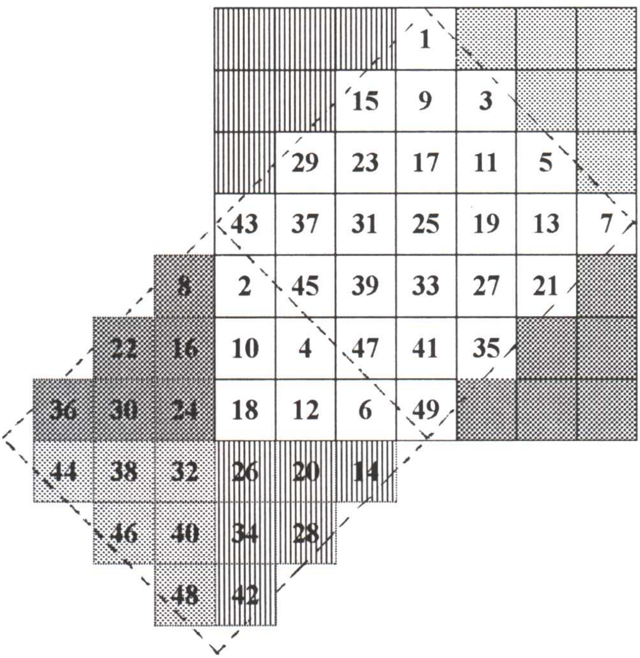
组合数学趣话

康庆德 著



河北科学技术出版社

组 合 数 学 趣 话

康庆德　著

河北科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合数学趣话/康庆德著.—石家庄：河北科学技术出版社，1999
ISBN 7-5375-2125-5

Ⅰ.组… Ⅱ.康… Ⅲ.组合数学-普及读物 Ⅳ.O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 39623 号

组 合 数 学 趣 话

康庆德 著

河北科学技术出版社出版发行(石家庄市和平西路新文里8号)
河北新华印刷一厂印刷 新华书店经销

850×1168 1/32 6.25印张 156,000字 1999年12月第1版
1999年12月第1次印刷 印数:1—4000 定价:9.00元

前　　言

组合数学是既古老而又年轻的数学分支．它的渊源可以追溯到公元前2200年中国的大禹治水时代．中外历史上许多著名的数学游戏是它古典部分中的主要内容．公元1666年，德国著名数学家莱布尼兹为它起了“组合学”（Combinatorics）这样一个名字，并预言了这一数学分支的诞生．20世纪40年代以来，随着电子计算机的出现，计算机科学、数字通信、规划论和实验设计等方面发展的需求极大地推动和刺激了组合数学，使它焕发了青春，以前所未有的速度膨胀和发展起来．

组合数学是研究有限个（或可列个）事物在给定条件下如何进行安排或配置的数学．一般需要考虑的是：这种安排或配置是否存在？若存在，有多少种？怎样具体给出这种安排？以及如何找到“最佳”的安排？这四个问题即是组合学中通常所谓的“存在性问题”、“计数问题”、“构造问题”和“优化问题”．

按照现代数学的观点，连续数学和离散数学这两大数学门类中，后者的重要性正在逐步上升，将取代前者而成为主流．作为离散数学的核心，组合数学与传统数学的许多学科，如代数学、数论、概率统计等有着相当的联系和交叉．通常认为它是代数学的边缘学科，但它所侧重研究的是“关系结构”，不同于经典代数所侧重研究的“系统结构”．而从发展的趋势看，系统结构的研究将让位于关系结构的研究．

今天，组合数学方兴未艾，仍处于发展阶段，有着广阔的应用前景．迄今为止，它除了已渗透到数学的众多分支中外，还在

计算机科学、空间技术、人工智能、信息处理、数字通信、物质结构、物理学、化学、生物学、遗传工程、实验设计、过程控制、经济管理、国防工业以至工艺美术、心理学等众多领域中有着广泛的应用.

