

Peking University

北京大学
素质教育通选课教材

自然科学类



自然科学中的 混沌和分形

刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 / 编著

北京大学出版社

北京大学素质教育通选课教材

自然科学中的混沌和分形

刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 编著

北京大学出版社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

自然科学中的混沌和分形/刘式达等编著. —北京:北京大学出版社, 2003. 11

(北京大学素质教育通选课教材)

ISBN 7-301-06564-7

I. 自… II. 刘… III. ①混沌学-高等学校-教材②分形理论-高等学校-教材 IV. 0415.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 085993 号

书 名: 自然科学中的混沌和分形

著作责任者: 刘式达 梁福明 刘式适 辛国君 编著

责任编辑: 顾卫宇

标准书号: ISBN 7-301-06564-7/O · 0580

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62752021

电子信箱: zpup@pup.pku.edu.cn

排 印 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

890×1240 A5 5.375 印张 150 千字

2003 年 11 月第 1 版 2003 年 11 月第 1 次印刷

定 价: 10.00 元

内 容 简 介

本书是作者多年来从事该通选课程教学经验的结晶。强调“内在随机性”是混沌的本质,“无特征尺度”是分形的研究对象。全书共分十章,着重从动力学上分析状态的演化,说明混沌是客观存在的一种状态,以及分形是如何描述“大涡旋中包含小涡旋”这种现象的;同时也将和混沌分形相关的标度对称性、螺旋结构、异常扩散、小波变换、斑图、长尾巴分布等内容有机地结合在一起介绍给大家。

本书尽量从物理学入手,由浅入深地描述。读者应侧重了解最新的概念和科学思想。为了便于教学,每章末附有习题。

本书可供大学本科生、研究生作为通选课教材和教学参考书。

前 言

“自然科学中的混沌和分形”作为北京大学素质教育通选课已经讲授了多次。开设此课的目的就是要使本科生了解混沌和分形这个领域的基本思想、科学研究方法,以及我们认识自然界时,从中能获得的新观点。这些观点在其他课程中是很难得到的。由于着重给学生以新思想,因而本书定位在非线形物理学,并以定性分析的方法,把混沌和分形的特征以及结构展现出来。为此,本书每一章的标题都是一个新观点,以便学生了解思想实质,在今后的学习中不断深入和应用。

本书共分十章,第一章说明自牛顿力学以来的 300 多年中,为什么混沌和分形成为 20 世纪末和 21 世纪的学科前沿。第二章告诉大家一个新观点:随机的结果可以在无随机的确定的系统中产生,这就在“确定”和“随机”之间架起了桥梁。第三章用几何的观点和图像来描述自然界多样性的形态。这是一种定性分析的方法,它往往比定量分析方法来得简单有效,可使学生做大量计算之前,就对问题“心中有数”了,物理意义更清楚、踏实了,不至于陷入大量计算的忙碌、盲目的境地,而现在学生掌握定性分析方法太少了。第四章则消除自然科学中常见的一种误区:认为有周期性的输入,必有周期性的输出。这种误区有可能使我们在寻找事物变化的原因时往往在外部找,而不去事物内部找。第五章从命题“如何描述大涡旋中有小涡旋,小涡旋中还有更小涡旋?”出发,引出了分形和分维的概念,说明像这种较难的命题,人们还是可以设法解决的。第六章从争论不休的“为什么维数还会有分数?”的讨论中,从物理上说明分数维是一种不变量,对称性中又增加了一种“标变对称性”。第七章则把混沌和分形与大自然中的美丽的结构和斑图(pattern)联系起来,使自然界普遍存在的螺旋结构、树枝结构、动物的各种斑纹结构等复杂结构的研究开了“窍”。第八章把物理状态的演化从传统的“时间序列演化”转变成“轨

