Duice Lun

对策论

谢　政　编著

国防科技大学出版社

对 策 论

谢 政 编著

国防科技大学出版社
·湖南长沙·

内容简介

本书以介绍对策论的基本内容为主，力求做到通俗易懂，便于自学.

全书共九章，包括预备知识，对策，二人零和有限对策，二人零和无限对策，决策分析，非合作 n 人对策，合作 n 人对策，对策的应用以及微分对策.

本书可作为运筹学专业的研究生教材，也可供应用数学、系统科学、管理科学、经济学和军事运筹学等有关专业的教师、研究生和大学高年级学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

对策论/谢政编著.—长沙:国防科技大学出版社,2004.3
ISBN 7-81099-057-8

Ⅰ.对…　Ⅱ.①谢…　Ⅲ.对策论-研究生-教材　Ⅳ.O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 015635 号

国防科技大学出版社出版发行
电话:(0731)4572640　邮政编码:410073
E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn
责任编辑:耿　筠　责任校对:文　慧
新华书店总店北京发行所经销
国防科技大学印刷厂印装
*
开本:787×960　1/16　印张:19.5　字数:361 千
2004 年 03 月第 1 版第 1 次印刷　印数:1-3000 册
ISBN 7-81099-057-8/O·4
定价:26.00 元

序

从古到今,人类活动中一直广泛存在着凭借策略决以胜负的竞争性现象,大有争城夺地,小到猜拳对弈.但是,用数学方法对其进行研究则始于20世纪初,以Zermelo, Borel和Von Neumann等人的工作为代表.研究这种竞争性现象的各方是否存在最合理的行动方案,以及如何找到这个合理的行动方案所形成的数学理论就产生了一门新的学科——对策论.Von Neumann和Morgenstern在1944年合著的*Theory of Games and Economic Behavior*一书总结了对策论的研究成果,是对策论发展史上的重要里程碑.

近三十年来,对策论发展很快,并且在经济学、军事学、管理科学、政治学、生态学、对策模拟、心理学、基因进化等诸多学科领域都有广泛的应用.

本书是对策论的入门教材.全书共九章,所涉及的都是对策论中最基本、最重要的理论和方法.第零章为预备知识,简单介绍了凸集、凸函数、凸集分离定理、线性规划的单纯形法和对偶理论、Stieltjes积分、不动点定理以及可测函数等内容.已具备这些知识的读者可跳过这一部分内容.第一章至第六章系统地介绍了静态对策的基本内容,包括静态对策的概念、二人零和有限对策、二人零和无限对策、非合作n人对策和合作n人对策,以及与对策论密切相关的决策分析.第七章介绍静态对策在经济和军事上的应用以及元对策.第八章初步介绍微分对策的一些基本概念,着重突出离散序列法的思想,而忽略微分对策求解方法的探讨.每章的后面都附有一定数量的习题,以巩固和加深读者对各章内容的理解.

作者近年来多次为研究生讲授对策论课程,参阅了国内外一些富

有代表性的教材，书中写进了点滴体会与经验．由于作者才疏学浅，缺点和错误在所难免，恳请大家批评指正．

在本书的写作过程中，研究生梁兆健、伍勇安、杨延飞和王芳协助整理了部分资料，并认真阅读了原稿，提出了许多有益的建议，还帮助对本书进行了校对，在此向他们表示诚挚的谢意．

谢 政

2003 年 12 月

目　　录

第零章　预备知识

第一章　对策

第二章　二人零和有限对策

第三章　二人零和无限对策

第八章 微分对策

第零章　预备知识

为了读者阅读的方便，我们把对策论将要涉及到的预备知识集中于一章.

本章简明扼要地介绍凸集、凸函数、线性规划、Stieltjes 积分、不动点定理及可测函数与弱收敛等概念和性质.

0.1　凸性

本节讨论凸集和凸函数的概念及性质.

本书中所出现的向量均为行向量.