组合数学的特点之一是趣味性强. 当代一位著名数学家曾评论说:"组合数学发源于数学消遣和游戏, 无论是为了消遣还是由于它们的美学兴趣, 过去所研究过的许多问题对于当代的纯粹科学和应用科学都是非常重要的."这本小册子所立足的恰是这样一些组合数学游戏, 希望从形形色色兴趣盎然的问题出发, 逐步展示出组合数学的若干方面, 从而引导青少年朋友对这门数学分支有一些初步的了解和认识.

本书内容生动有趣, 由浅入深, 通俗易懂, 且各章基本独立. 多数章节的阅读都无需太深的数学知识, 只要具有中学水平和一定的数学素养、推理能力就够了.

衷心欢迎各位读者对本书提出批评并指正.

康庆德

1999 年于石家庄

目　录

第一章　幻方与数阵

第一节　洛书、纵横图、幻方

相传在大禹治水时代（约公元前2200年），在洛水中曾发现过一只神龟，它的背上有如图1-1的图样：

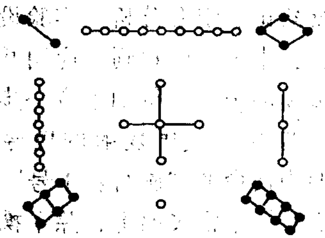


图1-1

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图1-2

这就是闻名中外的所谓“洛书”，国际上已公认它是组合数学的最早渊源．这个洛书译成阿拉伯数字就是图1-2所示的一个3行3列数阵，由数字1到9组成，而且每行每列及每条对角线上三数字的和均为15．我国南宋时代的数学家杨辉将这种数阵称为“纵横图”，而今日数学界对它的正式命名为幻方（或魔方，英文名为magic square）．

经典的 n 阶幻方指的是一个 n 行 n 列数阵，各位置上分别

填有 1 到 n^2 这 n^2 个自然数，且每行每列及两条大对角线上 n 个数字的和都相等，这一相等的和数常称为幻和，可以算出它等于$\frac{n}{2}(n^2+1)$. 刚才提到的“洛书”即是一个 3 阶幻方，它的幻和是$\frac{3}{2}(3^2+1)=15$.

具有这种奇特和性的幻方是古今中外文明所共有的. 与最早出现于华夏民族文化中的“洛书”相类似的东西也在许多国家的古书、古碑中出现过，而且往往带有神秘奥妙的色彩，甚至还常被用来驱鬼避邪、昭示吉祥. 在我国，幻方曾长期作为一种数字游戏在民间流传. 电视连续剧《射雕英雄传》中，主人公黄蓉与郭靖就曾被英姑问询过一个构作 3 阶幻方的“难题”.

随着有关学科的发展及组合数学的振兴，幻方作为一个数学对象的地位又得到了重新确立，它已在图论、程序设计、人工智能、博奕论、组合分析、实验设计乃至工艺美术等方面找到了应用并衍生出许多新的类型，得到了进一步的发展. 1977 年，美国发射的以寻求星外文明为使命的“旅行者 1 号”、“旅行者 2 号”宇宙飞船上，除了携带有古今音乐，近 60 种语言的问候语，35 种自然界各类声响的铜制唱片——“地球之声”外，还带有一些表达地球文明的图片，其中关于数学的一张就是图 1－3 所示的一个 4 阶幻方. 读者可以按它的点、圈数目译成阿拉伯数字的表阵并核验它的幻和性质.

