



高等院校
通信与信息专业规划教材

电磁场与电磁波

冯 林 杨显清 王 园 等编著



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校通信与信息专业规划教材

电磁场与电磁波

冯 林 杨显清 王 园 赵延文 孔 斌 编著



机械工业出版社

本书系统地阐述了电磁场的基本理论，内容包括：电磁场数学基础、麦克斯韦方程组、静态场、时变电磁场、电磁波的传播和辐射、衍射、散射及静态场边值问题，每章均含相应的例题和习题，书末配有习题答案。

本书可作高等院校电子与信息技术类各专业的“电磁场与电磁波”、“电磁场理论”、“电磁场与天线技术”等课程的教材或参考书，还可供其他专业的教师、学生和科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁波/冯林等编著. —北京：机械工业出版社，2004.6
高等院校通信与信息专业规划教材
ISBN 7-111-14135-0

I. 电… II. 冯… III. ①电磁场-高等学校-教材②电磁波-高等学校-教材 IV.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2004) 第 017939 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：陈振虹 版式设计：张世琴 责任校对：樊钟英
责任印制：李 妍

北京蓝海印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 6 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm $1/16$ ·18.25 印张·448 千字

0001—5000 册

定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

高等院校通信与信息专业规划教材

编委会名单

(按姓氏笔画排序)

编委会主任	乐光新			
编委会副主任	张文军	张思东	杨海平	徐澄圻
编委会委员	王金龙	冯正和	刘增基	李少洪
	邹家禄	吴镇扬	赵尔沅	南利平
	徐惠民	彭启琮	解月珍	
秘书长	胡毓坚			
副秘书长	许晔峰			

出版说明

为了培养 21 世纪国家和社会急需的通信与信息领域的高级科技人才，为了配合高等院校通信与信息专业的教学改革和教材建设，机械工业出版社会同全国在通信与信息领域具有雄厚师资和技术力量的高等院校，组成阵容强大的编委会，组织长期从事教学的骨干教师编写了这套面向普通高等院校的“高等院校通信与信息专业规划教材”，并且将陆续出版。

这套教材力求做到：专业基础课教材概念清晰、理论准确、深度合理，并注意与专业课教学的衔接；专业课教材覆盖面广、深度适中，不仅体现相关领域的最新进展，而且注重理论联系实际。

这套教材的选题是开放式的。随着现代通信与信息技术日新月异地发展，我们将不断更新和补充选题，使这套教材及时反映通信与信息领域的新发展和新技术。我们也欢迎在教学第一线有丰富教学经验的教师及通信与信息领域的科技人员积极参与这项工作。

由于通信与信息技术发展迅速，而且涉及领域非常宽，在这套教材的选题和编审过程中难免会有缺点和不足之处，诚恳希望各位老师和同学提出宝贵意见，以利于今后不断地改进。

机械工业出版社

高等院校通信与信息专业规划教材编委会

前 言

本书是为微波工程、电子信息工程、通信工程及电子类其他相关专业本科生编写的教材，具有内容丰富和使用面广的特点，在编写过程中注意强调基本概念和典型问题的解决方法。

全书共分 11 章；第 1 章：电磁场的数学基础，介绍研究电磁场理论所用的数学方法；第 2 章：麦克斯韦方程组，主要讨论麦克斯韦方程组的建立和电磁场所满足的边界条件；第 3 章：静态场分析；第 4 章：时变电磁场；第 5 章：静态场边值问题（一），主要讨论静态场的性质及简单边值问题的求解方法；第 6 章：无界空间中的平面电磁波；第 7 章：波的反射与折射，主要讨论时变场的一般特性及平面波在空间中的传播及反射；第 8 章：有界空间中的电磁波即导行电磁波，主要讨论电磁波在波导、传输线及谐振腔中的特性，第 9 章：电磁波的辐射；第 10 章：电磁波的衍射和散射；第 11 章：静态场边值问题（二）。

对于微波工程专业，可以考虑讲解全部内容，或根据其后续课程的安排略去第 8、9、10 等章节；其他专业，可根据具体专业的教学需求和相应的学时数略去第 8、9、10、11 章。打“*”号的小节可根据具体专业和学时的需要取舍。

本书由电子科技大学冯林教授编写第 2 章和第 4 章，杨显清副教授编写第 1 章和第 3 章，王园副教授编写第 6 章、第 7 章和第 8 章，赵延文副教授编写第 10 章和第 11 章，孔斌讲师编写第 5 章和第 9 章。全书由王园副教授统稿。

