高等职业技术院校教材

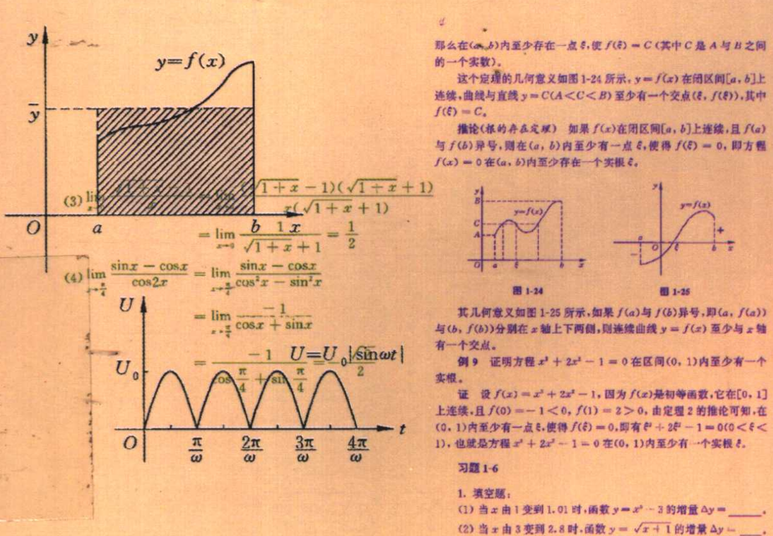
数学

总主编　张圣勤　史　历

高等数学

主　编　张圣勤

副主编　刘中瑞　岳　卫



复旦大学出版社

高等职业技术院校教材

数　　学

总主编　张圣勤　史　历

高等数学

主　编　张圣勤
副主编　刘中瑞　岳　卫

复旦大学出版社

内 容 提 要

本教材共分五册,各册本着"降低理论要求,优化结构体系,加强实际应用,注重能力培养"的原则,在结构处理上和内容安排上力求做到学习理论知识与培养能力相结合,各册中还选配了大量的例题和习题.

本册是本教材中的一册,共分八章,分别介绍函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、积分、定积分、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换等内容.

本册可作为招收初中毕业生的五年制和招收高中毕业生的三年制的高职、高专工科学生的高等数学教材,也可作为成人高职、高专的高等数学教材.

前　　言

欢迎使用这本高职数学教材.本教材是根据现行全日制普通初级中学、高级中学数学教学大纲和五年制高职协作会高职数学教学基本要求,组织全国部分高等职业技术院校长期从事高职教学的教师及部分具有教学经验的重点中专学校数学教师编写的.主要适用于招收初中毕业生的五年制高职工科学生,其中三、四两册还适用于招收高中毕业生的三年制的高职工科学生,也可供高职成人教育和中专教育使用,也可作为一般工程技术人员参考书.

在本教材的编写过程中,作者本着“降低理论要求,优化结构体系,加强实际应用,注重能力培养”的原则,在教学内容上删去了一些繁琐的数学证明,力求把数学内容讲得简单易懂,加入了大量的例题和习题,以便于教师的教学和学生的自学;在结构处理上注意与现行初高中数学教学内容的衔接,结合理工科高职教育的特点照顾到专业教学的需要;在习题的编排上照顾到高职工科多专业的特点,力求做到理解数学知识和加强实际应用相结合,主观题和客观题相结合,学习理论知识与培养能力相结合,并力求做到习题难易搭配得当.为跟上计算机发展的步伐和加强学生的数学应用能力,本书特意增加了应用MATHMATIC软件的实验和数学建模的内容.书中带有*号的内容为选学内容.

本教材共分五册.第一册为初等数学(上);第二册为初等数学(下);第三册为高等数学;第四册为应用数学;第五册为数学实验.本册为高等数学,内容包括初等函数,数列的极限,一元函数的极限与连续,导数与微分,导数的应用,一元函数的积分学,常微分方程,无穷级数和傅立叶级数,拉普拉斯变换等.

