研究生教学用书

公共基础课系列

矩阵论

Matrix Theory

杨　明　刘先忠

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

华中科技大学出版社

研究生教学用书
公 共 基 础 课 系 列

矩 阵 论

杨　明　刘先忠

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/杨明　刘先忠
武汉:华中科技大学出版社，2003年10月
ISBN 7-5609-3046-8

Ⅰ.矩…
Ⅱ.①杨…　②刘…
Ⅲ.矩阵-研究生教育-教材
Ⅳ.O151.21

矩阵论　　杨明　刘先忠

责任编辑:李　德　吴锐涛　　封面设计:潘　群
责任校对:封春英　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:华大图文设计室
印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:787×960　1/16　　印张:9.5　　字数:164 000
版次:2003年10月第1版　　印次:2003年10月第1次印刷　　定价:13.80元
ISBN 7-5609-3046-8/O·290

内 容 简 介

本教材适用于工学硕士和工程硕士研究生数学基础课——矩阵论. 全书共分 6 章，主要内容为线性空间与线性变换、Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵的广义逆、矩阵分析和非负矩阵介绍. 为工学硕士研究生的应用研究提供所需的数学工具. 为他们的继续学习提供必需的数学基础.

本书适用于 50 学时左右的矩阵论课程的教学使用，也可作为同类课程的教学参考书.

Abstract

Matrix Theory is an important component of postgraduate mathematics, particularly for postgraduate students majoring in the scientific and engineering. This book is a text book for MA programe requires course—matrix theory. The topics of the six chapters are general vector space and linear transformations, Jordan form of matrices. matrix decomposition, generalized inverse of matrix matrix analyses and introduction to positive matrices. The text contains all the topics recommended by the Ministry of Education.

This book is suitable for 50 teaching-hour lectures.

写在“研究生教学用书”出版15周年前岁

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红.”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限.在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速.在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿.

党的十六大报告以空前的力度强调了“科教兴国”的发展战略，强调了教育的重大作用，强调了教育的基础性全局性先导性，强调了在社会主义建设中教育的优先发展的战略地位.从报告中，我们可以清楚看到，对高等教育而言，不仅赋予了重大的历史任务，而且更明确提出了要培养一大批拔尖创新人才.不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上.“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基.”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争.由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师.历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主.《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己.寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想.内因是发展的决定性的因素.当然，我们决不应该也决不可能“闭关锁国”，自我封闭，固步自封，而谋求发展，重犯历史错误.外因始终是发展的必要条件.正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己.这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才.何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此.人才，高级专

门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础. 基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器.”自古凡事皆然，教育也不例外. 教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一.“巧妇难为无米之炊”. 特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用. 早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见. 但这不等于他能在一切方面均能如此，有所不为才能有所为. 如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书. 这就是我赞成要为研究生编写系列的“研究生教学用书”的原因. 今天，我仍然如此来看.

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”. 既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考. 当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应同. 对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了. 正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用.

在此，还应进一步讲明一点. 作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读. 记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要. 因为知识是基础. 有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识. 对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可

道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华.《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器.”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上.《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语.语之所贵者意也，意有所随.意之所随者，不可以言传也.”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上.它比语、比书，重要多了.要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想.如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”.这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置.

这套“研究生教学用书”从第一本于1990年问世以来，到明年，就经历了不平凡的15个春秋.从研究生教育开始以来，我校历届领导都十分关心研究生教育，高度重视研究生教学用书建设，亲自抓研究生教学用书建设；饮水思源，实难忘怀！“逝者如斯夫，不舍昼夜.”截至今天，“研究生教学用书”的出版已成了规模，蓬勃发展.目前已出版了用书69种，有的书发行了数万册，有22种分别获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有数种已为教育部列入向全国推荐的研究生教材，有20种一印再印，久销不衰.采用此书的一些兄弟院校教师纷纷来信，称赞此书为研究生培养与学科建设做出了贡献.我们深深感激这些鼓励，“衷心藏之，何日忘之?!”没有读者与专家的关爱，就没有我们“研究生教学用书”的发展.

