高等学校通用教材

现代控制理论基础

程 鹏 王艳东 编著

XIANDAI KONGZHI LILUN JICHU

北京航空航天大学出版社

高等学校通用教材

现代控制理论基础

程　鹏　王艳东　编著

北京航空航天大学出版社

内容简介

本教材是为希望了解现代控制理论但又受学习时间的限制而不能进行系统学习的读者编写的。

第一篇为线性系统理论，包括系统的可控性与可观测性、状态反馈设计、状态观测器设计以及系统稳定性分析。第二篇为最优控制理论，介绍了无条件约束和有等式约束的最优化问题、连续系统和离散系统最小值原理以及线性二次型指标的最优控制。第三篇为最优估计和滤波，介绍了最小二乘估计和线性最小方差估计；在正交投影的基础上介绍了离散型卡尔曼最优预测方程和最优滤波方程；讨论了滤波发散及克服发散的方法。

本书可供非自动化类专业硕士研究生使用，也可作为自动化类专业本科高年级学生现代控制理论选修课使用。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/程鹏等编著．—北京：北京航空航天大学出版社，2004.6

ISBN 7-81077-470-0

Ⅰ.现… Ⅱ.程… Ⅲ.现代控制理论 Ⅳ.O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 022668 号

现代控制理论基础

程 鹏 王艳东 编著

责任编辑：刘晓明

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(100083) 发行部电话：(010)82317024 传真：(010)82328026

http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net

北京市松源印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本：787×960 1/16 印张：13 字数：291 千字

2004 年 6 月第 1 版 2004 年 6 月第 1 次印刷 印数：3 000 册

ISBN 7-81077-470-0 定价：18.00 元

前 言

目前，自动控制技术已广泛地应用于工农业生产、交通运输和国防建设。指导自动控制系统分析和设计的控制理论也有了很大的发展，在20世纪40和50年代中发展起来的经典控制理论至今仍被成功地应用于单变量定常系统的分析和设计中。在50年代末、60年代初发展起来的现代控制理论具有更广泛的适用性，它可以用于多变量、定常或时变系统，所讨论的问题更复杂和深入。现代控制理论的概念、方法和体系已经渗透到许多学科领域。学科的交叉发展要求高级工程技术人员更多地了解和掌握其他相近学科、专业的知识。因此，一些非控制类专业的硕士生根据论文研究工作和知识结构的需要，选学现代控制理论的基础课程是很必要的。

在现代控制理论的形成和发展的历史上，人们常常提到以下几个著名的成果：系统的可控性、可观测性概念；最优控制中的极小值原理与动态规划方法；卡尔曼递推滤波。编写本教材的目的是向非自动化专业的硕士研究生介绍现代控制理论的基础知识，因此将主要介绍这些基本内容。全书分为三篇，简介如下：

第一篇为线性系统理论，介绍了线性时不变系统，包括系统的动态方程、系统的可控性与可观测性、标准形及传递函数阵的实现、状态反馈设计、极点配置问题、跟踪问题、解耦问题、状态观测器设计以及系统稳定性分析。为了后面两篇的需要，还简单介绍了线性时变系统的基本概念和连续时间系统的离散化问题。

第二篇为最优控制理论，介绍了变分的基本概念、无条件约束和有等式约束的最优化问题、连续系统和离散系统最小值原理、最短时间控制、最少燃料控制、时间和燃料综合控制、线性二次型指标的最优控制、调节器问题以及跟踪问题。

第三篇为最优估计和滤波，估计方法上介绍了最小二乘估计和线性最小方差估计。为了更好地了解卡尔曼滤波的特点，简介了维纳滤波；在正交投影的基础上介绍了离散型卡尔曼最优预测方程和最优滤波方程，讨论了卡尔曼滤波的推广、滤波的稳定性、滤波发散以及克服发散的方法。

本书在取材和阐述方式上，注意了工程性；考虑到授课学时的限制(50学时左右)，在内容上尽量删繁就简，避免过分地引申和扩充；在叙述问题时，力求概念明

确和遵循教学顺序。每篇均安排了一定数量相对比较简单的练习题，它的目的主要是使读者通过练习熟悉所学的知识。本书可供非自动化类专业硕士研究生使用，也可作为自动化类专业本科高年级学生现代控制理论选修课使用。

本书由程鹏（线性系统理论）、王艳东（最优控制理论、最优估计和滤波）合编。这本教材是在北京航空航天大学长期教学的基础上形成的，教研室的汪声远、王纪文等同志都曾致力于“现代控制理论基础”课程和教材的建设工作，他们的经验和成果对本教材的形成起了重要的作用，编者在此表示感谢。