由于编者的水平有限，书中难免出现一些错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

作 者

目 录

出版说明

前言

第 1 章 电磁场的数学基础 1

1.1 标量场和矢量场 1

1.1.1 标量场和矢量场的概念 1

1.1.2 标量场的等值面 1

1.1.3 矢量场的矢量线 2

1.2 标量场的梯度 3

1.2.1 标量场的方向导数 3

1.2.2 标量场的梯度 4

1.3 矢量场的通量与散度 6

1.3.1 矢量场的通量 6

1.3.2 矢量场的散度 7

1.4 矢量场的环量与旋度 10

1.4.1 矢量场的环量与环量面密度 10

1.4.2 矢量场的旋度 11

1.5 拉普拉斯运算 13

1.5.1 标量场的拉普拉斯运算 13

1.5.2 矢量场的拉普拉斯运算 13

1.6 亥姆霍兹定理 13

1.6.1 亥姆霍兹定理的内容 13

1.6.2 矢量场的分类 14

1.7* 并矢与张量分析基础 15

1.7.1 并矢与张量的表示法 15

1.7.2 张量的代数运算 16

1.7.3 张量分析 16

1.8 习题 17

第 2 章 麦克斯韦方程组 20

2.1 电磁理论中的基本物理量和实验定律 20

2.1.1 电荷与电荷分布 20

2.1.2 电流与电流密度 22

2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程 23

2.1.4 库仑定律 电场强度 25

2.1.5 安培定律 27

2.1.6 比奥-萨伐尔定律 磁感应强度 28

2.2 静态场的基本方程 29

2.2.1 真空中静电场的基本方程 30

2.2.2 真空中静磁场的基本方程 32

2.2.3 介质的极化 35

2.2.4 介质的磁化 37

2.2.5 介质中静态场的基本方程 39

2.2.6 电磁性质的本构关系 40

2.3 麦克斯韦方程组的建立 42

2.3.1 法拉第电磁感应定律 42

2.3.2 位移电流 44

2.3.3 麦克斯韦方程组 45

2.4 电磁场的边界条件 46

2.5 习题 48

第 3 章 静态场分析 50

3.1 静电场的静电位及其微分方程 50

3.1.1 静电场的静电位 50

3.1.2 电位差 51

3.1.3 电位的微分方程 51

3.1.4 电位的表达式 51

3.1.5 电位的多极展开 54

3.2 导体系统的电容 56

3.2.1 电容的定义 56

3.2.2 电容的计算 57

3.2.3* 电位系数和电容系数 58

3.2.4* 部分电容 59

3.3 静电场能量和静电力 59

3.3.1 电场能量 59

3.3.2 带电导体系统的能量 60

3.3.3 点电荷系统的相互作用能 61

3.3.4* 电荷分布在外电场中的能量 62

3.3.5* 静电力 63

3.4 恒定电场及其基本方程 65

3.4.1 恒定电场的基本方程 65

3.4.2 焦耳定律 66

3.4.3 电阻 66

3.5 静磁场的矢量磁位及其微分方程 68

3.5.1 静磁场的矢量磁位 68

3.5.2 静磁场的矢量磁位的微分方程 68

3.5.3 静磁场的矢量磁位的表达式 68

3.6 电感 71

3.6.1 电感的定义	71	变换	100
3.6.2 纽曼公式	73	4.5.3 正弦场中的二次式	100
3.7 静磁场能量和磁场力	74	4.6 正弦场的基本方程	102
3.7.1 静磁场能量	74	4.6.1 复数形式的麦克斯韦方程组	102
3.7.2 电流回路系统的磁场能量	75	4.6.2 复数形式的波动方程 亥姆霍兹方程	102
3.7.3* 电流分布在外磁场中的能量	77	4.6.3 复数形式的达朗贝尔方程	102
3.7.4* 磁场力	77	4.6.4* 复数形式的坡印廷定理	103
3.8 静态场的边界条件	79	4.7 习题	104
3.8.1 静电场的边界条件	79	第5章 静态场边值问题 (一)	105
3.8.2 电位的边界条件	79	5.1 边值问题的分类	105
3.8.3 恒定电场的边界条件	80	5.2 惟一性定理	107
3.8.4 静磁场的边界条件	80	5.2.1 静电场的惟一性定理	107
3.8.5 矢量磁位的边界条件	81	5.2.2* 静磁场的惟一性定理	108
3.9* 静磁场的标量磁位及其微分方程	81	5.3 镜像法求解静电场边值问题	109
3.10 静态场的比拟	83	5.3.1 镜像法的基本思想	109
3.10.1 恒定电场与静电场的比拟	83	5.3.2 导体平面的镜像	110
3.10.2* 静磁场与静电场的比拟	83	5.3.3 导体球面的镜像	112
3.11 习题	85	5.3.4 理想导体平面的镜像	113
第4章 时变电磁场	90	5.3.5 介质平面的镜像	115
4.1 波动方程 电磁场的波动性	90	5.4* 镜像法求解静磁场边值问题	117
4.1.1 波动方程的建立	90	5.5 分离变量法	118