唐代大文豪李白讲得十分正确：“人非尧舜，谁能尽善?”我始终认为，金无足赤，物无足纯，人无完人，文无完文，书无完书.“完”全了，就没有发展了，也就“完”蛋了.江泽民同志在党的十六大报告中讲得多么深刻：“实践没有止境，创新也没有止境.”他又指出，坚持“三个代表”重要思想的关键是与时俱进.这套“研究生教学用书”更不会例外.这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足，必然会有.但是，我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进，与时俱进，奋发前进.我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教，及时批评.当局者迷，兼听则明；“嘤其鸣矣，求其友声.”这就是我们肺腑之

言．当然，在这里，还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者（华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员）与出版者（华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志）；深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者，没有他们，就决不会有今天的“研究生教学用书”．

我们真挚祝愿，在我们举国上下，万众一心，在“三个代表”重要思想的指引下，努力全面建设小康社会，加速推进社会主义现代化，为实现中华民族伟大复兴，“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中，让我们共同努力，为培养数以千万计高级专门人才、特别是一大批拔尖创新人才，完成历史赋予研究生教育的重大任务而做出应有的贡献．

谨为之序．

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
2003年7月于喻园

前　言

本书是为工学硕士研究生数学基础课"矩阵论"编写的教材.全书由线性空间和线性变换、Jordan 标准形、矩阵分解、矩阵的广义逆、矩阵分析和非负矩阵介绍等6 章构成,其内容符合教育部工学硕士研究生矩阵论教学基本要求.

在科学技术和工程应用中,矩阵理论的重要性和应用的广泛性是众所周知的.计算机的广泛使用和 MATLAB,MAPLE 等数学计算软件的迅猛普及为矩阵理论提供了更为广阔的发展和应用前景.本书注重将线性空间、线性变换和内积、赋范空间的各种问题对应到数值向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上,强调抽象内容的矩阵处理技巧,使问题的描述形式和处理方法简洁,可有效地利用矩阵这一数学工具,同时为将功能强大的矩阵计算数学软件有效地使用到各类问题上奠定了基础,便于提高教学效率.本书的内容取舍力求理论体系简明清晰,适合工学硕士后续学习和研究应用的需要,深浅适度.本书的推荐教学学时为50 学时.

本书是在华中科技大学(原华中理工大学)数学系为硕士研究生开设矩阵论课程的长期教学实践中发展形成的.第 1、2、3 章由杨明编写,第 4,5,6 章由刘先忠编写.本书的编写得到了华中科技大学研究生院的教改项目支持,得到了华中科技大学数学系和课程教学组老师们的关心和协助,在此表示衷心的感谢.作者对华中科技大学出版社和本书编辑为本书出版所做的工作表示感谢.

本书内容虽经多次讲授,随着科学技术的发展仍然需要不断的完善,其问题和不足,敬请同行和读者不吝指正.

作　者

2003 年9 月于华中科技大学

目　　录

第1章　线性空间与线性变换 …… (1)
§1.1　线性空间 …… (1)
一、线性空间的概念 …… (1)
二、线性空间的基与维数 …… (2)
三、坐标 …… (3)
四、基变换与坐标变换 …… (5)
五、子空间 …… (8)
§1.2　内积空间 …… (12)
一、欧氏空间与酉空间 …… (12)
二、标准正交基 …… (15)
§1.3　线性变换 …… (17)
一、线性变换 …… (18)
二、线性变换的矩阵 …… (20)
三、不变子空间 …… (23)
四、正交变换与酉变换 …… (24)
习题一 …… (27)
第2章　Jordan 标准形介绍 …… (31)
§2.1　线性变换的对角矩阵表示 …… (31)
一、线性变换的特征值与特征向量 …… (31)
二、线性变换矩阵的对角化 …… (33)
§2.2　Jordan 矩阵介绍 …… (35)
一、Jordan 矩阵 …… (35)
二、Jordan 标准形的求法 …… (36)
§2.3　最小多项式 …… (42)
一、矩阵多项式 …… (42)
二、方阵的化零多项式 …… (45)
三、最小多项式 …… (47)
习题二 …… (50)
第3章　矩阵的分解 …… (53)
§3.1　常见的矩阵标准形与分解 …… (53)