定义 0.1.1　设 $x_1, x_2, \cdots, x_m \in \mathbb{R}^n$，常数 $\lambda_i \geqslant 0 (i = 1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，则称 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的一个凸组合(convex combination). 若 $\lambda_i > 0 (i = 1,2,\cdots,m)$，且 $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，则称该凸组合为严格凸组合(strictly convex combination).

定义 0.1.2　设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$，且 $\forall x_1, x_2 \in S$，有

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in S, \quad \forall \lambda \in [0,1],$$

则称 S 为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集(convex set).

图 0.1.1 给出了凸集的正例和反例.

(a) 凸集　　　　(b) 非凸集

图 0.1.1　凸集和非凸集

凸集的例子还很多,三角形、四面体、球体等.一般来说,凸集的并不一定是凸集,但凸集的交仍是凸集.

定义0.1.3 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 是凸集,$x_0\in S$,若 x_0 不能表示成 S 中两个不同点的严格凸组合,则称 x_0 是 S 的极点(extreme point).

例如,在平面上,闭三角形的三个顶点都是极点;闭圆盘的圆周上每一点都是极点;开圆盘没有极点;原点是每个象限的惟一极点.

定义0.1.4 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$,S 中任意两个点的所有凸组合构成的集合称为 S 的凸包(convex hull),记为 $H(S)$,即

$$H(S)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\;\middle|\;x_i\in S,\lambda_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,m,\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1,m\in\mathbb{N}_+\right\}.$$

特别地,若 $S=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,则称 $H(S)$ 是由 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 生成的凸包.

凸集有许多重要性质,例如凸集分离定理.

定理0.1.1(凸集分离定理) 设 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空闭凸集,$y\in\mathbb{R}^n\setminus S$,则存在 $p\in\mathbb{R}^n$,$p\neq 0$ 以及 $\alpha\in\mathbb{R}$,使

$$px^{\mathrm{T}}\leqslant\alpha<py^{\mathrm{T}},\quad\forall x\in S.$$

证明 因为 $S\subseteq\mathbb{R}^n$ 为非空闭凸集,$y\notin S$,而且范数 $\|x-y\|$ 关于 x 是 S 上的连续函数,所以存在 $\bar{x}\in S$,使

$$\|\bar{x}-y\|=\min\{\|x-y\|\mid x\in S\}>0.$$

由 S 为凸集可知

$$\lambda x+(1-\lambda)\bar{x}\in S,\quad\forall x\in S,\forall\lambda\in[0,1].$$

于是

$$\begin{aligned}\|\bar{x}-y\|^2&\leqslant\|\lambda x+(1-\lambda)\bar{x}-y\|^2\\&=\|\bar{x}-y\|^2+\lambda^2\|x-\bar{x}\|^2+2\lambda(\bar{x}-y)(x-\bar{x})^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

从而

$$\lambda\|x-\bar{x}\|^2+2(\bar{x}-y)(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\quad\forall x\in S,\forall\lambda\in(0,1).$$

令 $\lambda\to 0^+$,得

$$(\bar{x}-y)(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\geqslant 0,\quad\forall x\in S.$$

记 $p=y-\bar{x}$,则 $p\neq 0$,且 $p(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\leqslant 0(\forall x\in S)$.又记 $\alpha=p\bar{x}^{\mathrm{T}}$,则

$$px^{\mathrm{T}}\leqslant\alpha,\quad\forall x\in S.$$

另一方面,由于

$$py^{\mathrm{T}}-\alpha=py^{\mathrm{T}}-p\bar{x}^{\mathrm{T}}=p(y-\bar{x})^{\mathrm{T}}$$

$$= \| y - \bar{x} \| > 0,$$

因此

$$px^{\mathrm{T}} \leqslant \alpha < py^{\mathrm{T}}, \quad \forall x \in S. \qquad \square$$

凸集分离定理可以用图 0.1.2 表示.

