

数 学 分 析

(一)

复旦大学数学系 编著

上海科学技术出版社

数 学 分 析

(一)

(試用本)

复旦大学数学系 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书系复旦大学数学系数学专业革新教材之一。内容包括：极限論、微分学、积分学、级数論等四篇。可作綜合大学数学专业数学分析課程的教科书，計授 158 学时，亦可作高等院校有关专业的参考书。

数 学 分 析 (一)

(試 用 本)

复旦大学数学系 編著

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

上海市印刷五厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 13 字數 307,000

1960 年 5 月第 1 版 1961 年 3 月第 3 次印刷

印數 20,551—26,550

統一書号：13119·355

定 价：(十)1.45元

編輯說明

我們受到全國持續躍進的大好形勢的鼓舞和推動，積極響應了黨的號召，在兩年來教育大革命已經取得偉大成績的基礎上，掀起了一个聲勢浩大的教學改革的群眾運動。通過這個運動，我們揭露了現在教學體系、教學內容和教學方法上陳舊落後的狀況，抓住訂方案、編大綱、寫教材、搞試驗等重要環節，試圖建立一套以馬克思列寧主義、毛澤東思想為指導的、反映現代科學發展水平的、理論聯繫實際的新的教學體系和內容，以及與之相適應的教學方法，使培養人才的工作更好地貫徹黨的社會主義建設總路綫的精神。

作為這種新的探索和嘗試，我們在教學改革運動中，師生結合，提出了“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”，編寫了一套可供綜合大學數學專業試用的基礎課程教材。全套教材包括數學分析(一)、數學分析(二)、泛函分析、高等代數、綫性規劃和計算實習、計算數學、數理邏輯與控制論、常微分方程、數學物理方程、一般力學、連續介質力學、統計數學(包括信息論)等十二種，尚有物理學一種，因力量所限，未能及時編出。

根據“關於綜合大學數學專業課程革新的建議”的精神，我們力圖使這套教材具有以下幾個特點：

一、在選材上，注意克服資產階級教育思想的影響，體現為社會主義建設服務和反映現代科學發展的要求。中國數學會提出的“數學發展的方向必須以解決尖端技術和重大工程、現代物理、自動化、國民經濟和大量計算任務中的數學問題為綱”，具體地說明了社會主義建設和現代科學發展對數學的要求，我們即以此作為選材的主要標準，同時，也考慮到基礎課的某些特殊要求，適當注

意了根据理論与实践之間的直接联系与間接联系,当前需要与长远需要等关系,来确定材料的取舍和不同材料的主次安排。根据这个精神,我們精簡了原来基础課内容中一部分不必要的古典内容,添加了一部分現代材料,还增加了一些新課程。

二、在材料处理上,注意克服过去課程設置各自为政、互不联系的缺点,体现科学知識的綜合与分类的辯証統一的关系。特别是近年来,边缘学科大量出現,科学发展在原有基础上愈来愈明显地趋向新的更高级的綜合,我們想力求使这套教材适应这个趋势。

具体說来,对那些条件已經成熟的、可以綜合处理的内容,即加以統一处理,例如将泛函分析与实变函数、积分方程以及綫性代数中的部分内容統一处理,在泛函分析中加以綜合;对那些綜合趋势已經比較明显,但独立設課条件尚不成熟的,也分別情况,注意在有关課程間建立密切的有机联系,若干材料还重新另行配置,例如原来理論力学中振動理論的一部分内容,这次就移到常微分方程中去了。

三、在材料的处理与闡述上,以辯証唯物主义观点为武器,破除形而上学和唯心主义对数学教学的影响。数学的研究对象是客观世界的量的侧面,所以它具有較多的抽象性,在研究方法上也較多地运用邏輯上的演繹推証。这些特点,本来应该有利于深刻地闡明問題的本質,但唯心主义者却总是加以歪曲,企图在引出抽象概念时,掩盖其实践来源,在形式論証中,避免闡述問題的本質。在这套教材中,我們力求消除这些唯心主义观点的影响。具体說来,对某些与生产实践有着更加直接联系的課程(如数学物理方程),既吸收已經严格建立数学理論的材料,也采用在实践中有广泛应用而理論上尚未成熟的材料,重新加以組織,恢复这門課程本来的生动活潑的面貌。各門課程中,对重要数学概念与問題的引进,都尽量闡明它們的直接和間接的实践来源;闡述論証过程中,