一、矩阵的三角分解…………………………………………………………………(53)
二、矩阵的满秩分解…………………………………………………………………(59)
三、可对角化矩阵的谱分解…………………………………………………………(63)
§3.2 Schur 分解与正规矩阵 ……………………………………………………(66)
一、Schur 分解 ………………………………………………………………………(66)
二、正规矩阵…………………………………………………………………………(68)
§3.3 矩阵的奇异值分解…………………………………………………………(71)
一、矩阵的奇异值及其性质…………………………………………………………(71)
二、矩阵的奇异值分解………………………………………………………………(73)
习题三 ………………………………………………………………………………(75)
第4章 矩阵的广义逆 ……………………………………………………………(77)
§4.1 矩阵的左逆与右逆…………………………………………………………(77)
一、满秩矩阵与单侧逆………………………………………………………………(77)
二、单侧逆与解线性方程组…………………………………………………………(78)
§4.2 广义逆矩阵…………………………………………………………………(79)
一、减号广义逆………………………………………………………………………(79)
二、Moore-Penrose 广义逆(加号广义逆) ………………………………………(81)
§4.3 投影变换……………………………………………………………………(84)
一、投影变换与投影矩阵……………………………………………………………(84)
二、正交投影变换与正交投影矩阵…………………………………………………(85)
§4.4 最佳的最小二乘解…………………………………………………………(87)
习题四 ………………………………………………………………………………(90)
第5章 矩阵分析 …………………………………………………………………(92)
§5.1 向量范数……………………………………………………………………(92)
一、向量范数的概念…………………………………………………………………(92)
二、向量范数的连续性与等价性……………………………………………………(93)
§5.2 矩阵范数……………………………………………………………………(94)
一、矩阵范数的概念…………………………………………………………………(95)
二、诱导范数…………………………………………………………………………(96)
§5.3 向量序列和矩阵序列的极限………………………………………………(97)
§5.4 矩阵幂级数 ………………………………………………………………(100)
一、谱半径 …………………………………………………………………………(100)
二、矩阵幂级数 ……………………………………………………………………(102)
§5.5 矩阵函数 …………………………………………………………………(104)
一、矩阵函数的定义与性质 ………………………………………………………(105)

二、矩阵函数的求法 …………………………………………………………………… (106)
§5.6　函数矩阵的微分与积分 ………………………………………………………… (110)
§5.7　矩阵函数的应用 ……………………………………………………………… (111)
一、一阶线性常系数齐次微分方程组 ……………………………………………… (111)
二、一阶线性常系数非齐次微分方程组 …………………………………………… (112)
习题五……………………………………………………………………………………… (114)
第6章　非负矩阵介绍……………………………………………………………… (116)
§6.1　非负矩阵 ……………………………………………………………………… (116)
§6.2　正矩阵 ………………………………………………………………………… (119)
§6.3　素矩阵 ………………………………………………………………………… (123)
习题答案与提示……………………………………………………………………… (126)
参考书目……………………………………………………………………………… (134)

第1章　线性空间与线性变换

矩阵是处理有限维空间形式和数量关系的重要工具，线性空间与线性变换是其中的基本研究对象．这一章在线性代数的基础上，推广向量空间$\mathbf{R}^n$，一般地建立线性空间的概念，进而定义线性变换，介绍其中的基本理论及其矩阵方法．

§1.1　线性空间

我们从线性代数中了解的向量空间$\mathbf{R}^n$，从数学角度看，它涉及一个集合和一个数域，定义有集合中元素的加法运算和数域中数与集合中元素的数乘运算，我们由此出发来推广建立线性空间的概念．