道的演化”，这种想法令人思索。第九章则是物理的实际问题：异常扩散。从“正常扩散”到“异常扩散”，从“正态分布”到小概率的“长尾巴分布”，说明物理学研究的深入，研究侧重点的变化。第十章介绍多尺度分析的工具——小波变换，它将分形概念和状态的突变联系起来。本书第五章由梁福明编写，第十章由刘式适和辛国君编写。其他各章均由刘式达编写。

本书力图通俗易懂，但为了说明难免用到一点微积分，但希望读者尽量掌握新的思想观点。

作 者

2002 年 12 月

目 录

前 言	(1)
第一章 从牛顿到曼德布罗	(1)
§ 1 混沌和分形是学科前沿	(1)
§ 2 非线性的实质	(5)
习题	(7)
第二章 确定的系统可以有确定的结果， 也可以有不确定的结果	(8)
§ 1 非线性系统形态的多样性	(8)
§ 2 驱动力和耗散力的竞争	(12)
§ 3 状态演化的物理过程——伸长(stretch)、 扭转(twist)和折叠(fold)	(16)
§ 4 周期轨道和混沌	(20)
§ 5 线性和非线性敏感初条件的区别	(25)
§ 6 多尺度和 Feigenbaum 常数	(26)
§ 7 概率密度的演化	(29)
习题	(32)
第三章 三维相空间的轨道	(35)
§ 1 相(状态)空间	(35)
§ 2 保守系统、耗散系统和吸引子	(37)
§ 3 定常状态(平衡态)	(38)
§ 4 同(异)宿轨道	(45)
§ 5 混沌轨道	(47)
§ 6 耗散系统中的四种吸引子	(50)
习题	(53)

第四章 周期性的输入不一定是周期性的输出	(57)
§ 1 线性系统和非线性系统的输入和输出	(57)
§ 2 三维相空间中的拟周期运动	(59)
§ 3 锁频和同步、圆映射	(61)
§ 4 拟周期和连分数	(65)
§ 5 高斯映射	(68)
§ 6 随机共振	(69)
习题	(70)
第五章 如何描述大涡旋中有小涡旋	(71)
§ 1 多尺度系统	(71)
§ 2 物理量随尺度的变化	(75)
§ 3 多尺度系统的奇异突变性	(76)
§ 4 非均匀的分形	(80)
习题	(82)
第六章 标度对称性	(85)
§ 1 噪声	(85)
§ 2 分数维布朗运动	(87)
§ 3 物理学中的标度不变性	(89)
§ 4 Navier-Stokes 方程的标度不变性	(92)
§ 5 长尾巴 Levy 分布和长程相关	(94)
§ 6 Haar 标度函数和建筑块	(96)
习题	(98)
第七章 混沌与结构	(99)
§ 1 分形结构	(99)
§ 2 螺旋结构	(104)
§ 3 与 Fibonacci 数有关的自然结构	(105)
§ 4 双螺旋	(107)
§ 5 反应扩散系统中的各种斑图	(111)
§ 6 湍流层次结构	(114)

习题.....	(117)
第八章 时间序列$\neq$轨道	(120)
§ 1 为什么要重构相空间	(120)
§ 2 Takens 定理	(122)
§ 3 混沌和噪声	(124)
§ 4 延迟时间和时间序列长度	(126)
§ 5 时空系统重构的设想	(129)
习题.....	(131)
第九章 随机游动和异常扩散	(132)
§ 1 最简单的随机游动	(132)
§ 2 长程相关引起异常扩散	(135)
§ 3 多尺度游动引起长尾巴分布	(136)
§ 4 随机游动的朗之万方程 和 Fokker-Plank 方程	(139)
§ 5 异常扩散的物理及标度不变性	(141)
习题.....	(143)
第十章 多尺度的分析工具——小波变换	(144)
§ 1 小波变换是显微镜	(144)
§ 2 子波变换的尺度自相似性	(146)
§ 3 子波变换检出 t_0 处信号的突变性	(147)
§ 4 从子波建立映射	(149)
§ 5 高斯类子波所满足的偏微分方程	(151)
§ 6 子波是孤立波吗	(154)
习题.....	(157)
参考书	(158)