插入若干必要的描述性材料；得到的結論，也闡明它在實踐中直接和間接的作用。本學期我系幾門主要基礎課程，都初步做到了減少學時、提高質量，據了解，主要是在教學過程中初步體現了這個精神。因此，根據我們一些不成熟的經驗，要徹底解決這個問題，除在教材內容上盡量克服這些唯心主義觀點的影響以外，還要注意在教學方法中消除這些影響。

徹底實現教學改革，建立一套新的體系，是一個艱巨複雜的任務，也需要一個較為長期的時間來摸索。我們所作的一些嘗試，僅僅是個開端，既受到思想水平和科學水平的限制，又缺乏較充分的實踐經驗，某些課程的教材，還是在師生結合、邊學邊寫的情況下編出來的。因此不論在處理原則上或者在處理方法上都還不夠成熟。有不少問題，例如如何在教材中反映我國社會主義建設實際中所提出的數學問題、如何在有關各課程間建立更密切的有機聯繫等等，在編寫過程中，也還把握不定，處理不盡適當。我們懇切地希望同志們批評和指正。

上海科學技術出版社和商務印書館上海印刷廠對這套教材的迅速出版，給了極大的支持，我們在這裡表示衷心的感謝。

復旦大學數學系

1960年5月

序

本教材共分极限論、微分学、积分学和級数論等四篇，包括原来一、二年級数学分析和解析几何的基本內容。它是最重要的一門基础課。

目前已出版的数学分析教材，在內容和形式上都还存在着一些缺陷，例如各种概念互不連貫，系統比較零乱，問題的实质不太明显，存在重复、繁瑣和陈旧的現象，这样，使低年級同学在学习上产生較大的困难。

针对以上这些問題，并根据多快好省培养人材的方針和創造性教学的經驗，力求使本教材能够反映出以下几个特点：

1. 統一处理現有材料，加强課程的系統性，将整个課程分为极限論、微分学、积分学、級数論等四大篇，对实数和复数、一元函数和多元函数、各种积分等加以統一处理。例如，在微分学中同时叙述一元函数和多元函数，这样，既避免了內容上的重复，又加强了各部分間的联系。又如将解析几何基本內容并入本課程后，就能运用分析的方法来处理几何問題，也能使分析学的許多概念获得几何解釋。

2. 重要概念的引进力求来自实际，闡述时注意突出它的现实背景与实质，并运用最新的观点自然地引入。在极限概念的引进中，是从实例出发，抓住“愈来愈接近”的特性，引出邻域的概念，再从邻域引入极限， $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\eta$ 的方法是作为一种自然的表述，这样既突出了本质，又加强了 $\varepsilon-N$ 和 $\varepsilon-\eta$ 的基本訓練。研究极限是从一般点列出发再深入到数列。又如从速度問題引进微分，

从质量引进积分。对积分論的講授則根据到学生接受能力,先講述定积分,然后再用一般的“和式极限”統一概括种种积分,反映它們的本質和相互間的关系。对有些定理,可把它視為某个概念的自然結果,就能把握住它們的本質,例如从可导的定义就可以看出不連續的必不可导,也就是可导的必定連續,而不需要把它作为一个定理花一定的篇幅来論証一遍。

3. 在內容处理上,对一些在理論上和方法上作用不大的枝节問題及純粹是形式上的繁瑣公式,全部删减替换。例如在多元复合函数求高阶偏导数的問題中,只要闡明求导方法,完全沒有必要引出整篇的公式。另外,实数理論全部删去,这样就使得重点突出,既节省時間,又易于掌握。