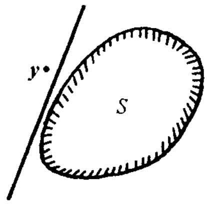

图 0.1.2　凸集分离定理的示意图

下面再介绍与凸集有关的两类特殊的函数.

定义 0.1.5　设 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $f: S \to \mathbb{R}$, 如果 $\forall x_1, x_2 \in S$, $\forall \lambda \in [0,1]$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f 为 S 上的凸函数(convex function). 如果 $\forall x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2$, $\forall \lambda \in (0,1)$, 都有

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称 f 为 S 上的严格凸函数(strictly convex function).

如果 $-f$ 为 S 上的凸函数, 则称 f 为 S 上的凹函数(concave function). 如果 $-f$ 为 S 上的严格凸函数, 则称 f 为 S 上的严格凹函数(strictly concave function).

图 0.1.3 给出了凸函数、凹函数和非凸非凹函数的图形.

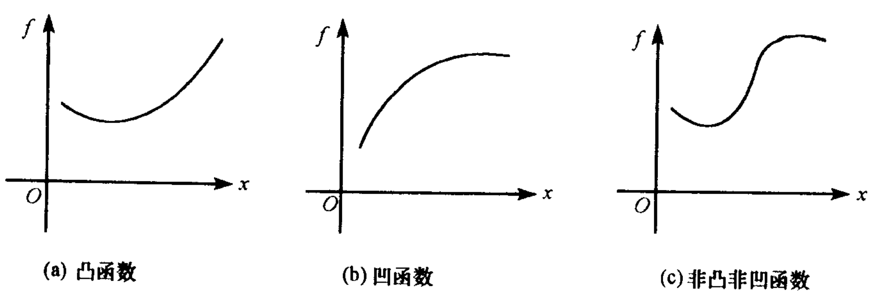

图 0.1.3　凸函数、凹函数和非凸非凹函数的图形

由凸函数和凹函数的定义易知, 线性函数

$$f(x) = ax^{\mathrm{T}} + b, \quad a, x \in \mathbb{R}^n, a \neq 0, b \in \mathbb{R}$$

既是凸函数又是凹函数.

0.2 线性规划

本节我们并不展开讨论线性规划,而仅仅涉及两个问题:一是给出单纯形法求解线性规划的算法步骤;二是给出对偶理论中一个十分漂亮的结果:原问题与对偶问题都有最优解的充要条件是它们都有可行解.为此,我们先给出一系列基本概念.

我们知道,任何一个线性规划都可以化为如下的标准形式:

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \\ \quad\ \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{LP}$$

其中 $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为约束矩阵(constraint matrix),方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 称为约束方程组(system of constraint equations),$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$ 称为非负约束(nonnegative constraint).并且我们总是假设 $n \geqslant m \geqslant 1$,且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = m$,即 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩矩阵.

下面给出线性规划解的一系列概念.

定义 0.2.1 称满足约束方程组及非负约束的向量 $\boldsymbol{x}$ 为可行解(feasible solution),可行解的全体称为可行域(feasible region),记作 K,即

$$K = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\};$$

称使得目标函数 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ 在 K 上取得最小值的可行解为最优解(optimal solution),并称最优解对应的目标函数值为最优值(optimal value).

定义 0.2.2 在问题(LP)中,$\boldsymbol{A}$ 的任一个 m 阶满秩子方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为基(basis),$\boldsymbol{B}$ 中 m 个线性无关的列向量称为基向量(basic vectors);$\boldsymbol{x}$ 中与 $\boldsymbol{B}$ 对应的分量称为关于 $\boldsymbol{B}$ 的基变量,基变量构成的向量记作 $\boldsymbol{x}_B$;其余的变量称为关于 $\boldsymbol{B}$ 的非基变量,非基变量构成的向量记为 $\boldsymbol{x}_N$;不失一般性,假设 $\boldsymbol{x}$ 的前 m 个分量为基变量,后 $n-m$ 个分量为非基变量,如果让

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_B = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},$$

那么 $\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$ 的一个解,称为基本解(basic solution);若 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \geqslant \boldsymbol{0}$,则称相应的基本解 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(LP)的关于基 $\boldsymbol{B}$ 的一个基本可行解(basic feasible solution),相应的基 $\boldsymbol{B}$ 称为问题(LP)的可行基(feasible basis).