本教材由上海电机技术高等专科学校张圣勤和西安航空技术高等

专科学校史历担任总主编. 本册由张圣勤任主编，由深圳职业技术学院刘中瑞和西安航空技术高等专科学校岳卫任副主编. 各章参编人员是：第一章岳卫，第二章西安航空技术高等专科学校赵芳玲，第三章常州机械学校周伟，第四章山东轻工业经济管理学校于江，第五章西安航空技术高等专科学校胡红亮，第六章上海电机技术高等专科学校裘锡林，第七章张圣勤，第八章刘中瑞.

在本丛书的编写过程中，得到了各参编院校各级领导的关心和支持，同时也得到了北京防灾技术高等专科学校高盛义的支持和帮助，并参阅了有关的文献和教材，在此一并表示衷心的感谢.

编者由于时间仓促，加之水平所限，教材中疏漏错误之处在所难免，恳切期望使用本教材的师生多提意见和建议，以便再版时更正.

编　者

2000 年 3 月

目 录

第一章　函数的极限与连续

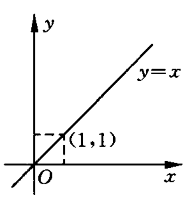
函数是贯穿于高等数学中的一条主线，而函数的极限是学习微积分的理论基础，连续函数又是微积分研究的主要对象. 本章将在复习和加深理解函数有关知识的基础上，引入极限的概念，并建立一些有关极限的运算法则，然后讨论函数的连续性.

§1-1　初 等 函 数

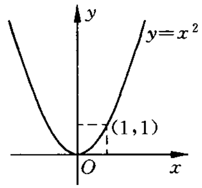
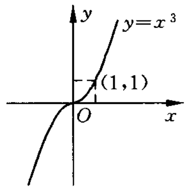
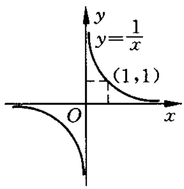
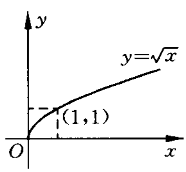
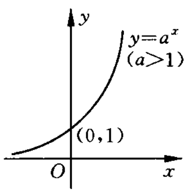
一、基本初等函数

在第一册里，我们学习了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，它们统称为*基本初等函数*；常数作为函数时，也列入基本初等函数. 为便于应用，现将基本初等函数的定义域、值域、图像和主要性质列成表 1-1.

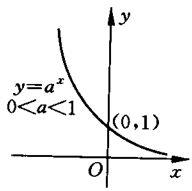
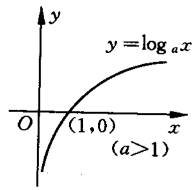
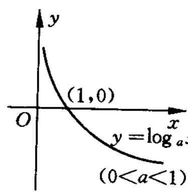
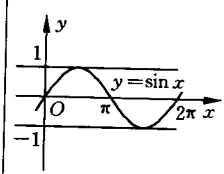
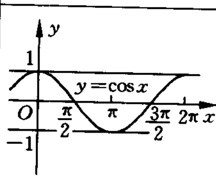
表 1-1

	函　　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

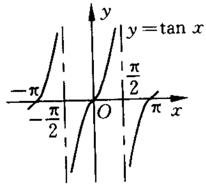
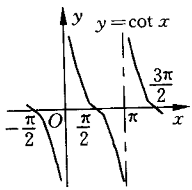
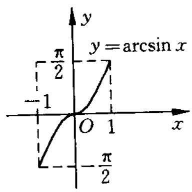
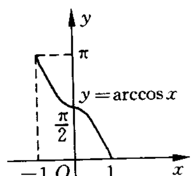
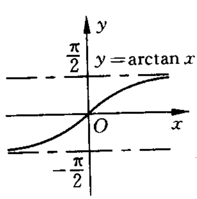
（续表）