4.1.2 波动方程解的一般形式	91	5.5.1 直角坐标系中的分离变量法	118
4.1.3 波动方程解的诠释 电磁场的波动性	91	5.5.2 圆柱坐标系中的分离变量法	123
4.2 电磁位 达朗贝尔方程	92	5.5.3 球坐标系中的分离变量法	126
4.2.1 用位函数描述电磁场	92	5.6 习题	128
4.2.2* 规范与规范变换	92	第6章 无界空间中的平面电磁波	131
4.2.3 达朗贝尔方程	93	6.1 电磁波在非导电媒质中的传播	131
4.3 电磁场的能量与能量守恒	94	6.1.1 无界空间中的波动方程及其解	131
4.3.1 电磁场能量密度和能流密度的物理表述	94	6.1.2 非导电媒质中电磁波的特点	132
4.3.2 电磁场的能量守恒 坡印廷定理	95	6.1.3 均匀平面波的能量及能流	134
4.3.3 用场量表示电磁场的能量密度和能流密度	95	6.2 电磁波的极化	136
4.4* 电磁场的动量与动量守恒	97	6.2.1 极化的概念	136
4.4.1 电磁场动量密度和动量流密度的物理表述	97	6.2.2 极化的分类	137
4.4.2 电磁场的动量守恒	98	6.2.3 极化技术的应用	138
4.4.3 用场量表示电磁场的动量密度和动量流密度	98	6.3 电磁波在导电媒质中的传播	139
4.5 正弦场的复数表示	99	6.3.1 导电媒质中的麦克斯韦方程组	139
4.5.1 电磁场的复数表示	99	6.3.2 低损耗介质中的波	141
4.5.2 复数表示法与瞬时表示法的		6.3.3 良导体中的电磁波	142
		6.4 习题	144
		第7章 波的反射与折射	146
		7.1 电磁波对介质分界面的斜入射	146
		7.1.1 沿任意方向传播的平面波	146

7.1.2 均匀平面波在媒质分界面上的斜入射	147	9.4.1 二元天线阵	213
7.1.3 布儒斯特角	149	9.4.2 均匀直线式天线阵	215
7.1.4 反射定律和折射定律	150	9.5 习题	217
7.1.5 全反射 临界角	150	第 10 章 电磁波的衍射和散射	219
7.2 电磁波对介质分界面的垂直入射	151	10.1 电磁波的衍射	219
7.3 电磁波在理想导体表面上的反射与折射	153	10.1.1 衍射问题	219
7.3.1 垂直入射	153	10.1.2 基尔霍夫公式	219
7.3.2 斜入射	155	10.1.3 小孔衍射	220
7.4 习题	159	10.2 电磁波的绕射	222
第 8 章 有界空间中的电磁波(导行电磁波)	162	10.2.1 几何绕射理论	222
8.1 导波的基本方程	162	10.2.2 物理绕射理论	226
8.2 导波的分类	163	10.3 电磁波的散射	228
8.2.1 TEM 波	163	10.3.1 理想导体圆柱对平面电磁波的散射	228
8.2.2 TM 波和 TE 波	164	10.3.2 球体的散射	230
8.3 矩形波导	165	10.4 雷达散射截面及其分析方法	233
8.3.1 场分量	165	10.4.1 雷达散射截面基础	233
8.3.2 传播特性	169	10.4.2 经典解法	234
8.3.3 主模与单模传输	173	10.4.3 积分方程解法	237
8.4 平行板波导	178	10.4.4 几何光学法	240
8.5 圆柱形波导	182	10.4.5 物理光学法	242
8.6 传输线	189	10.5 习题	243
8.6.1 分布参数的概念	189	第 11 章 静态场边值问题(二)	245
8.6.2 传输线方程及其解	190	11.1 格林函数法求解静电场	245
8.6.3 传输线的特性参数	192	11.1.1 格林函数	245
8.6.4 传输线的工作参数	193	11.1.2 用格林函数表示边值问题的解	246
8.6.5 传输线的工作状态	195	11.1.3 用格林函数求边值问题	248
8.7 谐振腔	197	11.2 复变函数法	249
8.7.1 分布参数谐振电路	197	11.2.1 复电位函数法	249
8.7.2 矩形谐振腔的场分量	198	11.2.2 常用的解析函数	251
8.7.3 矩形谐振腔的品质因素	200	11.2.3 保角变换法	256
8.8 习题	202	11.2.4 常用的保角变换	257
第 9 章 电磁波的辐射	204	11.3 有限差分法	259
9.1 达朗贝尔方程的解 推迟位	204	11.3.1 差分方程的导出	259
9.2 基本振子的辐射	206	11.3.2 差分方程的求解	261
9.2.1 电偶极子辐射	206	11.4 有限元法	263
9.2.2 磁偶极子辐射	209	11.4.1 边值问题的泛函极值	264
9.3 线天线辐射	211	11.4.2 泛函极值问题的离散化	264
9.3.1 天线上的电流分布	211	11.5 习题	268
9.3.2 半波天线辐射	212	附录	270
9.4 天线阵	213	附录 A 重要的矢量公式	270
		附录 B 部分习题答案	271
		参考文献	281