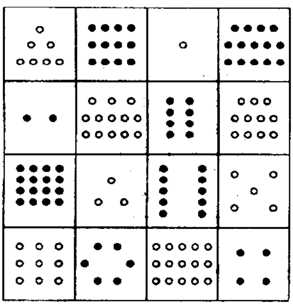


图 1－3

第二节　幻方的构造方法

2 阶幻方是不存在的，这很容易证明．而对大于 2 的任意正整数 n，人们早已证实了 n 阶幻方的存在性，并给出了多种构造方法．这里我们仅介绍其中较直观的几种．

一、奇数阶幻方的构造

1. 凸十字移补法

我们以 5 阶幻方为例来说明构作过程．

首先，如图 1－4 所示，将要填的 5 行 5 列方格阵在各边方向向外扩展成一个凸十字形的新格阵．这个新格阵也是一个方形，只是斜的，各侧边同样有 5 个小方格，将 1 到 25 这些数字按自然顺序由左上到右下平行斜排

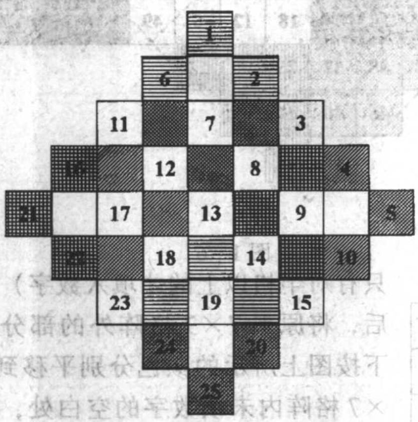


图 1－4

地填入到图中所示的 25 个小格中．进而将粗实线围住的原来 5×5 格阵之外扩展出去的部分剪下平移到粗实线框内尚未填字的格中（如图所示，相同颜色的部分是移动时相对应的）．最后即可得到如图 1－

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 1－5

5 所示的一个 5 阶幻方.

2. 奇偶分离移补法

我们以 7 阶幻方为例来说明构作过程.

首先，如图 1－6 所示，将要填的 7 行 7 列方格阵各边中点连成一个斜方形(虚线所示)，于其中按自然顺序由左上向右下依次平行地填入 1 到 49 的全部奇数. 进而将此斜方形向左下方拓展出一个同尺寸的斜方形. 按同样填法填入 2 到 48 的全部偶数.(注意：斜方形边缘处的格子只有对半格以上的才填入数字）最后，将原来 7×7 格阵外的部分剪下按图上所示的颜色分别平移到 7×7 格阵内未填数字的空白处，即最终得到如图 1－7 所示的 7 阶幻方.

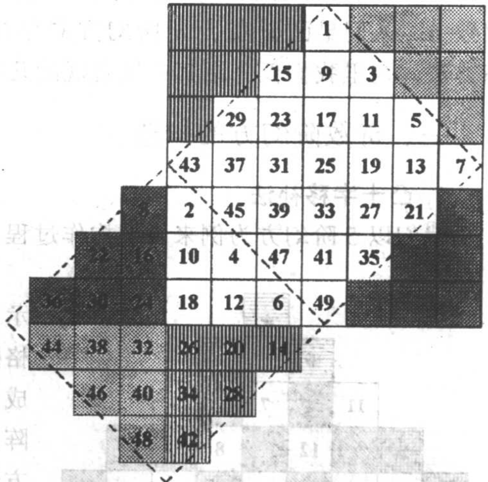


图 1－6

26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

图 1－7

二、双偶数阶幻方的构造

所谓双偶数 n，即指 n 是4 的倍数. 对这种阶数的幻方，我们介

绍一种称之为“对称调换法”的构作方法.

首先构作一个 n 阶“自然方阵” N，即将 1 到 n^2 这些自然数按自然顺序由左向右，由上到下填到 $n\times n$ 格阵的各格中，所得的数阵如图 1－8 所示．然后将 N 分成为$\frac{n}{4}\times\frac{n}{4}$个 4 阶格阵，勾出每个 4 阶格阵的两条对角线．让位于这些对角线上的数字不动，其余各位置的数字对于原格阵中心（见图中画●的交叉点）作中心对称的调换（比如图 1－8 中的 17 与 48 中心对称，需对调为图 1－9 所示）．最后得到的图 1－9 即是欲构作的双偶数阶幻方．以下图示的阶数为 $n=8$.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

(8 阶自然方阵)

图 1－8

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

(8 阶幻方)

图 1－9

三、单偶数阶幻方的构造

所谓单偶数 n，即指 n 被 4 除余 2，因此可将其写为 $n=4k+2$. 这里我们介绍的方法称为“同心方阵法”.