一、线性空间的概念

定义1.1　设V是一个以$\alpha,\beta,\gamma,\cdots$为元素的非空集合，$F$是一个数域．在其中定义两种运算，一种叫加法：$\forall\ \alpha,\beta\in V,\alpha+\beta\in V$；另一种叫数量乘法：$\forall\ k\in F,\alpha\in V,k\alpha\in V$，并且满足下面八条运算法则：

(1)加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2)加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3)V中存在零元素：$\exists\ \alpha_0\in V,\forall\ \alpha\in V,\alpha+\alpha_0=\alpha$，记$\alpha_0=\mathbf{0}$；

(4)负元素存在：$\forall\ \alpha\in V,\exists\ \beta\in V$，使$\alpha+\beta=\mathbf{0}$，记$\beta=-\alpha$；

(5)数乘结合律$(kl)\alpha=k(l\alpha)$；

(6)存在$1\in F,1\cdot\alpha=\alpha$；

(7)分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$；

(8)分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，

则称V为数域F上的**线性空间**．V中元素称为**向量**．F为实(复)数域时，称V是**实(复)线性空间**．

例1　对给定的数域F，集合$F^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}|x_i\in F\}$，对通常的向量的加法和数乘运算，$F^n$为域$F$上的线性空间．当$F$为实数域$\mathbf{R}$和复数域$\mathbf{C}$时，$\mathbf{R}^n$和$\mathbf{C}^n$是它的两种具体形式．

例2　$V=F^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}|a_{ij}\in F\}$，它在矩阵的加法与数乘运算下构成数域$F$上的线性空间，称为矩阵空间，其中$\mathbf{R}^{m\times n}$为由一切$m\times n$实矩阵构成的实矩阵空间．

例3　实数域$\mathbf{R}$上次数不超过$n-1$次的关于文字x的一切多项式和零多项式所构

成的集合

$$P_n[x]=\{\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\,|\,a_i\in\mathbf{R}\},$$

在通常多项式加法与数乘多项式运算下构成线性空间，称为多项式空间 $P_n[x]$.

值得指出的是次数等于 $n-1$ 的多项式集合 $V=\left\{\sum_{i=1}^{n-1}a_ix^i\,\middle|\,a_i\in\mathbf{R},a_{n-1}\neq 0\right\}$ 不是线性空间，因为两个次数为 $n-1$ 的多项式相加后所得多项式次数不一定为 $n-1$，从而有可能不在 V 中，这也称为 V 对加法不封闭. 定义 1 说明线性空间对加法和数量乘法这两种运算均是封闭的.

例 4 $V=C[a,b]=\{f(x)\,|\,f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上实连续函数$\}$，对于函数的加法与数乘运算构成实数域上的线性空间.

从上述线性空间例子中可以看到，许多常见的研究对象都可以在线性空间中作为向量来研究. 另外应理解加法和数乘分别是 V 中的一个二元运算和数域 F 和 V 中元素间的运算，要求运算满足定义 1 中的八条性质，它们已不再局限在数的加法、乘法的概念中.

例如取集合为正数集合 $\mathbf{R}^+$，F 为实数域 $\mathbf{R}$，加法 $\oplus$ 和数乘 $\circ$ 如下定义

$\oplus$：$\forall\ a,b\in\mathbf{R}^+\qquad a\oplus b=ab$,

$\circ$：$\forall\ k\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}^+,k\circ a=a^k$.

在此运算下，$\mathbf{R}^+$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个线性空间. 其中加法零元素是 $\mathbf{R}^+$ 中的数 1，$\mathbf{R}^+$ 中元素 a 的负元素是 a^{-1}.

定理 1.1 线性空间 V 有如下性质：

(1) V 中的零元素惟一；

(2) V 中任一元素的负元素惟一；

(3) 设 0 为数零，$\mathbf{0}$ 为 V 中零向量，则

(i) $0\cdot\alpha=\mathbf{0}$.

(ii) $k\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0},k\in F$.

(iii) 若 $k\cdot\alpha=\mathbf{0}$，则一定有 $k=0$ 或 $\alpha=\mathbf{0}$.

