.

A. $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$;

B. $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$;

C. $y=\sqrt{x^2}-1$ 与 $y=x-1$;

D. $y=x$ 与 $y=\log_a a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$.

【解析】 选项A表示不同函数,因为定义域不同.

选项B的两函数的定义域不同,分别为 $(0,\infty)$ 和 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,所以两函数不是相同函数.

选项C因为 $y=\sqrt{x^2}-1=\begin{cases}x-1 & (x\geq 0)\\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$,它与 $y=x-1$ 的对应法则不相同,所以两函数不是相同函数.

选项D表示相同的函数.

【答案】 D

【点拨】 判断两个函数是否为同一函数,不仅要看函数的表达式化简后是否相同,还要注意定义域是否相同.

题型3:分段函数和复合函数

【例5】 (2003·天津)设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\geq 0)\\ x & (x<0)\end{cases}$,$g(x)=$