4. 增加了緒論部分,使中学生在未接触高等数学以前,就能对高等数学有个大体的了解,特別是了解高等数学研究的特点,作好思想准备,迎接新的学习任务。

由于数学专业已經開設計算数学和計算实习等課程,因此在本教材中就不再講述有关近似計算的內容。另外,本教材的例題可能少了一些,在习题課上将加强这方面的訓練。

因此,我們认为,根据以上的办法本課程在一年內(158学时)即可講授完毕,合乎多快好省的要求。

复旦大学数学系数学分析(一)編写小組

1960年5月

目 录

序

緒論	1
----	---

第一篇 极 限 論

第一章 变量与函数	9
§1 变量与函数	9
§2 平面上的直綫与曲綫方程	21
§3 曲面方程	31
第二章 极限	54
§1 极限的概念	54
§2 数列极限的性质和运算	61
§3 有关数列收敛的若干定理	66
§4 函数极限	73
§5 連續函数	81
§6 閉区間連續函数的性质	87
§7 多元(二元)函数及复变函数的极限	93
§8 无穷小量、无穷大量阶的比较	99

第二篇 微 分 学

第一章 导数与微分	102
§1 导数与微分的引进	102
§2 简单函数的导数	110
§3 求导法则	113
§4 高阶导数与高阶微分	122
第二章 微分学基本定理	132
§1 中值定理	132
§2 洛必达法则	136

目 录

§3 泰勒公式.....	140
第三章 导数的某些应用.....	146
§1 函数的上升、下降与极值.....	146
§2 一元函数作图法.....	153
§3 隐函数存在定理,函数相关.....	162
§4 限制极值及其应用.....	175
§5 导数在空间曲线及曲面上的一些应用.....	182
第三篇 积 分 学	
第一章 定积分概念.....	190
§1 定积分问题的提出及定积分的定义.....	190
§2 可积分的充分必要条件.....	193
§3 可积函数类.....	197
§4 可积函数的性质.....	198
第二章 定积分和不定积分.....	203
§1 牛顿-莱布尼兹公式,原函数.....	203
§2 积分的计算.....	207
§3 含参变量的积分.....	225
第三章 定积分的应用及各种积分的概念.....	231
§1 曲线的弧长.....	231
§2 平面图形的面积.....	235
§3 曲面的面积.....	239
§4 几何体的体积.....	242
§5 各种不同形式积分的定义及性质.....	245
第四章 各种积分的计算及应用.....	256
§1 二重积分的计算.....	256
§2 三重积分的计算.....	270
§3 曲线积分的计算.....	280
§4 曲面积分的计算.....	284
第五章 各种积分之间的联系.....	291
§1 格林公式.....	291

目 录

§2 奥斯特洛格拉得斯基公式	294
§3 斯托克斯公式	297
§4 曲线积分和道路的无关性	301
第六章 有界变差函数与黎曼-司底尔吉司积分	306
§1 有界变差函数	306
§2 黎曼-司底尔吉司积分	309
第四篇 无穷级数和广义积分	
第一章 数项级数	321
§1 级数的收敛性	321
§2 正项级数	324
§3 绝对收敛和条件收敛	328
§4 亚贝尔判别法和狄利克莱判别法	330
§5 级数乘法	333
第二章 广义积分	335
§1 无穷限积分	335
§2 无界函数的积分	344
§3 广义重积分	348
第三章 函数项级数 含参变量广义积分	353
§1 函数项级数及其一致收敛性	353
§2 一致收敛的判别法	358
§3 一致收敛级数的基本定理	360
§4 含参变量的广义积分	364
第四章 幂级数	373
§1 幂级数的收敛半径	373
§2 幂级数的重要性质	377
§3 初等函数的展开, 求 π 的近似值	380
第五章 三角级数和富里埃级数	386
§1 三角级数	386
§2 富里埃级数和它的展开	389
§3 狄尼判别法和狄利克莱-约当判别法	399

緒 論

本书包括了数学发展过程中解析几何的一部分和微积分的主要内容。从数学历史来讲，微积分的产生标志着从初等数学到高等数学的飞跃。高等数学的研究对象和方法有自己明显的特点。高等数学和初等数学虽然有許多相同的地方，但也存在着許多本质上的差别。我們在这里准备淺显的說明一下高等数学研究的对象和方法具有哪些主要的特点，高等数学和初等数学的联系与差别，以及我們学习高等数学时思想上需要明确的一些主要問題，以便讀者一开始就能密切地注意到这些問題。