第 1 章 电磁场的数学基础

电磁场是分布在三维空间的矢量场，矢量分析是研究电磁场在空间的分布和变化规律的基本数学工具之一。标量场在空间的变化规律由其梯度来描述，而矢量场在空间的变化规律则通过场的散度和旋度来描述。本章首先介绍标量场和矢量场的概念，然后着重讨论标量场的梯度、矢量场的散度和旋度的概念及其运算规律，在此基础上介绍了亥姆霍兹定理，最后简略地介绍了张量的概念。

1.1 标量场和矢量场

1.1.1 标量场和矢量场的概念

在电磁理论中，我们要研究某些物理量（如电位、电场强度、磁场强度等）在空间的分布和变化规律，为此，引入了场的概念。如果每一时刻，一个物理量在空间中的每一点都有一个确定的值，则称在此空间中确定了该物理量的场。

标量场：若所研究的物理量是一个标量，则称该物理量的场为标量场，例如：温度场、密度场、电位场。

矢量场：若所研究的物理量是一个矢量，则称该物理量的场为矢量场，例如：力场、速度场、电场。

若物理量不随时间变化，则称该物理量所确定的场为静态场；反之，则称为动态场或时变场。由于矢量分析研究的是物理量在空间的分布与变化规律，所以，这里只讨论静态场，但所得结果也适用于时变场的每一瞬时情况。

1.1.2 标量场的等值面

在标量场中，各点的场量是随空间位置变化的标量。因此，一个标量场 u 可以用一个标量函数来表示。例如，在直角坐标系中，可表示为

$$u = u(x, y, z) \quad (1-1)$$

在标量场中，为了形象直观地描述物理量在空间的分布状况，常常要考察场中物理量取得相同值的点，引入了等值面的概念。在标量场中，使标量函数 $u(x, y, z)$ 取得相同数值的点构成一个空间曲面，称为标量场的等值面。例如，在温度场中，由温度相同的点构成等温面；在电位场中，由电位相同的点构成等位面。

对任意给定的常数 C ，方程

$$u(x, y, z) = C \quad (1-2)$$

就是等值面方程。

标量场的等值面具有如下特点：

1) 常数 C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族。

2) 若 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 是标量场中的任一点, 显然, 曲面 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$ 是通过该点的等值面, 因此标量场的等值面充满场所在的整个空间。

3) 由于标量函数 $u(x, y, z)$ 为单值的, 一个点只能在一个等值面上, 因此标量场的等值面互不相交 (如图 1-1 所示)。

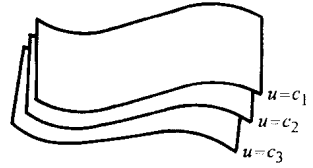


图 1-1 等值面

1.1.3 矢量场的矢量线

在矢量场中, 各点的场量是随空间位置变化的矢量。因此, 一个矢量场 F 可以用一个矢量函数来表示。在直角坐标系中可表示为

$$F = F(x, y, z) \quad (1-3)$$

一个矢量场 F 可以分解为三个分量场, 在直角坐标系中

$$F = a_x F_x(x, y, z) + a_y F_y(x, y, z) + a_z F_z(x, y, z) \quad (1-4)$$

式中, a_x 、 a_y 和 a_z 分别是沿 x 、 y 和 z 方向的单位矢量, $F_x(x, y, z)$ 、 $F_y(x, y, z)$ 和 $F_z(x, y, z)$ 是 $F(x, y, z)$ 的三个分量。