下面给出单纯形法的算法步骤:

Step 1 找一个可行基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_{j_1}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p}_{j_2}^{\mathrm{T}}, \cdots, \boldsymbol{p}_{j_m}^{\mathrm{T}})$,求出关于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形表

$T(\boldsymbol{B})$，如表 0.2.1 所示，其中 $\boldsymbol{c}_B$ 为目标函数中基变量的系数构成的 m 维向量，$(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n) = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$.

表 0.2.1　关于基 $\boldsymbol{B}$ 的单纯形表 $T(\boldsymbol{B})$

	x_1	$\cdots$	x_r	$\cdots$	x_n	
x_{j_1}	b_{11}	$\cdots$	b_{1r}	$\cdots$	b_{1n}	b_{10}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{j_s}	b_{s1}	$\cdots$	b_{sr}	$\cdots$	b_{sn}	b_{s0}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{j_m}	b_{m1}	$\cdots$	b_{mr}	$\cdots$	b_{mn}	b_{m0}
f	π_1	$\cdots$	π_r	$\cdots$	π_n	$\bar{f}$

我们再给出 $T(\boldsymbol{B})$ 的另一种形式，如表 0.2.2 所示，它告诉我们 $T(\boldsymbol{B})$ 是如何求出的.

表 0.2.2　矩阵形式的单纯形表 $T(\boldsymbol{B})$

	$\boldsymbol{x}$	
$\boldsymbol{x}_B^{\mathrm{T}}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$
f	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$

Step 2　若 $\pi_j \leqslant 0(j = 1, 2, \cdots, n)$，则关于 $\boldsymbol{B}$ 的基可行解 $\bar{x}$ 就是问题(LP)的最优解，$\bar{f}$ 为最优值，算法结束；否则转 Step 3.

Step 3　若有 $\pi_r > 0$，使 $T(\boldsymbol{B})$ 中 x_r 所对应的列非正，即

$$(b_{1r}, b_{2r}, \cdots, b_{mr})^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{0},$$

则问题(LP)无最优解，算法结束；否则转 Step 4.

Step 4　令

$$r = \min\{l \mid \pi_l = \max_{\pi_j > 0} \pi_j\},$$

将 x_r 添加为基变量；再令

$$j_s = \min\left\{j_k \,\middle|\, \frac{b_{k0}}{b_{kr}} = \min_{b_{ir} > 0} \frac{b_{i0}}{b_{ir}}\right\},$$

将 x_{j_s} 从基变量中删除.

Step 5　进行下列$\{s,r\}$旋转变换：

(1) 将 $T(\boldsymbol{B})$ 中第 s 行同除以b_{sr} 作为新的第s 行，即

$$(s\text{ 行}) := \frac{1}{b_{sr}}\cdot(s\text{ 行});$$

(2) 将表中新的第 s 行乘以$(-b_{ir})$ 加到第 i 行$(i\neq s)$，得到新的第 i 行，即

$$(i\text{ 行}) := (i\text{ 行}) - b_{ir}\cdot(s\text{ 行})\qquad(i\in\{1,2,\cdots,m\}\setminus\{s\});$$

(3) 将表中新的第 s 行乘以$(-\pi_r)$ 加到第 $m+1$ 行，得到新的第 $m+1$ 行，即

$$(m+1\text{ 行}) := (m+1\text{ 行}) - \pi_r\cdot(s\text{ 行}).$$

变换后得到新单纯形表 $T(\tilde{\boldsymbol{B}})$，用 $\tilde{\boldsymbol{B}}$ 代替$\boldsymbol{B}$，$T(\tilde{\boldsymbol{B}})$ 代替 $T(\boldsymbol{B})$，即 $\boldsymbol{B}:=\tilde{\boldsymbol{B}}$，$T(\boldsymbol{B}):=T(\tilde{\boldsymbol{B}})$，再转 Step 2.