(iv) $(-1)\alpha=-\alpha$.

证明留给读者.

二、线性空间的基与维数

线性空间中的基与维数是依赖于向量的线性相关与线性无关的概念来定义的. 线性空间 V 作为一个向量集合，其中向量的线性相关与线性无关的定义与线性代数中给出的定义完全类似，因而在线性空间中，极大线性无关组、等价等概念在形式上与向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的定义一样，与上述概念相关的性质与结果也可平移到线性空间中，在此不

再叙述.

定义 1.2　设V是线性空间,若存在一组线性无关的向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使空间中任一向量可由它们线性表示,则称向量组$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$为$V$的一组**基**.基所含向量个数为$V$的**维数**,记为$\dim V=n$,$n<\infty$或者$n=\infty$.

例 5　向量组$\{e_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},e_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,e_n=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}\}$是$F^n$的一组基,所以$\dim F^n=n$.

例 6　求矩阵空间$\mathbf{R}^{2\times 2}$的维数与一组基.

解　任取矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$

因此$\mathbf{R}^{2\times 2}$中任何一个向量都可写成向量组

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

的线性组合.又任取数k_i,由

$$k_1\boldsymbol{E}_{11}+k_2\boldsymbol{E}_{12}+k_3\boldsymbol{E}_{21}+k_4\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}=\mathbf{0},$$

得$k_i=0,i=1,2,3,4$,故$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$线性无关.由定义2知$\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}\}$是$\mathbf{R}^{2\times 2}$的一组基,$\dim\mathbf{R}^{2\times 2}=4$.

类似地,$\{\boldsymbol{E}_{ij},i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n\}$是矩阵空间$\mathbf{R}^{m\times n}$的一组基,$\dim\mathbf{R}^{m\times n}=m\times n$.

例 7　向量组$\{1,x,x^2,\cdots,x^{n-1}\}$是线性空间$P_n[x]$的一组基,$\dim P_n[x]=n$.

以上例子中,空间维数$\dim V$都为有限数,这样的空间称为有限维线性空间.若$\dim V$不是有限数,则称V为无限维线性空间.由于有限维空间与无限维空间在研究方法上的较大差异,这里我们只讨论有限维空间.约定记号$V_n(F)$表示V是数域F上的n维线性空间.

由于基就是向量集合V的极大线性无关组,从而线性空间的基也不是惟一的.

定理 1.2　n维线性空间中任意n个线性无关的向量构成的向量组都是空间的基.

三、坐标

在线性空间$V_n(F)$中,设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是一组基,则$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$线性无关,$\forall\beta\in V_n(F)$,$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta\}$线性相关,故$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$惟一地线性表示.因此有

定义 1.3　设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V_n(F)$的一组基,$\forall\ \beta\in V$,

$$\beta=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i=(\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\tag{1.1}$$

则称数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 β 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 下的坐标，(1.1)式中向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 为 β 的坐标向量，也简称为坐标.

(1.1)式中第二个等式是借助于矩阵的运算来表示的，显然 $(\alpha_1\alpha_2\cdots\ \alpha_n)$ 在一般的向量意义下不一定为矩阵，这种表示会给今后矩阵处理带来很多便利.

例 8 求 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中向量 $\begin{pmatrix}3&1\\4&5\end{pmatrix}$ 在基 $\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}\}$ 下的坐标.

解 $\begin{pmatrix}3&1\\4&5\end{pmatrix}=3\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+4\boldsymbol{E}_{21}+5\boldsymbol{E}_{22}=(\boldsymbol{E}_{11}\ \boldsymbol{E}_{12}\ \boldsymbol{E}_{21}\ \boldsymbol{E}_{22})\begin{pmatrix}3\\1\\4\\5\end{pmatrix}$，故该向量在所给基下坐标为 $(3,1,4,5)^{\mathrm{T}}$. 一般地 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 中向量 $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ 在所给基 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}$ 下坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^{\mathrm{T}}$.

例 9 已知 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 和 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 是线性空间 $P_4[x]$ 的两组基，求 $P_4[x]$ 中向量 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ 在这两组基下的坐标.