第一章 从牛顿到曼德布罗

假如从牛顿(1643~1729)1680年在伦敦皇家学会发表“自然哲学数学原理”算起,直到1963年美国气象学家洛伦茨(E. N. Lorenz)发现了混沌(chaos),1982年美国工程师曼德布罗(B. B. Mandelbrot)出版了第一本有关分形(fractal)的专著《自然界的分形几何》(*The Fractal Geometry of Nature*),物理学已经经历了300多年.这300多年中物理学发生了什么变化呢?

在科幻小说《侏罗纪公园》中写道:物理学在描述某些问题的行为上取得了巨大的成就,例如轨道上运转的行星、向月球飞行的飞船、钟摆、弹簧、滚动的球之类的东西.这都是物体的规则运动.这些东西用所谓的线性方程描述,数学家想解这些方程是轻而易举的事.几百年来他们干的就是这个.可是,还存在着另一类物理学难以描述的行为.例如与湍流有关的问题,机翼上方流动的空气,天气,流过心脏的血液.它们要用非线性方程来描述,它们通常是无法求解的,所以物理学从来没有弄通这类事情,而混沌是描述这类问题的新理论.

§ 1 混沌和分形是学科前沿

300多年中,物理学已经完成了两次革命.第一次是以伽利略、牛顿为代表的17世纪在研究物质、力和运动上的突破.第二次是量子力学、相对论和放射性的发现.开普勒关于行星运动的三个定律、牛顿第二定律,对认识自然界取得了巨大的成就:懂得了轨道上运转的行星规律,向月球发射了飞船,钟摆、弹簧、齿轮、火车、轮船、飞机等都已是日常生活的必要工具.与之相应的是欧几里得几何、数学分析中的微积分.这些成就同时体现出长期统治物理学的观点是确定论,它们只是确定论在物理学、几何学和数学中的具体体现.确定论使物理学以可预言的方式表现各种行为,当时许多科学家把科学

与预测等同起来. 确定论的代表论点是法国科学家的名言: 只要知道初条件就可以决定未来的一切.

对确定论以较大冲击的是量子力学的出现. 在经典力学中动量 p 和位置 q 是独立的, 但是在微观世界中, 光子动量 p 、频率 ν 的光所对应的波长 λ 之间建立起来关系 $\lambda = h/p$, 其中 h 为普朗克常量. 海森伯的不确定关系 $\Delta p \cdot \Delta q \geq h$ 告诉我们无法同时精确测量位置和速度这两个量. 这就意味着, 未来有些量是不能精确预测的.

确定论何以能统治物理学相当长的时间, 是因为它的数学基础是运动方程的存在惟一, 以及初始条件变化一点, 运动方程的解只变化一点的数学定理. 现在我们知道, 这些结果全是局部定理, 目前并不存在对所有时刻都适用的全部定理. 由于物理上过去研究的问题多数仅限于线性方程, 研究的解也仅限于单调、光滑的, 这些定理构成了这些物理问题的基础. 而我们今天遇到的许多是非线性问题, 它们的解是多样的, 甚至是奇异的. 例如天气预报问题, 它是由确定的流体力学的 Navier-Stokes 方程 (对大气还要考虑由于地球旋转引起的科里奥利力) 以及热力学方程控制的. 为简化计, 我们将预报方程写成如下形式:

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (1.1)$$

其中 $f(x)$ 是控制大气运动的确定性的规律, x_0 代表初始时刻的大气状态 (例如今天的温度), 那么由今天温度 x_0 预报明天的温度 x_1 , 由明天温度 x_1 预报后天温度 x_2 , 都是按照同一个方程 (1.1) 去计算的. 但事实证明, 由今天的天气状况 x_0 能预测多少天 ($n=?$) 以后的状态呢? 大约最多 5~6 天. 图 1.1 是气象学家洛伦茨给出的两条曲线.