本书在编写过程中参考并汲取了许多院校专家们编写的教科书和习题集，在此表示感谢。

编 者

2003 年 3 月

目 录

第一篇 线性系统理论

第二篇　最优控制理论

第三篇 最优估计和滤波

第一篇　线性系统理论

第 1 章　状态空间方法基础

从控制理论发展历史来看，以奈奎斯特判据、Bode 图以及根轨迹为主要内容的称为经典控制理论；以状态空间方法为主要内容的称为现代控制理论。两者做一简单比较，如表 1－1 所列。

表 1－1　经典控制理论与现代控制理论的比较

类　别	经典控制理论(20 世纪 50 年代前)	现代控制理论(20 世纪 50 年代后)
研究对象	单输入、单输出的线性定常系统	可以是比较复杂的系统
数学模型	传递函数(输入、输出描述)	状态方程(可描述内部行为)
数学基础	运算微积、复变函数	线性代数、矩阵理论
设计方法的特点	非惟一性、试凑成分多，经验起很大作用。主要在复数域进行	设计的解析性，与计算机结合，主要在时间域进行

1.1　系统动态方程的建立

现代控制理论研究的时不变线性系统模型如下：

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{aligned} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{x}$ 为 n 维状态向量，$\boldsymbol{u}$ 为 p 维输入向量，$\boldsymbol{y}$ 为 q 维输出向量；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 分别为 $n\times n$，$n\times p$，$q\times n$ 和 $q\times p$ 的常系数矩阵。通常称 $\boldsymbol{A}$ 为系统矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为输入矩阵，$\boldsymbol{C}$ 为输出矩阵，$\boldsymbol{D}$ 为直接传递矩阵。

当 $p=q=1$ 时，称为单变量系统，否则称为多变量系统。

式(1-1)是一阶线性常系数、常微分方程组，写成了矩阵和向量的形式。式(1-1)称为动态方程式，第一个式子描述了状态变量与输入的关系，称为状态方程式；第二个式子表明了输出量与状态变量、输入量的关系，称为输出方程。

1.1.1 模型的建立

下面通过三个例子说明式(1-1)的建立过程。

例 1-1 设系统表征输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 之间关系的微分方程式为

$$\ddot{y}+2\zeta\omega_n\dot{y}+\omega_n^2 y=\omega_n^2 u$$

试求系统的状态方程和输出方程。

解 取状态变量为 $x_1=y$，$x_2=\dot{y}$。系统的状态方程可写为

$$\dot{x}_1=x_2$$

$$\dot{x}_2=-\omega_n^2 x_1-2\zeta\omega_n x_2+\omega_n^2 u$$

写成矩阵形式

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \omega_n^2\end{bmatrix}u$$

输出方程 $y=x_1$ 也可写成

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

例 1-2 单输入、单输出系统的动态结构图如图 1-1 所示。取图中 x_1,x_2,x_3 为状态变量，试建立系统的状态方程和输出方程。

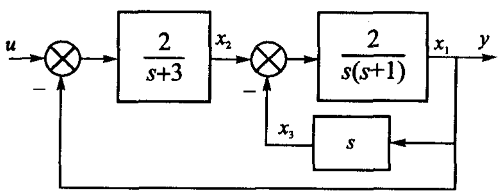

图 1-1 单输入、单输出系统的动态结构图

解 由图中各量的关系可列写出以下的方程式：

$$sx_1(s)=x_3(s) \qquad \dot{x}_1=x_3$$

$$(s+3)x_2(s)=2[u(s)-x_1(s)] \qquad \dot{x}_2+3x_2=2(u-x_1)$$

$$s(s+1)x_1(s)=2[x_2(s)-x_3(s)] \qquad \ddot{x}_1+\dot{x}_1=2(x_2-x_3)$$

将第一式代入第三式，第三式可改写为 $\dot{x}_3=2x_2-3x_3$，令 $\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad x_3)^{\mathrm{T}}$，于是可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-2&-3&0\\0&2&-3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