高等数学研究的客觀对象和方法具有哪些主要特点呢？

讓我們来看一看数学发展的历史。十六世紀，人类社会由封建主义向資本主义过渡，社会生产力得到了巨大的发展。机械学、航海学、物理学、力学提出了許多新的問題，如：运动着的物体的速度和它的运动規律有怎样的关系，天体是沿着怎样的軌道运行的，不規則图形的面积怎样計算等等。这些問題就要求有新的数学工具来解决，我們可以从下面几个具体例子來說明。

〔例 1〕 設物体运动規律是

$$s = t^3,$$

s 是物体运动的路程， t 是經過的时间；我們要求出 $t=1$ 秒时物体的瞬时速度是多少。

利用初等数学的知識，很容易計算出某一段時間間隔內这个物体运动的“平均速度”，那么，我們就从研究平均速度入手。但不能只計算一个或几个平均速度，而要有选择地計算一連串的平均

速度，觀察它們變化的趨勢。例如先算出 1 秒到 1.5 秒間的平均速度

$$\bar{v}_1 = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{3.375 - 1}{0.5} = 4.750 \text{ 米/秒},$$

再算出 1 秒到 1.2 秒間的平均速度

$$\bar{v}_2 = \frac{1.728 - 1}{0.2} = 3.640 \text{ 米/秒},$$

繼續算下去，得到一連串的平均速度：

1 秒到 1.1 秒間的平均速度 $\bar{v}_3 = 3.310$ 米/秒，

1 秒到 1.01 秒間的平均速度 $\bar{v}_4 = 3.030$ 米/秒，

1 秒到 1.001 秒間的平均速度 $\bar{v}_5 = 3.003$ 米/秒，

.....

可以看出，平均速度 $\bar{v}$ 隨着時間間隔的變化而變化。當時間

間隔取得越小時， $\bar{v}_n$ 就越接近於我們要尋求的答案。從上述平均速度的趨勢看來， $t=1$ 秒時的瞬時速度大體上是 3 米/秒。

[例 2] 某個工廠製造一種鐵盒子時提出了這樣一個問題：邊長 1 分米的正方形原材料（圖 0-0-1），剪去陰影部份做一個高為 x 的無蓋小盒，問 x 取怎樣的

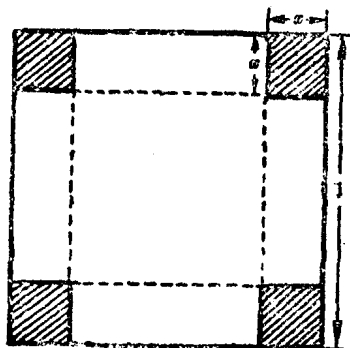


圖 0-0-1

尺寸才能使盒的容積最大？

不難得出容積 V 和盒高 x 滿足以下公式：

$$V = x(1-2x)^2.$$

當取 $x = \frac{9}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ (分米) 時，得

$$V = 0.0045, 0.0160, 0.0370, 0.0720, 0.0716 \text{ (分米}^3\text{)}.$$

这些容积 V (图 0-0-2) 随 x 的变化而变化, 当 x 由大变小时, V 相应地由小到大再由大到小。从而, 我們可以看出最大体积 V 大体上是出现在 $x = \frac{1}{5}$ 及 $x = \frac{1}{7}$ 之間。如果在 $x = \frac{1}{5}$ 及 $x = \frac{1}{7}$ 之間再取一串数值, 算得更細些, 那么我們对于什么时候容积最大, 会看得更准确些。

