文都教育考研精品系列

2005

考研数学历年真题精析（数学四）

主　编：蔡子华

副主编：韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌

现代出版社

文都教育

2005 年

考研数学历年真题精析(数学四)

主　编:蔡子华
副主编:韩於羹　曾祥金　童　武　樊启斌
策　划:文都考研信息中心

现 代 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

2005年考研数学历年真题解析/蔡子华编. —北京:
现代出版社,2004

ISBN 7—80188—280—6

Ⅰ.2... Ⅱ.蔡... Ⅲ.数学(四)—研究生—入学考试—解题
Ⅳ.D0—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第026507号

编　　者:蔡子华
责任编辑:张俊国
出版发行:现代出版社
地　　址:北京市安定门外华安里504号
邮政编码:100011
电　　话:010—64267325　64240483(传真)
电子邮箱:xiandai@cnpitc.com.cn
印　　刷:北京长阳汇文印刷厂
开　　本:787×1092毫米 1/16
印　　张:10.75
版　　本:2004年4月第1版　2004年4月第1次印刷
印　　数:1—6000册
书　　号:ISBN 7—80188—280—6
套书定价:66.00元

考研数学精品名师简介

蔡子华

全国著名考研数学辅导专家，连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长。蔡老师从事考研辅导工作十几年，熟悉考生的弱点和考试的难点，深谙命题规律和重点，授课针对性极强，效果卓著。同时蔡子华老师更以能全程讲授微积分、线代、概率并能融会贯通和押题精准而闻名。

韩於羹

北京航空航天大学数学系教授，具有多年考研辅导经验。“从来不需要想起，永远也不会忘记”，是韩老师的经典名句，他诙谐幽默却又不失生动技巧的讲课方式使你对数学的兴趣猛增，从更深，更广泛的层面去理解数学，掌握数学，从而顺利渡过考研难关。

曾祥金

著名考研辅导专家，数学系博士生导师，长期参与研究生考试的命题研究、辅导及阅卷工作。全国经济博弈论专业委员会常务理事，主持或参与了多项国家级科学研究基金资助项目以及多项教学研究项目，并有多项成果获奖励。

童　武

著名考研辅导专家，首都师范大学教授、北京大学客座教授。以全程讲解微积分、线性代数、概率论与数理统计而著称考研数学界。其从事考研辅导数十年。足迹遍及华夏，桃李广布九州，授课上一直倡导“在课堂上解决问题”，其解题方法独特，记忆方法更是令人叫绝，受到广大学员的一致好评。

樊启斌

武汉大学博士生导师，长期从事考研数学的辅导工作，讲课通俗易懂，注重基础，突出重点，举一反三，其辅导效果得到学员的一致认可。

2005 年版本前言

毛泽东同志在 1930 年 5 月就“反对本本主义”提了这样一个建议：你对于那个问题不能解决吗？那末，你就去调查那个问题的现状和历史吧！…… 调查就是解决问题。

同样的道理，如果考生对考研数学的试题和命题规律不了解或者不甚了解的话，那么考生就应该去接触并尝试考研数学历年真题。了解的角度有多种多样，如每年教育部制订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》（以下简称《考试大纲》）、试题、答案、评分标准、名家评析等。

《考试大纲》每年都在修订，其中 1997 年之前的试卷与 1997 年之后（含 1997 年）的试卷，无论从考试规定还是对考生要求来讲，都有很大的不同，比如 1997 年之前考研数学分为五类，其中数学三是理工类，1997 年之后考研数学改为四类，其中数学三是经济类。另外，即使同样是理工类的数学一，要求也不一样。

1997 年之后的试卷之所以具有足够代表性的另外一个原因是，考生只要有最新 8 年的试卷分析，就足以能掌握考研数学的规律与命题思想。如（A 表示考察知识点相同，A^{+} 表示类似题型，A^{++} 表示几乎完全相同的题目）：

2004 年数学一第(5) 题与 2003 年数学二第一大题第(6) 小题(A^{+})；

2004 年数学一第(20) 题与 2002 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学一第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(20) 题与 2000 年数学三第九大题(A^{++})；