解 因为 $f(x)=(1,x,x^2,x^3)\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$，

所以 $f(x)$ 在基 $\{1,x,x^2,x^3\}$ 下坐标为 $(a_0,a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$.

又由 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(x)&=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3\,!}(x-1)^3\\&=(1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3)\begin{pmatrix}f(1)\\f'(1)\\\frac{1}{2}f''(1)\\\frac{1}{3\,!}f'''(1)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在基 $\{1,(x-1),(x-1)^2,(x-1)^3\}$ 下的坐标为 $\left(f(1),f'(1),\frac{f''(1)}{2\,!},\frac{f'''(1)}{3\,!}\right)^{\mathrm{T}}$.

从以上例子和(1.1)式可以看到，不论$V_n(F)$为何种具体的线性空间，当在$V_n(F)$中取定一组基时，$V_n(F)$中向量在该基下的坐标都是线性空间F^n中的向量. 正是这一特点，奠定了可以用数量矩阵和$\mathbf{R}^n$中向量来研究一般的线性空间的有关问题的基础. 一般同一个向量在不同基下的坐标也是不同的.

在线性空间$V_n(F)$中取定一组基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$\forall\ \beta\in V_n(F)$，取坐标作为对应关系，$\beta$惟一地对应于$F^n$中一个向量$\boldsymbol{X}$($\beta$的坐标). 反之，$\forall\ \boldsymbol{X}\in F^n$，$(\alpha_1\,\alpha_2\cdots\,\alpha_n)\boldsymbol{X}$就是$\boldsymbol{X}$所对应的$V_n(F)$中的向量. 因此，坐标关系建立了线性空间$V_n(F)$和$F^n$的一一对应关系$\sigma$，显然$\sigma$满足：

$$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$
$$\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha).$$

在对应关系σ下，数域F上任何一个n维线性空间$V_n(F)$都和n维线性空间F^n同构.

设$V_n(F)$中向量β_i的坐标为$\boldsymbol{X}_i$，$i=1,2,\cdots,m$，则β_i的线性组合$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\beta_i$的坐标是$\sum\limits_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{X}_i$，又零向量坐标为$\mathbf{0}$，所以

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\beta_i=\mathbf{0}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{m}k_i\boldsymbol{X}_i=\mathbf{0}.$$

该结果可叙述为下述定理.

定理 1.3 设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是$n$维线性空间$V_n(F)$的一组基，$V_n(F)$中向量$\beta_i$在该基下坐标为$\boldsymbol{X}_i$，$i=1,2,3,\cdots,m$，则$V_n(F)$中向量组$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$线性相关的充分必要条件是其坐标向量组$\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_m\}$是$F^n$中的线性相关组.

定理1.3说明由坐标建立的$V_n(F)$和F^n之间的一一对应关系保持线性关系不变. 若不计较向量的具体形式，仅就线性关系而言，$V_n(F)$中有关问题都可归结为我们所熟悉的线性空间F^n中的相应问题，可应用熟悉的方法和已建立的理论来解决.

例 10 讨论$P_4[x]$中向量：$f_1=1+2x+4x^3$，$f_2=x+x^2+4x^3$，$f_3=1+x-3x^2$，$f_4=-2x^2+x^3$的线性相关性.

解 在$P_4[x]$中取基$\{1,x,x^2,x^3\}$，则向量组对应的坐标$\boldsymbol{X}_1=(1,2,0,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_2=(0,1,1,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_3=(1,1,-3,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_4=(0,0,-2.1)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{X}_1\ \boldsymbol{X}_2\ \boldsymbol{X}_3\ \boldsymbol{X}_4)=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\2&1&1&0\\0&1&-3&-2\\4&4&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&-2&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

秩$(\boldsymbol{A})=4$，$\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4$线性无关，即$\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$线性无关.

四、基变换与坐标变换

从定理1.2可以知道，线性空间$V_n(F)$的基不是惟一的，同一向量在不同基下的坐