下面来介绍对偶理论.

定义 0.2.3　对线性规划问题

$$\begin{cases}\min \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 构造另一个线性规划问题

$$\begin{cases}\max \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$. 我们称后者为前者的对偶问题(dual problem)，称前者为原问题(prime problem)，也称这两个问题互为对偶问题.

对一个一般的线性规划问题

$$\begin{cases}\min \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\geqslant\boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{x}_1\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{P}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是$m_i\times n_j$ 矩阵，$\boldsymbol{b}_i$ 为m_i 维向量，$\boldsymbol{c}_j$ 为n_j 维向量，$\boldsymbol{x}_j$ 也是n_j 维向量，$i=1,2$；$j=1,2$. 我们不难求得其对偶问题为

$$\begin{cases}\max \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\\ \text{s.t. } \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\leqslant\boldsymbol{c}_1^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{c}_2^{\mathrm{T}}\\ \quad\ \boldsymbol{y}_1\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{D}$$

关于问题(P)和问题(D)有下面的结论.

定理 0.2.1　问题(P)和问题(D)都有最优解当且仅当它们都有可行解.

证明　只需证明充分性.

设问题(P)和问题(D)分别有可行解$(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$和$(\bar{y}_1,\bar{y}_2)$,并设(x_1,x_2)为问题(P)的任一个可行解,则

$$
\begin{aligned}
c_1x_1^{\mathrm{T}}+c_2x_2^{\mathrm{T}} &\geqslant (A_{11}^{\mathrm{T}}\bar{y}_1^{\mathrm{T}}+A_{21}^{\mathrm{T}}\bar{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}x_1^{\mathrm{T}}+(A_{12}^{\mathrm{T}}\bar{y}_1^{\mathrm{T}}+A_{22}^{\mathrm{T}}\bar{y}_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}x_2^{\mathrm{T}}\\
&= \bar{y}_1(A_{11}x_1^{\mathrm{T}}+A_{12}x_2^{\mathrm{T}})+\bar{y}_2(A_{21}x_1^{\mathrm{T}}+A_{22}x_2^{\mathrm{T}})\\
&\geqslant b_1\bar{y}_1^{\mathrm{T}}+b_2\bar{y}_2^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

即目标函数$c_1x_1^{\mathrm{T}}+c_2x_2^{\mathrm{T}}$在问题(P)的可行域上有下界,从而有下确界.又因为问题(P)的可行域为闭的,所以下确界在可行域上可以达到,即问题(P)有最优解.

同理可证问题(D)也有最优解.　□

0.3　Stieltjes 积分

我们知道,如果$f(x)$是$[a,b]$上的可积函数,$g(x)$是$[a,b]$上的可导函数,则积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$可化为$\int_a^b f(x)\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$.但是,如果$g(x)$不可导呢?概率论中的分布函数一般就是不可导的.Stieltjes积分是研究此问题的一个有力工具.下面给出其定义及基本性质.

定义 0.3.1　设$f(x)$是定义在$[a,b]$上的实函数.作分划

$$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并作和式$S_\Delta=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$,称

$$\bigvee_a^b(f)=\sup\{S_\Delta \mid \Delta\text{ 为区间}[a,b]\text{的任一个分划}\}$$

为f在$[a,b]$上的全变差(total variation).若$\bigvee_a^b(f)<\infty$,则称$f(x)$是$[a,b]$上的囿变函数或有界变差函数(bounded variation function).