图 1-1 表示的是单输入、单输出系统，故这里的 $\boldsymbol{B}$ 阵仅有一列，而 $\boldsymbol{C}$ 阵仅有一行。

由动态结构图来写状态方程式时，若传递函数的分子多项式是常数，则一般可以直接取传递函数的输出量及其各阶导数为状态变量。如果传递函数的分母是三阶的，则可以取到三个状态变量，例如图 1-2 所示的系统就可用上述的方法取三个状态变量，即

$$x_1=y,\qquad x_2=\dot{y}=\dot{x}_1,\qquad x_3=\ddot{y}=\dot{x}_2$$

上行中的后两个式子在列写式(1-1)的模型时自然要用到。

当传递函数的分子多项式不是常数时，可以引入中间变量 $v(t)$，将传递函数分解为如图 1-3所示的结构。

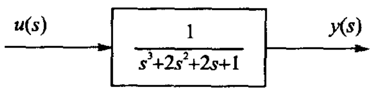

图 1-2　三个状态变量的系统

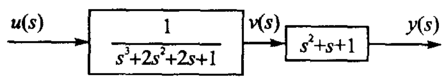

图 1-3　引入中间变量分解传递函数

根据 $v(s)$和 $u(s)$的关系，可取状态变量为：$x_1=v(t)$，$x_2=\dot{v}(t)$，$x_3=\ddot{v}(t)$，进而可写出方程为

$$\dot{x}_1=\dot{v}(t)=x_2,\qquad \dot{x}_2=\ddot{v}(t)=x_3$$

$$\dot{x}_3=\dddot{v}(t)=-2\ddot{v}-2\dot{v}-v+u=-2x_3-2x_2-x_1+u$$

将上式写成向量形式，令 $\boldsymbol{x}=(x_1\quad x_2\quad x_3)^{\mathrm{T}}$，于是可得

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-2&-2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

根据 $y(s)$和 $v(s)$的关系可写出

$$y=\ddot{v}(t)+\dot{v}(t)+v(t)=x_3+x_2+x_1$$

则输出方程为

$$y=\begin{bmatrix}1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

例 1-3　多变量系统结构图如图 1-4 所示，其中 K_1，K_2 都是非零常数；v_1，v_2 是输入量；y_1，y_2 是输出量。试建立系统的状态方程和输出方程。

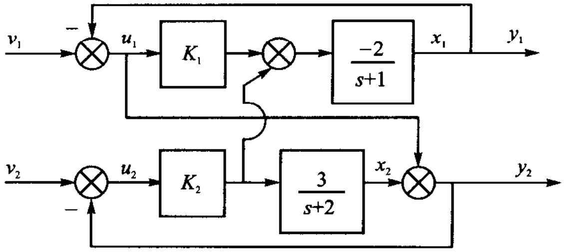

图 1-4 多变量系统结构图

解 根据图 1-4 中所给出的关系，列出方程组如下：

$$\dot{x}_1 + x_1 = -2(K_1u_1 + K_2u_2), \qquad \dot{x}_2 + 2x_2 = 3K_2u_2$$

$$y_1 = x_1, \qquad y_2 = u_1 + x_2$$

$$u_2 = v_2 - (x_2 + u_1), \qquad u_1 = v_1 - y_1$$

消去中间变量 u_1, u_2，得到下列系统的状态方程与输出方程，即

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 2K_1 - 2K_2 & 2K_2 \\ 3K_2 & -2 - 3K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2K_1 + 2K_2 & -2K_2 \\ -3K_2 & 3K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

1.1.2 说 明

在自动控制原理教材中讲述系统微分方程的建立时，归纳了建立系统方程的一般步骤。如果将其中的“消去中间变量”改为“适当选取中间变量及其各阶导数为状态变量（参考例 1-1和例 1-2 及例 1-2 后的说明）”，即可得到状态方程和输出方程。

根据以上状态方程建立的过程可知，状态变量仍是系统中描述系统动态过程的变量，其中有一部分仍是建立描述系统输入、输出关系时消去的中间变量。

由于是“描述系统动态过程”，所以各变量之间不只是函数关系，而是通过微分方程相互联系的。由于状态空间方法是将一阶微分方程组作为模型的，所以这里联系各变量的是一阶微分方程组。

状态变量可以是系统中的某个实际物理量，也可以是不具有物理意义的变量。

如果将系统的动态过程看作能量转换的过程，则状态变量应是描述系统能量变化情况的量，状态变量的数目应当与系统中的储能元件有关。

也可以把状态变量看成是一组描述系统动态的信息量，它和输入（补充了输入）一起就可以完全地决定系统的输出及系统内部的动态信息。因此，引进状态变量后可以比只研究系统输入、输出关系时更加详细地表达系统。