1. 矢量线

在矢量场中, 为了形象直观地描述矢量在空间的分布状况, 引入了矢量线的概念。矢量线是一条空间曲线, 在它上面每一点的场矢量都与其相切 (如图 1-2 所示)。例如, 静电场中的电力线, 磁场中的磁力线等, 都是矢量线的例子。一般地, 矢量场中的每一点都有矢量线通过, 所以矢量线也充满矢量场所在的空间。

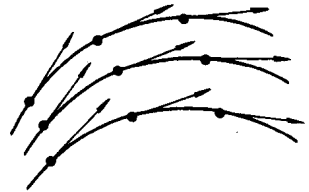


图 1-2 矢量线

2. 矢量线微分方程

设已知矢量场 $F = a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z$, $M(x, y, z)$ 是场中的矢量线上任一点, 其矢径为

$$r = a_x x + a_y y + a_z z$$

则其微分矢量

$$dr = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

在点 M 处与矢量线相切。根据矢量线的定义可知, 在点 M 处 dr 与 F 共线, 即 $dr \parallel F$, 于是有

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (1-5)$$

这就是矢量线的微分方程组。解此微分方程组, 即可得到矢量线方程。

例 1-1 设点电荷 q 位于坐标原点, 在周围空间任一点 $M(x, y, z)$ 处产生的电场强度矢量

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} r$$

式中 ϵ 为介电常数, $r = a_x x + a_y y + a_z z$, $r = |r|$, 求电场强度矢量 E 的矢量线。

解: $E = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} r = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} (a_x x + a_y y + a_z z)$, 由式 (1-5) 可得到矢量线的微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \\ \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \end{cases}$$

由此方程组可解得

$$\begin{cases} x = c_1 z \\ y = c_2 z \end{cases} \quad (c_1, c_2 \text{ 为任意常数})$$

这是从点电荷 q 所在处 (坐标原点) 发出的一束射线 (如图 1-3 所示)。

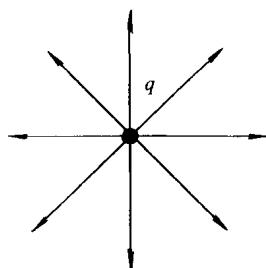


图 1-3 点电荷的电力线

1.2 标量场的梯度

标量场 $u(x, y, z)$ 的等值面只描述了场量 u 的分布状况, 而研究标量场的另一个重要方面, 就是还要研究标量场 $u(x, y, z)$ 在场中任一点的邻域内沿各个方向的变化规律。为此, 引入了标量场的方向导数和梯度的概念。

1.2.1 标量场的方向导数

1. 方向导数的定义

设 M_0 为标量场 $u(M)$ 中的一点, 从点 M_0 出发引一条射线 l , 点 M 是射线 l 上的动点, 到点 M_0 距离为 Δl (如图 1-4 所示)。当点 M 沿射线 l 趋近于 M_0 (即 $\Delta l \rightarrow 0$) 时, 若比值

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l}$$

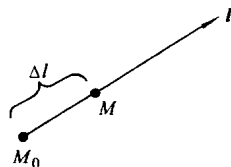


图 1-4 l 方向

的极限存在, 则称此极限为标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿方向 l 的方向导数, 记作 $\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0}$, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} \quad (1-6)$$

从以上定义可知:

1) 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 是标量场 $u(M)$ 在点 M_0 处沿方向 l 对距离的变化率。当 $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ 时, 标量场 $u(M)$ 沿方向 l 是增加的; 当 $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ 时, 标量场 $u(M)$ 沿方向 l 是减小的; 当 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$ 时, 标量场 $u(M)$ 沿方向 l 无变化。

2) 方向导数值既与点 M_0 有关, 也与方向 l 有关。因此, 标量场中, 在一个给定点 M_0 处沿不同方向 l , 其方向导数一般是不同的。

2. 方向导数的计算公式

方向导数的定义是与坐标系无关的, 但方向导数的具体计算公式与坐标系有关。在直角坐标系中, 设 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ 是方向 l 的方向余弦, 即