首先，构作一个 $4k$ 阶幻方（可按双偶数阶幻方的构作方法构作，也可按任意其他可行方法构作），并将其中所有数字均加

上 $8k+2$，记所得到的 $4k\times4k$ 格阵为 M. 进而，按图 1-10 所示，在 M 的上、下、左、右各加一行（列），形成一个 $(4k+2)\times(4k+2)$ 的格阵，此格阵的四角依顺时针方向填上数字 1、2、n^2 与 n^2-1，“加边”上其余 $4(n-2)$ 个位置分别如图标上 a_1，a_2，…，a_{2k+1}；b_1，b_2，…，b_{2k-1}；c_1，c_2，…，c_{2k}；d_1，d_2，…，d_{2k} 以及这些数字的“对偶”a_i'、b_j'、c_s'、d_s'，其中 $1\leqslant i\leqslant 2k+1$，$1\leqslant j\leqslant 2k-1$，$1\leqslant s\leqslant 2k$，而数字 x 的“对偶”指的是 $x'=n^2+1-x$. 进一步的任务即是确立这些符号的数值〔关键即是诸 a_i、b_j、c_s、d_s 这 $2(n-2)$ 个数〕. 如果将这些 a_i、b_j、c_s、d_s 限定在集合 $\{3, 4, 5, \cdots, 2(n-1)\}$ 内（当然必是恰充满），则诸 a_i'、b_j'、c_s'、d_s' 将充满集合 $\{n^2-2n+3, \cdots, n^2-2\}$，而 M 中的数充满的范围为 $\{2n-1, \cdots, n^2-2n+2\}$，再加上四角数字 1、2、$n^2-1$ 与 n^2，数字的分布是合理的. 在这一限定下，诸 a_i、b_j、c_s、d_s 需满足以下一组等式：

1	$b_1\cdots b_{2k-1}a_1'\cdots a_{2k+1}'$	2
c_1 · · · c_{2k} d_1' · · · d_{2k}'	M ($4k\times4k$ 格阵)	c_1' · · · c_{2k}' d_1 · · · d_{2k}
n^2-1	$b_1'\cdots b_{2k-1}'a_1\cdots a_{2k+1}$	n^2

图 1-10

$$\begin{cases}(a_1+\cdots+a_{2k+1})-(b_1+\cdots+b_{2k-1})=3\\(c_1+\cdots+c_{2k})-(d_1+\cdots+d_{2k})=1\\(a_1+\cdots+a_{2k+1})+(b_1+\cdots+b_{2k-1})\\\qquad+(c_1+\cdots+c_{2k})+(d_1+\cdots+d_{2k})=(n-1)(2n-1).\end{cases}$$

这组方程在所给的正整数范围内一定有解．这里给出其中的一组解（注意 $k \geqslant 2$）：

$\{a_1, \cdots, a_{2k+1}\} = \{3, 5, 7, \cdots, 2k+3; 6k-1; 6k+4, 6k+6, \cdots, 8k\}$;

$\{b_1, \cdots, b_{2k-1}\} = \{4, 6, \cdots, 2k; 6k+5, 6k+7, \cdots, 8k+1; 8k+2\}$;

$\{c_1, \cdots, c_{2k}\} = \{2k+4, 2k+6, \cdots, 4k+2; 4k+3, 4k+5, \cdots, 6k-3; 6k, 6k+2\}$;

$\{d_1, \cdots, d_{2k}\} = \{2k+2; 2k+5, 2k+7, \cdots, 4k+1; 4k+4, 4k+6, \cdots, 6k-2; 6k+1, 6k+3\}$.