图 1.1 长期天气预报不可能

从图上看,实线和虚线的初始条件仅差别一点点,最初一两天,由初始条件算出的天气两者相差并不很大.但是5~6天后的天气,两者却差别很大.实线的结果是按照确定的公式(1.1)算出来的,没有错;虚线的结果也是按照确定的公式(1.1)算出来的,也没有错,但两者的结果却不同,因此究竟5~6天后的天气状态怎样?我们事先并不能预测.也就是说,确定的天气预报方程(1.1)可以出现随机的结果,这就是洛伦茨1963年发现的混沌的含义.

因此混沌的发现是对确定论以最大的冲击.过去物理学只知道确定的系统只能出现确定的结果,绝对不会有不确定的结果,而把一些包含随机因素的现象常常归结于外部的噪声所引起的.在物理学、大气科学、生物学、天文学、经济学、化学等科学中早已发现存在貌似随机的行为:天气没有一天是相同的,人脑的脑电图是随机的,DNA序列是无规则的,土卫七的混沌自转……现在我们面临的世界的科学问题是气候变化、生物进化、经济全球化、生态破坏……,每一件事都要跟随机打交道.现在知道了确定性的系统也可以出现随机的结果,那么就可以从确定的系统出发分析这些随机的现象了.牛顿第二定律也可以解释随机的结果,使得牛顿定律更加丰富了它的应用.流体力学满足确定性的Navier-Stokes方程,它可以描述随机的湍流现象.大气运动满足确定性的热力动力学方程组,它可以描述每天都不相同的天气.很多生命现象可以用确定性的反应——扩散方程来描述,许多多样化的不同形态也可以得以解释.生物多样化、宇宙星体分布的复杂性、地震发生的突然性都受到混沌概念的启发.

和混沌对物理学的冲击一样,分形(fractal)概念将“尺度”这个自变量引入物理学中,许多自然现象离开尺度来谈就毫无意义了.例如中国的海岸线长度为18000公里似乎早已成为常识.但分形启发的问题却是海岸线的长度是随着尺度不同而不同的.我们设想,如果中国13亿人每人带一个卷尺,约好明天上午10:00从东北到海南同时去测量中国海岸线的长度,将13亿人测量的结果相加(就是要连接起来),恐怕中国的海岸线长度将比一百万公里还要多,当然这仅仅是一个假设,但能说明问题.为什么是这个结果呢?原来中国的海岸线不是直线,它有大大小小的弯曲,大的弯曲达数百公里(如渤海

湾),小的弯曲只有几厘米.从厘米到数千公里,其差别达 $10^8 \sim 10^9$ 数量级,这是一种无特征尺度的现象.用空中摄影的办法去量海岸线,连数十公里的弯曲都看不出来,但若亲自到海边去量,数厘米的弯曲也量得出来.所以,我们不能提“海岸线有多长?”这类问题,因为海岸线的长度是随尺度变化而变化的.

现在全世界从科学家到政府首脑都在说:气候变暖了.实际上这种说法不正确,因为气候是冷还是暖也是随尺度而变化的.若气候的尺度从季节变化开始算起,一年、十年、百年、千年、万年、十万年……的尺度上都有气候的冷暖.从十万年尺度上讲,现在可能处在冷期,但从百年尺度上却处在暖期.所以,离开尺度谈气候冷暖或旱涝都是毫无意义的.

地震的震级从 1 级到 8 级,而每一级地震的能量相差 30 倍,因此 8 级地震和 1 级地震的能量差 30^7 倍.如果以能量作为尺度,地震发生的次数显然是随着尺度变化而变化的,因为大地震的次数少,然而,一级地震却天天都有.