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dl}, \cos\beta = \frac{dy}{dl}, \cos\gamma = \frac{dz}{dl}$$

根据复合函数求导法则，容易得到，直角坐标系中方向导数的计算公式为：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \quad (1-7)$$

1.2.2 标量场的梯度

在标量场中，从一个给定点出发有无穷多个方向。一般说来，标量场在同一点 M 处沿不同的方向上的变化率是不同的，在某个方向上，变化率可能最大。那么标量场在什么方向上的变化率最大、其最大的变化率又是多少？为了描述这个问题，引入了梯度的概念。

1. 梯度的定义

标量场 u 在点 M 处的梯度定义为：方向为沿场量 u 变化率最大的方向、大小等于其最大变化率的矢量。并记作 $\text{grad} u$ ，即

$$\text{grad} u = \left[a_l \frac{\partial u}{\partial l} \right]_{\max} \quad (1-8)$$

式中， $a_l = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma$ 是沿 l 方向的单位矢量。

2. 直角坐标系中梯度的表达式

梯度的定义与坐标系无关，但梯度的具体表达式与坐标系有关。在直角坐标系中，由方向导数的计算公式 (1-7)，可得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \\ &= \left(a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cdot (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) \\ &= \mathbf{G} \cdot \mathbf{a}_l = |\mathbf{G}| \cos(\mathbf{G}, \mathbf{a}_l) \end{aligned} \quad (1-9)$$

式中， $\mathbf{G} = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}$ ，是与方向 l 无关的矢量。从式 (1-9) 可以看出，当方向 l 与矢量 $\mathbf{G}$ 的方向一致时，方向导数的值最大，且等于矢量 $\mathbf{G}$ 的模 $|\mathbf{G}|$ 。根据梯度的定义，可得到直角坐标系中梯度的表达式为

$$\text{grad} u = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-10)$$

梯度的性质：

- 1) 标量场 $u(M)$ 的梯度是一个矢量场，通常称 $\text{grad} u$ 为标量场 u 所产生的梯度场。
- 2) 标量场 $u(M)$ 中，在给定点沿任意方向 l 的方向导数等于梯度在该方向上的投影。
- 3) 标量场 $u(M)$ 中每一点 M 处的梯度，垂直于过该点的等值面，且指向 $u(M)$ 增加的方向。

3. 哈密顿算子

哈密顿 (W.R.Hamilton) 引进了一个矢性微分算子 ∇ (读作 “del” 或 “Nabla”)，在直角坐标系中

$$\nabla = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1-11)$$

算子 ∇ 是一个运算符号，在运算中具有矢量和微分的双重性质。算子 ∇ 的三种基本运算为

∇u 、 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 和 $\nabla \times \mathbf{F}$ ，在直角坐标系中的运算规则为：

$$\nabla u = \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u = a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} + a_z \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1-12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \left(a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (a_x F_x + a_y F_y + a_z F_z) \\ &= \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1-13)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \\ &= a_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + a_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + a_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1-14)$$

因此，标量场 u 的梯度可用哈密顿算子 ∇ 表示为：

$$\text{grad } u = \nabla u \quad (1-15)$$

这表明：标量场 u 的梯度可认为是算子 ∇ 作用于标量函数 u 的运算。

4. 梯度的基本运算公式

设 C 为常数， u 、 v 和 f 为标量函数，则梯度有如下基本运算公式：

$$\nabla C = 0 \quad (1-16)$$

$$\nabla (Cu) = C \nabla u \quad (1-17)$$

$$\nabla (u \pm v) = \nabla u \pm \nabla v \quad (1-18)$$

$$\nabla (uv) = u \nabla v + v \nabla u \quad (1-19)$$

$$\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2} \quad (1-20)$$

$$\nabla [f(u)] = \frac{df}{du} \nabla u \quad (1-21)$$

例 1-2 已知 $\mathbf{R} = a_x (x - x') + a_y (y - y') + a_z (z - z')$ ， $R = |\mathbf{R}|$ 。求证：

$$(1) \nabla R = \frac{\mathbf{R}}{R};$$

$$(2) \nabla f(R) = -\nabla' f(R)$$

其中， ∇ 是对 x 、 y 、 z 运算， ∇' 是对 x' 、 y' 、 z' 运算。

解：(1) 将 $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ 代入式 (1-12)，得

$$\begin{aligned} \nabla R &= a_x \frac{\partial R}{\partial x} + a_y \frac{\partial R}{\partial y} + a_z \frac{\partial R}{\partial z} \\ &= \frac{a_x (x - x') + a_y (y - y') + a_z (z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = \frac{\mathbf{R}}{R} \end{aligned}$$