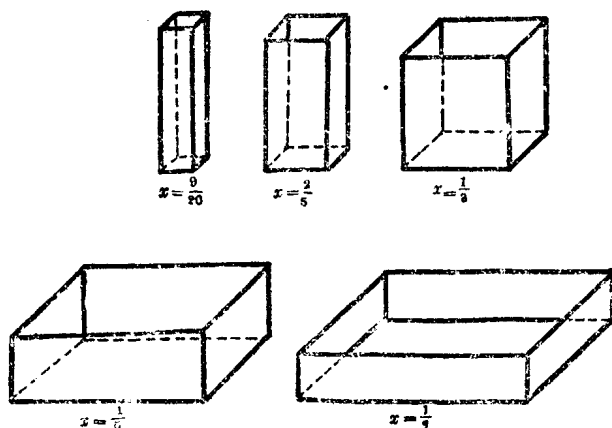


图 0-0-2

[例 3] 現代科学技术常要求我們計算許多不規則图形的面积(图 0-0-3)。当然, 越不規則, 計算起来越复杂。我們来計算一个

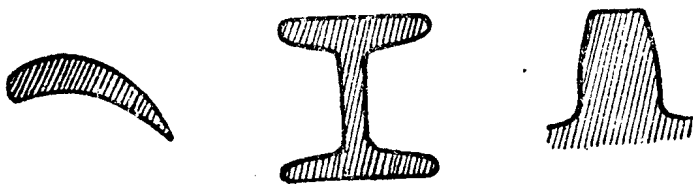


图 0-0-3

較为简单的叫做“曲边梯形”的面积作为例子, 曲边是 $y = x^2$ 的一部分(图 0-0-4)。

利用初等数学中的方法, 我們按照图 0-0-5 中所示作出許多

小矩形, 这些小矩形面积的和近似于我們所求的面积, 用这样的方

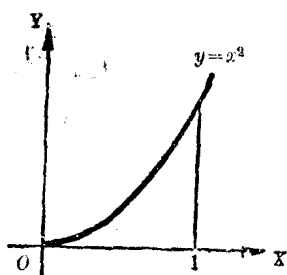


图 0-0-4

法可以作出一連串不同的矩形面积之和 s_n 作为近似值。当然任何一个 s_n 不等于所求的曲边梯形的面积, 但是随着分段愈来愈細, s_n 的变化趋势也愈来愈接近于曲边梯形面积。由图 0-0-5 所示可以看出, 所求面积的值大体上在 $\frac{1}{3}$ 左右。

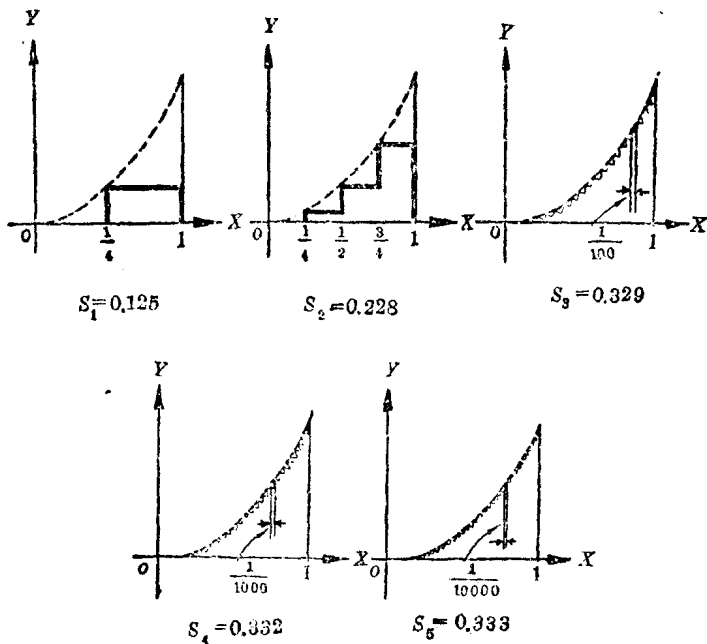


图 0-0-5

从以上三个例子我們看到:

1. 用初等数学工具来解决这一类問題不仅相当麻煩, 而且又不能得到最終的答案, 只能作大体上的估計; 这是因为初等数学只

能在有限的範圍內孤立的來討論問題。例如做盒子吧，用初等數學的辦法，只能作出有限個盒子來加以比較；再如求速度吧，初等數學只能夠考慮某個時間間隔內的平均速度；因此初等數學只能孤立地考慮某個片斷。