大气中的大涡旋(像气旋和反气旋)的尺度达千公里,而小涡旋的尺度仅几厘米.为了研究天气预报,科学家人为地不考虑小尺度的涡旋而专门研究大尺度的运动.而为了研究雷阵雨就不考虑大尺度的运动而专门研究中小尺度的运动.台风的尺度是百公里,称为中尺度运动.正像物理学上有宏观物理学和微观物理学之分一样,现在又研究尺度介于两者之间的介观物理学(如纳米尺度).而实际上大气中的大小涡旋是彼此相连的,大涡旋中包括小涡旋,大涡旋动了,小涡旋也必然动.湍流研究的困难之处也正是因为它包含有大大小小不同尺度的涡旋,同样我们也不能提“湍流涡旋的个数有多少?”这样的问题,因为它是随着尺度的变化而变化的.

怎么办呢?分形概念告诉我们,在多尺度系统中,物理量是随尺度而变化的,关键的问题是寻找该系统随尺度变化而不变量.其中分数维(fractal dimension)就是这种不变量.物理学的临界现象中,在临界点处,粒子之间的关联越来越大,从而形成各种尺度的“集团”和“涨落”,所寻找的临界指数也是这种不变量.

正因为混沌和分形与传统的物理学概念相悖,同时很多复杂的

实际问题又迫切地需要这两个概念来充实,所以必然成为当前科学的前沿.

§ 2 非线性的实质

“混沌”和“分形”是两种主要的非线性现象.它不但在确定性和随机性之间架起了桥梁,而且激起了非线性现象的广泛研究.非线性的实质是什么?

20 世纪以来,科学界最关心的一个名词恐怕就是“相互作用”(interaction).全球关注的环境问题不外乎就是人类和环境之间的相互作用.在研究气候变化时,主要考虑海洋和大气之间、海洋和陆地之间的相互作用.在赤道东太平洋出现的厄尔尼诺(El-Nino)现象时,就联想起固体地球自转角速度的变化和海洋、大气之间的相互作用.因为固体地球、海洋和大气之间的角动量是要交换的.当地震发生时,人们自然关注天文因子的影响,形成“天文地球动力学”的前沿课题,研究天文—地球之间的相互作用.

事物之间的相互作用,说明相互联系的事物不是单方面的影响,而是相互影响、相互制约和相互依存的,这就是非线性的实质.

就拿大鱼吃小鱼这件事来说吧,似乎小鱼多了大鱼也会多,这是单方面的影响.但是反过来大鱼多到一定程度,小鱼必然会少,大鱼也自然会少.所以说是相互作用的.若 x 和 y 分别表示大鱼和小鱼的数目,那么, x 和 y 随时间的变化为

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = (\text{大鱼的增长率}) - (\text{大鱼的死亡率}),$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = (\text{小鱼的增长率}) - (\text{小鱼的死亡率}).$$

大鱼和小鱼之间的相互作用表现为:大鱼的增长率既依赖于大鱼的数量,又依赖于小鱼的数量,即

$$\text{大鱼的增长率} = axy,$$

同时,小鱼的死亡率也和 x 及 y 有关,可设

$$\text{小鱼的死亡率} = -bxy.$$

这样,大鱼和小鱼数量的变化可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{dx}{dt} = axy - cx, \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = dy - bxy,\end{aligned}\tag{1.2}$$

其中, cx 表示如果没有小鱼,则大鱼的死亡率和大鱼的数量成正比, dy 表示如果没有大鱼,则小鱼的增长率和小鱼的数量成正比.

数学上(1.2)式中的 x 和 y 是因变量,它们的乘积项 xy 就称为非线性项,或称 x 和 y 之间的“耦合”(couple). 方程(1.2)就称为非线性常微分方程. 方程(1.2)正说明,小鱼 y 多了,大鱼 x 数量就增加;但是大鱼 x 多了,小鱼 y 的数量反而会减少. 若将方程(1.2)中的非线性项去掉,那么结果就只能是小鱼越来越多,大鱼最终全部死掉.