(2) 根据梯度的运算公式 (1-21)，得到

$$\nabla f(R) = \frac{df(R)}{dR} \nabla R = \frac{df(R)}{dR} \frac{\mathbf{R}}{R}$$

而

$$\nabla' f(R) = \frac{df(R)}{dR} \nabla' R = \frac{df(R)}{dR} \frac{-a_x (x - x') - a_y (y - y') - a_z (z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

$$= -\frac{df(R)}{dR} \frac{R}{R}$$

故得

$$\nabla f(R) = -\nabla' f(R)$$

此式表明, 在处理相对坐标的函数的梯度运算时, 算子 ∇ 与算子 ∇' 可以互换, 但必须改变算子前面的正负号。

例 1-3 设点电荷 q 位于坐标原点, 在周围空间任一点 $M(x, y, z)$ 处产生的电位为

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon r}$$

式中, ϵ 为介电常数, $\mathbf{r} = a_x x + a_y y + a_z z$, $r = |\mathbf{r}|$ 。试求电位 ϕ 的梯度。

解: 根据梯度的运算公式 (1-21), 得

$$\nabla \phi = \nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon r} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \nabla r = -\frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$$

而点电荷 q 产生的电场强度 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r}$, 故有

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi$$

此式表明, 静电场中的电场强度等于电位的负梯度。

1.3 矢量场的通量与散度

为了研究矢量场的空间变化规律, 引入了矢量场的散度和旋度的概念。这一节将研究矢量场的散度, 下一节研究矢量场的旋度。

1.3.1 矢量场的通量

通量的定义

设 S 为一有向曲面, 其正侧的单位法线矢量为 $\mathbf{n}$ (如图 1-5 所示), 则矢量场 $\mathbf{F}$ 在曲面 S 上的积分

$$\Psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1-22)$$

称为矢量场 $\mathbf{F}$ 通过曲面 S 的通量。例如: 在电场中, 电位移矢量 $\mathbf{D}$ 在某一曲面上 S 的面积分就是矢量 $\mathbf{D}$ 通过该曲面的电通量; 在磁场中, 磁感应强度 $\mathbf{B}$ 在某一曲面上 S 的面积分就是矢量 $\mathbf{B}$ 通过该曲面的磁通量。

在直角坐标系中

$$\begin{aligned} d\mathbf{S} &= a_x dS_x + a_y dS_y + a_z dS_z \\ &= a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy \end{aligned}$$

则通量可以写成

$$\Psi = \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S F_x dydz + F_y dzdx + F_z dxdy \quad (1-23)$$

如果 S 是一闭合曲面, 则通过闭合曲面的总通量可表示为

$$\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1-24)$$

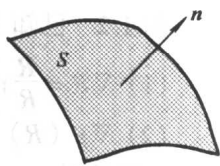


图 1-5 面元的法向

对于闭合曲面，通常规定曲面 S 的外法线方向为面积元 dS 的方向。

通量的物理意义：

由通量的定义可知，若 $\mathbf{F}$ 从面积元 dS 的负侧穿到 dS 的正侧时， $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{n}$ 相交成锐角，则通过面积元 dS 的通量为正值；反之，若 $\mathbf{F}$ 从面积元 dS 的正侧穿到 dS 的负侧时， $\mathbf{F}$ 与 $\mathbf{n}$ 相交成钝角，则通过面积元 dS 的通量为负值。式 (1-24) 中的 Ψ 则表示从曲面 S 内穿出的正通量与从曲面 S 穿入的负通量的代数和，即穿出曲面 S 的净通量。

1) 当 $\Psi > 0$ 时，穿出闭合曲面 S 的通量多于穿入的通量，此时闭合曲面 S 内必有发出通量线的源，称之为正源。例如，静电场中的正电荷就是发出电力线的正源。

2) 当 $\Psi < 0$ 时，穿出闭合曲面 S 的通量少于穿入的通量，此时闭合曲面 S 内必有接受通量线的源，称之为负源。例如，静电场中的负电荷就是接受电力线的负源。