2. 這一類問題都要求人們具有這樣的一種觀念，那就是必須在變化的過程中來考慮問題。無論如何不能只考慮一個片斷，而應該考慮前後聯系和變化的發展。例如做盒子吧，決不能停留在有限個盒子上，而應該在容積的變化過程中來找出一個具有最大容積的盒子。

由於大量類似的問題需要解決，從而產生了高等數學。

雖然如此，初等數學在很多的情況下仍舊起着重要的作用，但它總有一定的局限性，從上面的問題中我們也看到了這一點。

高等數學的方法和初等數學的方法根本不同，它要求在變化的過程中來掌握變量的實質。這樣，既需要洞察過程的全貌，又需要作極其精細的分析，往往要研究在某一點極其微小的附近變量變化的情況。作個譬喻，一個好的短跑教練，他不僅要洞察整個跑步過程的全貌（從起點到終點），同時還要對某些地方作極其精細的分析。例如必須仔細分析起跑動作以及終點衝刺動作。

為了作進一步說明，我們再舉一個例子。

[例4] 如同第三個例子一樣，計算下面兩個曲邊梯形的面積，我們得到如圖 0-0-6 所示的一系列矩形面積的和。

這些和數，隨着分割愈來愈密，也就愈來愈接近於所求的面積。從圖中我們看到， $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的那塊曲邊梯形面積，大致上是 2，但 $y = \frac{1}{x^3}$ 的那塊曲邊梯形面積却是越來越大，以致求不出這塊面積。這兩個圖形雖然大致上差不多，但為什麼一個面積可以求出來而另一個面積求不出來呢？

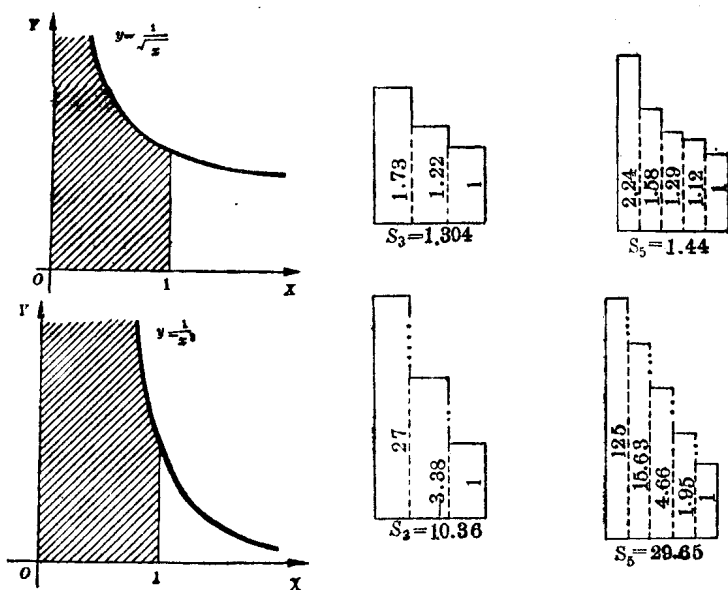


图 0-0-6

这是因为在 0 点出了问题，如果我们不去算 0 到 1 的那块面积，而是算 $\frac{1}{2}$ 到 1，或从 $\frac{1}{3}$ 到 1，从 $\frac{1}{4}$ 到 1 等等之间的面积，可象例 3 那样得到最终的结果。因此我们看到，只要把 0 点除去，计算从某个定数 $\delta > 0$ 到 1 的那块面积，直观上告诉我们，无论对那一个图形这个面积一定是存在的。

因此，为了揭露上述奇怪现象的秘密，就完全有必要非常精细研究 0 点附近曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 以及曲线 $y = \frac{1}{x^3}$ 的性质，也只有经过这样精细的分析，才能彻底弄清楚问题的实质。

从上面所述，我们了解了高等数学的特点和它与初等数学的关系。本书是高等数学的基础，全书分为四篇：

第一篇极限论，首先阐明变量及其相互依赖关系，并运用坐