我们虽然还不能去求解方程组(1.2),但从分析已经知道,若是线性方程,解的形态一定是单调的,或者是大鱼死小鱼活,或者是小鱼死大鱼活. 但若是非线性的话,如方程(1.2),大鱼多了小鱼少,反过来小鱼少了,大鱼饿了也要减少;大鱼少了,小鱼又多了起来,这就可能出现大鱼和小鱼数目按一定的周期循环,甚至于会出现数目多少不定的非周期状态. 总之,对非线性系统,形态则不像线性系统那样单调,而是多样的.

在流体力学和大气运动中,非线性的相互作用则表现为另外的形式. 白天太阳将地面加热,因此下层空气比上层空气温度要高,因而形成了温度梯度 $\frac{\partial T}{\partial z}$. 夏天常由这个上下空气的温度差而形成热对流,产生上升运动 w . 若无非线性作用的话,则空气一直上去就不下来了. 但是由于非线性,热空气上升,上面的冷空气向下运动. 这种热空气向上、冷空气向下又反过来降低了当初形成热对流的温度梯度 $\frac{\partial T}{\partial z}$. 因此垂直速度 w 和温度梯度 $\frac{\partial T}{\partial z}$ 的乘积 $w \frac{\partial T}{\partial z}$ 是 w 和 T 相互作用的非线性形式,它称为温度对流. 同样,冬天西伯利亚冷空气南下也会有 $u \frac{\partial T}{\partial x}$ 形式的温度平流. 天气正是由于这种不断的温度平流,造成“没有一天天气是相同”的混沌状态.

同样,分形的产生也必然在非线性系统中.若是长度为一个单位的直线段,不管用什么尺子去度量,量出的结果都是单位 1,最多有一点测量误差.但是,若是海岸线,它有大大小小尺度不同的跨量级的弯曲,那么量出的结果随尺度不同而不同了.海岸线是曲线,这就是非线性.在非线性流体力学系统中,不同尺度大小的涡旋是相互作用的,若大涡旋供给小涡旋能量的话,反过来小涡旋之间的相互作用又会影响大涡旋的能量.

因此,非线性的实质是事物之间的相互作用,非线性的基本特点是产生多样性和多尺度性.混沌和分形只能在非线性系统中产生.

习 题

1. 在你的学科中,有什么现象与随机过程相联系?你是如何解释它的?
2. 你如何理解“海岸线有多长?”这种提法不正确?

第二章 确定的系统可以有确定的结果，也可以有不确定的结果

虽然自然界的随机现象很多，像天气、湍流、气候、El-Nino、地震等，但是，物理学的许多数学模型在过去 300 年中还没有在确定的系统中（如牛顿第二定律的系统中）算出非周期的结果来。混沌最大的贡献就是用简单的模型就可以得到明确的非周期的结果。

早在 1890 年法国著名科学家庞加莱 (Poincaré) 的论文《论三体问题和动力学方程》就提到，二体（例如地球和太阳）运动是周期性的，但是当研究三体（例如海王星、冥王星和一粒星际尘埃）运动就会发现是非常复杂的。正像他所说：图形的复杂性令人震惊，我甚至不想画出来。

§ 1 非线性系统形态的多样性

天气预报方程是一个描述所预报天气状态（如温度、降水、气压等）随时间和空间变化的流体力学和热力学偏微分方程组。但从物理上讲，这个方程组不外乎有三种因素构成：驱动天气变化的因素（如引起对流的上下空气层的温度差）、耗散因素（如空气的黏性）和非线性因素（如前面介绍的温度平流）构成。因此，天气预报方程可以简化成如方程 (1.1) 的简单形式：

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n), \\x_n &\in [0, 1], \quad \mu \in [0, 4],\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中， x_n 是天气状态变量， μ 是系统控制参数。 μx_n 是驱动天气状态由第 n 时刻的 x_n 变到第 $n+1$ 时刻的 x_{n+1} 的驱动因素， $-\mu x_n^2$ 表示耗散因素， x_n^2 表示非线性因素。控制参数 μ 的大小反映了驱动因素和耗散因素的相对大小。