1.2　线性时不变动态方程的解

1.2.1　齐次方程的解

考虑如下形式的向量方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1-2}$$

设式(1-2)的解为 t 的向量幂级数形式，即

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k t^k + \cdots \tag{1-3}$$

式中，$\boldsymbol{b}_i$ 均为 n 维的列向量。将式(1-3)代入式(1-2)中，可得

$$\boldsymbol{b}_1 + 2\boldsymbol{b}_2 t + \cdots + k\boldsymbol{b}_k t^{k-1} + \cdots = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{b}_1 t + \boldsymbol{b}_2 t^2 + \cdots + \boldsymbol{b}_k t^k + \cdots) \tag{1-4}$$

若式(1-3)为式(1-2)的真实解，对所有的 t，式(1-4)均成立，则式(1-4)两边 t 的同次幂的系数向量应相等，故有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_0 \\
\boldsymbol{b}_2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_0 \\
\boldsymbol{b}_3 &= \frac{1}{3}\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_2 = \frac{1}{3\times 2}\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}_0 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{b}_k &= \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{b}_0
\end{aligned}$$

将 $t=0$ 代入式(1-3)中，可知 $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{b}_0$。因此，齐次方程的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k + \cdots\right)\boldsymbol{x}_0 \tag{1-5}$$

式(1-5)等号右端括号里的展开式为 $n\times n$ 的矩阵，将它称为矩阵指数，并记为

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k + \cdots \tag{1-6}$$

于是齐次方程(1-2)的解可表示为

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) \tag{1-7}$$

如果用拉氏变换法解式(1-2)，对式(1-2)两边进行拉氏变换，即

$$\mathrm{L}[\dot{\boldsymbol{x}}] = \mathrm{L}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}], \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

可得

$$\begin{aligned}
s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(s) \\
(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) &= \boldsymbol{x}_0 \\
\boldsymbol{x}(s) &= (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0
\end{aligned}$$

两边取拉氏反变换，可得

$$x(t)=\mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}_0 \tag{1-8}$$

由此可知，矩阵指数也可用下式计算，即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] \tag{1-9}$$

如果对式(1-6)取拉氏变换，可得

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\mathrm{L}[\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}]=\mathrm{L}[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\cdots+\frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k+\cdots]=\\&\frac{\boldsymbol{I}}{s}+\frac{\boldsymbol{A}}{s^2}+\frac{\boldsymbol{A}^2}{s^3}+\cdots+\frac{\boldsymbol{A}^k}{s^{k+1}}+\cdots=\\&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}^k}{s^{k+1}}\end{aligned} \tag{1-10}$$

式(1-10)可看作 s 的负幂展开式，或$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$在 $s=|\infty|$处展开的级数。

由式(1-6)可知，矩阵指数具有以下性质：

① $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}0}=\boldsymbol{I}$；

② $(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t})^{-1}=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}$；

③ $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1+t_2)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t_1}e^{\boldsymbol{A}t_2}$；

④ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A}$；

⑤ $\mathrm{e}^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\mathrm{e}^{\boldsymbol{B}t}$，当且仅当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时才成立。

由式(1-7)可知，齐次方程(1-2)在 t 时刻的状态，仅仅是初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$经过 t 这一段时间转移的结果，或者说初始状态 $\boldsymbol{x}(0)$经过映射变为了 $\boldsymbol{x}(t)$，而描述这一映射关系的就是矩阵指数。所以又把式(1-7)中的矩阵指数称为状态由 $t=0$ 时刻向 $t=t$ 时刻转移的状态转移矩阵。

例 1-4 设系统状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

试求状态方程的解。

解 用拉氏变换求解。先求出矩阵指数，再代入式(1-7)

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}s & -1\\2 & s+3\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\frac{\mathrm{adj}\ (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|\ s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\ |}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\-2 & s\end{bmatrix}=\\&\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\\dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\\dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

将上式进行拉氏反变换，可得

$$e^{At} = L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由式(1 - 7)，状态方程的解为

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

1.2.2　非齐次方程的解

现在讨论下列非齐次方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{1-11}$$

先把式(1 - 11)改写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{Ax}(t) = \boldsymbol{Bu}(t)$$

以 e^{-At} 乘等式两边

$$e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{Ax}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)] = e^{-At}\boldsymbol{Bu}(t)$$