	函　数	定义域与值域	图　像	特　性
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)$ $\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{1/2}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加

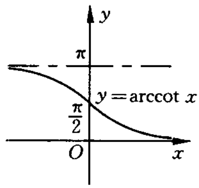
（续表）

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
指数函数	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in Z)$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in Z)$

(续表)

	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
三角函数	$y=\tan x$	$x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k \in Z)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加($k \in Z$)
	$y=\cot x$	$x \neq k\pi(k \in Z)$ $y \in (-\infty, +\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi, k\pi+\pi)$ 内单调减少($k \in Z$)
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界

（续表）

	函 数	定义域与值域	图 像	特 性
反三角函数	$y=\operatorname{arccot}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

二、函数的几种特性

1. 单调性

如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为**单调增加**(或递增)，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调增加**(或递增)区间. 单调增加函数的图像是沿横轴正向上升的(图 1-1).

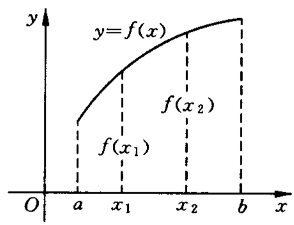


图 1-1

如果函数 $y=f(x)$ 对区间 (a,b) 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为**单调减少**(或递减)，区间 (a,b) 叫做函数 $f(x)$ 的**单调减少**(或递减)区间. 单调减少函数的图像是沿横轴正向下降的(图 1-2).

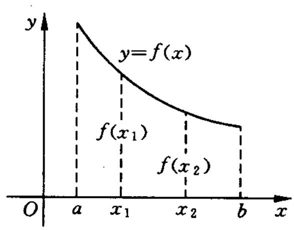


图 1-2

同样，我们可以定义在闭区间或无限区间上的单调增加(或减少)

的函数.

在其定义域内为单调增加或单调减少的函数称为**单调函数**.

例 1 证明函数 $f(x)=a^x(a>1)$ 在其定义域内单调增加.

证 在函数定义域$(-\infty,+\infty)$内任取两点 x_1, x_2,设 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$

因为

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}>1$$

又

$$f(x)>0$$

所以

$$f(x_1)<f(x_2)$$

根据函数单调增加的定义可知,$f(x)=a^x$ 在其定义域内单调增加.

2. **奇偶性**

如果函数 $y=f(x)$ 对于其定义域内的任何 x 值,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$为**偶函数**;如果恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

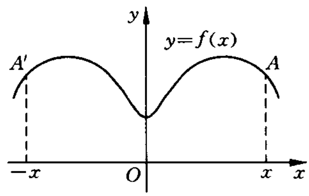


图 1-3

偶函数的图像关于 y 轴对称(图 1-3);奇函数的图像关于原点对称(图 1-4). 无论是偶函数还是奇函数,它们的定义域都关于原点对称.

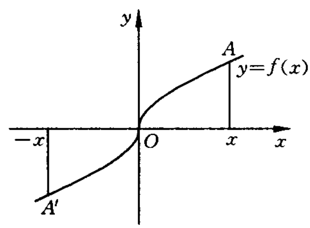


图 1-4

例如,$y=x^2$ 和 $y=\cos x$ 是偶函数,因为对于其定义域内的任意 x,都有 $f(-x)=f(x)$; $y=x^3$ 和 $y=\sin x$ 是奇函数,因为对于其定义域内的任意 x,都有 $f(-x)=-f(x)$;而 $y=3^x$ 既不是偶函数,也不是奇函数,因为对于其定义域内的任意 x, $f(-x)$既不恒等于 $f(x)$,也不恒等于$-f(x)$,所以 $y=3^x$ 是**非奇非偶函数**.