请读者自行验证这组解的正确性（每个小集合内数字的顺序没有关系，只是要求每数安排后其对面必须是该数的对偶）．

例如，对于 $k=2$，我们有：

$\{a_1, a_2, \cdots, a_5\} = \{3, 5, 7, 11, 16\}$

$\{b_1, b_2, b_3\} = \{4, 17, 18\}$

$\{c_1, c_2, c_3, c_4\} = \{8, 10, 12, 14\}$

$\{d_1, d_2, d_3, d_4\} = \{6, 9, 13, 15\}$

按照这些数值可以得到它们的“对偶”，从而给出 $4k+2=10$ 阶幻方的四个加边是（注意 $n^2+1=101$）：

上加边：(1)，4，17，18，98，96，94，90，85，(2)

下加边：(99)，97，84，83，3，5，7，11，16，(100)

左加边：(1)，8，10，12，14，95，92，88，86，(99)

右加边：(2)，93，91，89，87，6，9，13，15，(100)

再利用前边例子填出的 8 阶幻方，我们即可有图 1－11 所示的 10 阶幻方（请读者核验）：

在刚才给出的诸 a_i、b_j、c_s、d_s 的数值解组中需满足条件 $k \geqslant 2$（即 $n \geqslant 10$），因此我们需另给出 $k=1$（即 $n=6$）时的解组，以下是一种解组及相应的 6 阶幻方（图 1－12）：

1	4	17	18	98	96	94	90	85	2
8	19	81	80	22	23	77	76	26	93
10	74	28	29	71	70	32	33	67	91
12	66	36	37	63	62	40	41	59	89
14	43	57	56	46	47	53	52	50	87
95	51	49	48	54	55	45	44	58	6
92	42	60	61	39	38	64	65	35	9
88	34	68	69	31	30	72	73	27	13
86	75	25	24	78	79	21	20	82	15
99	97	84	83	3	5	7	11	16	100

图 1－11

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{3, 4, 6\}$$
$$\{b_1\} = \{10\}$$
$$\{c_1, c_2\} = \{7, 8\}$$
$$\{d_1, d_2\} = \{5, 9\}$$

1	10	34	33	31	2
7	11	25	24	14	30
8	22	16	17	19	29
32	18	20	21	15	5
28	23	13	12	26	9
35	27	3	4	6	36

图 1－12

通过以上介绍的三类阶数的幻方构作方法，我们已可对任意 n（>2）阶幻方进行构作．当然，除去已介绍的方法外，还有许多其他构作幻方的方法，同一阶数的幻方也远非一种式样，我们不可能再详细介绍了．

第三节　一些特殊的幻方

前几年，在国外某博览会陈列大厅中，用一块块分别刻着1，2，…，25这些数字的小块方瓷砖铺砌着地面，它的如下特性吸引了许多游客——不论你圈定哪一片长5块宽5块的范围，都会得到由瓷砖块上数字构成的一个5阶幻方！这是建筑师利用一种具有特殊性质的幻方——“筒形幻方”设计安排的．所谓筒形幻方指的是这样一种幻方，它除了具有一般幻方的幻性（即每行每列及两条大对角线上数字和相等）外，还满足“任一对角斜线上数字和也都等于幻和”这一附加性质．这里的对角斜线指的是与大对角线平行的“线”．比如下边两个图中同样符号的5个位置就组成一条对角斜线，其中图1－13是与“左上—右下”大对角线平行的，图1－14是与“右上—左下”大对角线平行的．

#	●	△	×	○
○	#	●	△	×
×	○	#	●	△
△	×	○	#	●
●	△	×	○	#

图1－13

○	×	△	●	#
×	△	●	#	○
△	●	#	○	×
●	#	○	×	△
#	○	×	△	●

图1－14

对于5阶筒形幻方来讲，它要满足的5数和等于幻和的等式共有20个（5行5列，5条“左上—右下”方向的对角斜线及5条“右上—左下”方向的对角斜线）．比如图1－15给出的就是一个5阶筒形幻方，右边列出了它需要满足的20个和式（每括号内5数相加），你可以核验是否都等于65．