在 0 到 t 之间对上式进行积分，可得

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau$$

再以 e^{-At} 左乘上式两边，可得

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau \tag{1-12}$$

由式(1 - 12)可知，$\boldsymbol{x}(t)$由两部分组成：第一部分是由初值 $\boldsymbol{x}(0)$所引起的状态的变化，它线性地依赖于 $\boldsymbol{x}(0)$，被称为零输入响应；第二部分是由输入 $\boldsymbol{u}(t)$引起的状态的变化，它也是线性地依赖于输入 $\boldsymbol{u}(t)$，被称为零初态响应。

根据式(1 - 12)和式(1 - 1)，容易得到输出 $\boldsymbol{y}(t)$的表达式

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}e^{At}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \boldsymbol{C}e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)d\tau + \boldsymbol{Du} \tag{1-13}$$

同样，也可将 $\boldsymbol{y}(t)$分成零输入响应和零初态响应。

式(1 - 12)也可以用拉氏变换的方法得到。事实上，对式(1 - 12)两边进行拉氏变换，可得

$$s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{Ax}(s) + \boldsymbol{Bu}(s)$$

或

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{Bu}(s)$$

$$\boldsymbol{x}(s) = (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + (s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Bu}(s)$$

对上式两边取拉氏反变换，得

$$x(t) = \mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{x}(0) + \mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Bu}(s)]$$

由于

$$\mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}] = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$$

$$\mathrm{L}^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{Bu}(s)] = \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{（卷积定理）}$$

因此

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{Bu}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

同样得到式(1-12)的结果。

例 1-5 求下列系统的时间响应 $\boldsymbol{x}(t)$ 。其中 u 为单位阶跃输入。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

解 该系统的状态转移矩阵已在例 1-4 中求出，即

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

因此，求单位阶跃下的响应只要计算出式(1-12)中的第二项，即

$$\int_0^t \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} & \mathrm{e}^{-(t-\tau)}-\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} \\ -2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}+2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} & -\mathrm{e}^{-(t-\tau)}+2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[1]\mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

由式(1-12)可得

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-t}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} \quad (t>0)$$

若系统的初始状态为零，即 $\boldsymbol{x}(0)=0$，则这时系统的阶跃响应只有第二项。

1.3 系统的传递函数矩阵

1.3.1 由动态方程求传递函数矩阵

若系统的动态方程如式(1-14)、式(1-15) 所示，即

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} \tag{1-15}$$

对式(1-14)、式(1-15)分别取拉氏变换，可得

$$s\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{Ax}(s) + \boldsymbol{Bu}(s)$$

$$\boldsymbol{y}(s) = \boldsymbol{Cx}(s) + \boldsymbol{Du}(s)$$

由其中第一式解出 $\boldsymbol{x}(s)$，再代入第二式，可得

$$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0)+[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{u}(s) \tag{1-16}$$

仿照传递函数的定义，假设初始状态为零，则式(1-16)可写成

$$\boldsymbol{y}(s)=[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}]\boldsymbol{u}(s)$$

定义由式(1-14)、式(1-15)所描述的系统的传递函数矩阵为

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D} \tag{1-17}$$

式(1-17)中的 $\boldsymbol{G}(s)$ 是一个 q 行 p 列的矩阵，可用来表示系统式(1-14)、式(1-15)的输入和输出之间的关系，即

$$\boldsymbol{y}(s)=\boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{u}(s)$$

将式中的 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}$ 用下式代入

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{\operatorname{adj}\,(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$$

则有

$$\boldsymbol{G}(s)=\boldsymbol{C}\frac{\operatorname{adj}\,(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}=\frac{\boldsymbol{C}\operatorname{adj}\,(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\boldsymbol{D}}{|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|} \tag{1-18}$$

令式(1-18)中的分母为零，就可得到系统的特征方程式

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0 \tag{1-19}$$

显然，系统特征方程的根就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。传递函数阵的极点也一定包含在 $\boldsymbol{A}$ 的特征值集合之中(详细讨论见后)。

例 1-6　设系统的方程为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\qquad y=[1\quad 1]\boldsymbol{x}$$

试求系统的传递函数，并计算特征方程和 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

解　由式(1-17)可计算出系统的传递函数为

$$\boldsymbol{G}(s)=[1\quad 1]\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2+3s+2}[1\quad 1]\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)}[s+1\quad s+1]\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+2}$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式和特征值分别为

$$\begin{vmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{vmatrix}=s^2+3s+2=(s+1)(s+2)$$

$$\lambda_1=1,\qquad \lambda_2=-2$$

传递函数的分母多项式的根即为传递函数的极点，它只有一个。它是 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值中的一个。