3. 周期性

如果存在一个不为零的常数 l，对于定义域内的一切 x，恒有等式

$$f(x+l)=f(x)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，l 叫做这个函数的周期，这样的 l 一般不只一个，我们把其中的最小正数叫做最小正周期，平常所说的周期一般是指最小正周期.

例如，$y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 是以 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数；$y=\tan(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 是以 $\dfrac{\pi}{\omega}$ 为周期的周期函数.

4. 有界性

如果对属于某区间内的所有 x 值，存在一个正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在该区间上有界；否则，称函数 $f(x)$ 在该区间上无界.

例如，对一切实数 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，这里 $M=1$.

又如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 值都成立；但是 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[1,2]$ 上是有界的，因为存在 $M=1$，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对 $x\in[1,2]$ 恒成立.

三、复合函数

在实际问题中遇到的函数多数不是基本初等函数，而是由几个基本初等函数组合成的较复杂的函数. 例如，函数 $y=\sin x^2$，它可以看成是由三角函数 $y=\sin u$ 和幂函数 $u=x^2$ 组合而成的函数，对这类函数我们有：

定义 如果 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，即

$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的函数值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y（通过 u 的联系）也是 x 的函数. 我们就称此函数是由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数. 记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中，u 称为中间变量.

下面我们举例分析复合函数的复合过程，也就是要看出一个复合函数是由哪些基本初等函数（以及多项式）复合而成的. 正确熟练地掌握复合过程，对后面学习微积分会有很大帮助.

例 2 指出下列函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$； (2) $y=a^{\tan x}$；

(3) $y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2$； (4) $y=\ln\sin x$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-2x-3$ 复合而成；要使 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 有意义，只须 $x^2-2x-3\geqslant 0$，解此不等式得 $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

(2) $y=a^{\tan x}$ 是由 $y=a^u$，$u=\tan x$ 复合而成；因为，当 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 时，$\tan x$ 不存在，所以 $y=a^{\tan x}$ 的定义域为 $\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$k\in Z$.

(3) $y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arccos v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成的；要使 $y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义，只须 $\arccos\dfrac{1}{x}$ 有意义，即 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以，$y=\left(\arccos\dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(4) $y=\ln\sin x$ 是由 $y=\ln u$，$u=\sin x$ 复合而成的；要使 $y=\ln\sin x$ 有意义，须 $\sin x>0$，所以，$y=\ln\sin x$ 的定义域为 $\{x|2k\pi<x<(2k+1)\pi,k\in Z\}$.

注意 (1) 并不是任何两个函数都可以复合成一个函数的，例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数，因为 u 的值域为

$2, +\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，即 u 的任何函数值都出了 y 的定义域.

(2) 分析复合函数的复合过程时，每个层次都应是基本初等函数多项式，直至分解到自变量的基本初等函数或多项式.

四、初等函数

定义 由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的合步骤所构成，并可以用一个解析式表示的函数叫做*初等函数*.

例如，$y=\ln(x+\sin x)$，$y=e^{\cos^2 x}(x^2-x+2)$，$y=$ $\mathrm{csin}\sqrt{1-x^2}-5$，$y=(x^2+3)^{\frac{2}{3}}+\tan x^2-a^{x^3}$ 等都是初等函数.

五、分段函数

在实际问题中，有时我们会遇到一个函数的解析式，需要用两个或个以上的式子来分段给出，这类函数称为*分段函数*.

例 3 求函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

定义域、值域，并作图.

解 因为使函数有意义的 x 取值为切实数，所以其定义域为 $(-\infty,$ $\infty)$；而可以取得的函数值只有 1，0，1，所以其值域为 $\{-1, 0, 1\}$，函数 (x) 的图像如图 1-5 所示.

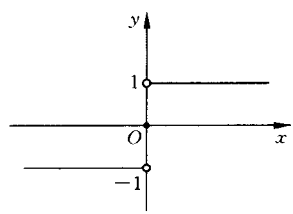


图 1-5

例 4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & -4\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<2\\ 4-x, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$