3) 当 $\Psi = 0$ 时，穿入闭合曲面 S 的通量等于穿出的通量，此时闭合曲面 S 内正源与负源的代数和为零，或闭合曲面 S 内无源。

1.3.2 矢量场的散度

在矢量场中，通过闭合曲面 S 的通量由闭合曲面 S 的通量源所决定。但是，通量是一个积分量，描述的是一定范围内的源与净通量之间的关系，而不能反映场域内的源分布情况。例如，穿过某一闭合曲面 S 的净通量为零，只表明该闭合曲面内的正源与负源的代数和为零，并非该闭合曲面内一定没有源分布。为了研究矢量场中每一点处的场与源之间关系，需要引入矢量场的散度的概念。

1. 散度的定义

在矢量场 $\mathbf{F}$ 中的任一点 M 处作一个包围该点的任意闭合曲面 S ，当 S 所限定的体积 ΔV 以任意方式趋近于零时，若比值

$$\frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V}$$

的极限存在，则称此极限为矢量场 $\mathbf{F}$ 在点 M 处的散度，并记作 $\text{div} \mathbf{F}$ ，即

$$\text{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} \quad (1-25)$$

从散度定义可知：

1) $\text{div} \mathbf{F}$ 表示在矢量场中任意点 M 处穿出单位体积的净通量，所以 $\text{div} \mathbf{F}$ 描述了通量源的密度。

2) 在矢量场中的点 M 处，若 $\text{div} \mathbf{F} > 0$ ，则该点有发出通量线的正源；若 $\text{div} \mathbf{F} < 0$ ，则该点有接受通量线的负源；若 $\text{div} \mathbf{F} = 0$ ，则该点无源（如图 1-6）。

3) 矢量场 $\mathbf{F}$ 的散度是一个标量场，通常称 $\text{div} \mathbf{F}$ 为矢量场 $\mathbf{F}$ 所产生的散度场。

2. 散度在直角坐标系中的表达式

根据散度的定义， $\text{div} \mathbf{F}$ 在 $\Delta V \rightarrow 0$ 的极限过程中与体积元 ΔV 的形状无关。为了导出 $\text{div} \mathbf{F}$ 在直角坐标系中的表达式，可将体积元 ΔV 取为以点 $M(x, y, z)$ 为中心的一个无限小的直角六面体，各边的长度分别为 Δx 、 Δy 、 Δz ，各面分别与各坐标面平行（如图 1-7 所示）。矢量场 $\mathbf{F}$ 穿出该六面体的表面 S 的通量

$$\Psi = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{前}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{后}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{左}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{右}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{上}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{下}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

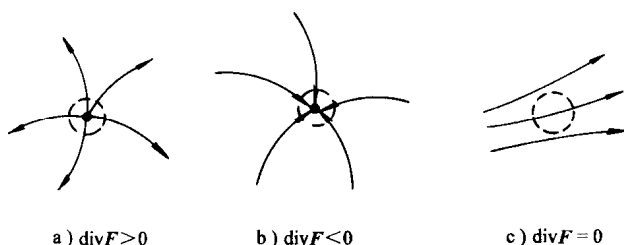


图 1-6 散度的意义

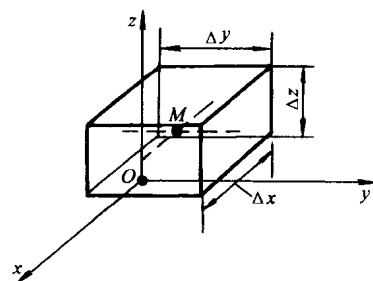


图 1-7 直角坐标系中的体积元

在计算前、后面上的面积分时, F_y 、 F_z 对积分没有贡献, 并且由于六个面均为无限小, 所以

$$\int_{\text{前}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (1-26)$$

$$\int_{\text{后}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx -F_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) \Delta y \Delta z \quad (1-27)$$

根据泰勒定理

$$\begin{aligned} F_x \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) &= F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_x(x, y, z)}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \dots \\ &\approx F_x(x, y, z) + \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \\ F_x \left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z \right) &= F_x(x, y, z) - \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_x(x, y, z)}{\partial x^2} \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 + \dots \\ &\approx F_x(x, y, z) - \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \end{aligned}$$

所以式 (1-26) 和 (1-27) 可写为

$$\int_{\text{前}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx F_x(x, y, z) \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2}$$

$$\int_{\text{后}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx -F_x(x, y, z) \Delta y \Delta z + \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{2}$$

于是得到

$$\int_{\text{前}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{后}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \approx \frac{\partial F_x(x, y, z)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$