定义 0.3.2　设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,$g(x)$是$[a,b]$上的囿变函数,并且

$$\Delta: a=x_0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\cdots<\xi_n<x_n=b$$

是区间$[a,b]$的分划.我们定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \lim_{\delta\to 0^+}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})],$$

其中 $\delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i - x_{i-1}|$，它由 Δ 确定，并称积分表达式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 为函数 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 Riemann-Stieltjes 积分，简称 Stieltjes 积分.

关于 Stieltjes 积分有以下的一些基本性质（我们假设所讨论的积分均存在）：

(1) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}g(x)$;

(2) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\mathrm{d}g(x)$;

(3) $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}g(x) + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}g(x)$;

(4) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}[g_1(x)+g_2(x)] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}g_1(x) + \int_a^b f(x)\mathrm{d}g_2(x)$;

(5) $\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}g(x) = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$,

其中 α 为任意常数，区间 $[a,b]$ 是有界闭的.

实际上，对无界区间 $(-\infty,b]$，$[a,+\infty)$ 以及 $(-\infty,+\infty)$，也可以定义 Stieltjes 积分. 以区间 $[0,+\infty)$ 为例，若对每个非负整数 k，Stieltjes 积分 $\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在，且 $\left|\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}g(x)\right| < \infty$，则称

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}g(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}g(x)$$

为 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的 Stieltjes 积分. 上述五条基本性质对于无界区间仍然成立.

若 $g(x)$ 取为阶梯函数，则有如下漂亮的结果.

定理 0.3.1 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，$I_t(x)$ 是阶梯函数，即当 $t\in(0,1]$ 时，

$$I_t(x) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant x < t, \\ 1, & t\leqslant x\leqslant 1; \end{cases}$$

当 $t=0$ 时，

$$I_0(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x\leqslant 1, \end{cases}$$

则有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_t(x) = f(t).$$

证明 很显然 $I_t(x)$ 是[0,1]上的囿变函数.

作分划

$$\Delta: 0 = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \cdots < \xi_n < x_n = 1,$$

并令 $\delta = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i - x_{i-1}|$, 由定义知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_t(x) = \lim_{\delta\to 0^+}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[I_t(x_i) - I_t(x_{i-1})].$$

若 $t = 0$, 则

$$I_0(x_i) - I_0(x_{i-1}) = \begin{cases}1, & i = 1,\\ 0, & i \neq 1.\end{cases}$$

从而,此时有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_0(x) = \lim_{\delta\to 0^+} f(\xi_1).$$

当 $\delta \to 0^+$ 时, $\xi_1 \to x_0 = 0$, 又 $f(x)$ 连续,故

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_0(x) = f(0).$$

如果 $0 < t \leqslant 1$, 此时存在整数 $i_0(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$, 使 $x_{i_0-1} < t \leqslant x_{i_0}$, 于是

$$I_t(x_i) - I_t(x_{i-1}) = \begin{cases}1, & i = i_0,\\ 0, & i \neq i_0.\end{cases}$$

从而,此时有

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_t(x) = \lim_{\delta\to 0^+} f(\xi_{i_0}).$$

当 $\delta \to 0^+$ 时, $\xi_{i_0} \to t$, 再由 $f(x)$ 的连续性知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}I_t(x) = f(t).$$ □

0.4 不动点定理

Brouwer 不动点定理是研究方程的一个十分有效的工具,对该定理的证明有很多种方法,本节将利用单纯形来给出一个巧妙的证明.

定义 0.4.1 设 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r \in \mathbb{R}^n$, 且 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_0$ 线性无关,则称 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 生成的凸包 $H(\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\})$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 为顶点的 r 维单纯形(simplex),记为 S^r.

定义 0.4.2 设 $\boldsymbol{x} \in S^r$, 系数 $\lambda_j \geqslant 0 (j = 0, 1, \cdots, r)$, $\sum\limits_{j=0}^r \lambda_j = 1$, 使得 $\boldsymbol{x} =$