2004 年数学三、四第(22) 题与 1999 年数学三第十一大题(A^{++})；

2004 年数学三第(23) 题与 2002 年数学一第十二大题(A)；

2004 年数学四第(18) 题与 2002 年数学四第七大题(A^{++})；

1997 — 2003 年之间重复出现的题型或考察相同知识点的题目有：

2003 年数学一第三大题与 2001 年数学三第六大题(A^{+})；

2003 年数学一第四大题与 2001 年数学一第五大题(A^{++})；

2003 年数学二第七大题与 1997 年数学二第八大题(A^{+})；

2003 年数学二第十一大题与 1999 年数学四第九大题(A^{++})；

2003 年数学三第九大题与 2002 年数学三第九大题(A^{+})；

2003 年数学四第七大题与 1998 年数学三第八大题(A^{+})；

2003 年数学四第十大题与 1999 年数学三第九大题(A^{++})；

2002 年数学二第十一大题(2) 与 1997 年数学二第三大题(6)(A^{++})；

2002 年数学三第十一大题(1) 与 1999 年数学三第十一大(1)(A^{++})；

2001 年数学一第六大题与 1997 年数学一第三大题(2)(A^{++})；

2001 年数学二第一大题(5) 与 2000 年数学一第一大题(4)(A^{++})；

2001 年数学三、数学四第三大题与 1997 年数学三第四大题(A++)；

2000 年数学二第二大题(2) 与 1997 年数学二第二大题(3)(A++)；

2000 年数学四第十大题与 1999 年数学四第九大题(A)；

……

事实上，真题就是最好的模拟题，考生应着力把最近 8 年的试题练精钻透。题不在多，贵在精！

因此，我们从题库中节选了从 1997 — 2004 年的考研数学的全部真题，我们特聘请全国著名考研辅导专家、连续五年担任研究生入学考试数学阅卷组组长的蔡子华老师担任主编，同时诚邀北京大学、清华大学等全国知名高等学府的数学教授参与编写这套丛书。

这套丛书的主要特点有以下几个方面：

1. 按数学一、数学二、数学三和数学四分类，分册出版；

2. 将历年真题以填空题 / 选择题 / 解答题的顺序安排到考试大纲规定的章节中，便于考生在复习时自我训练；

3. 将答案解析放在第三部分，并从[考点]→[分析]→[详解]→[讲评]→[得分率]等五个角度来展开分析与讲评；

值得注意的是，2004 数学试卷结构做了一些调整，增加两个选择题，减少一个解答题，解答题总分为 94 分，有意思的是，有些客观题(填空题和选择题)和解答题的设计思路非常巧妙，如：

例 1 客观题[04.4(5)] 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$，$\mathbf{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，则线性方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{b}$ 的解是________

例 2 解答题[04.3(17)] 设 $f(x)$，$g(x)$ 在$[a,b]$上连续，且满足$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$，$x\in[a,b)$，$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

总而言之，近 8 年考研数学真题分析充分揭示出这样的命题原则或者说遵循这样的指导思想：“既要有利于国家对高层次人才的选拔，也要有利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高”。

希望 2005 年考生在使用本书的时候，牢记两个“有利于”的指导思想。充分利用真题，提高分析问题、解决问题的能力。值得补充的是，由于近几年不少理工类的考题随后出现在经济类试卷之中，因此我们建议经济类考生在复习数学三、数学四的同时，可以参阅理工类的数学一、数学二。

由于时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请广大读者、数学同仁批评指正。

最后，祝 2005 年考生取得满意的成绩！

编者

2004 年 3 月

目　　录

第一部分　题型集萃

第二部分　历年试题

第三部分　真题解析

第一部分　题型集萃

第一章　微积分

第一节　函数、极限、连续

1999 年一(1)

1. 设函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(x)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

2000 年一(2)

2. 若 $a>0,b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}}=$ ________.

2002 年一(1)

3. 设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

2003 年一(1)

4. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

2004 年一(1)

5. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$ ________，$b=$ ________.

1998 年二(2)

6. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(　　)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x=1$

(C) 存在间断点 $x=0$　　(D) 存在间断点 $x=-1$

2000 年二(1)

7. 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　　)

(A) 存在且一定等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

2003 年二(2)

8. 设函数 $f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的(　　)

(A) 充分必要条件　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2004 年二(7)

9. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(-1,0)$　　(B) $(0,1)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

2004 年二(8)

10. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，

$$g(x)=\begin{cases}f\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 则(　　)

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

1997 年三

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right](a\neq 0)$.

1998 年三

12. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (n 为自然数).

2003 年三

13. 设 $f(x)=\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\cdot x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$，试补充定义 $f(0)$，使得 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续.

2004 年三(15)

14. 求　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

第二节　一元函数微分学

1997 年一(1)

1. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$ ________.

1998 年一(1)

2. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

2001 年一(1)

3. 设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A，α，β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时，K 关于 L 的弹性为________.

2003 年一(2)

4. $\int_{-1}^{1}(|x|+X)e^{-|x|}dx=$ ________.

2004 年一(2)

5. 设 $y=\arctan e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$，则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ ________.

1997 年二(2)

6. 若 $f(-x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$,在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0,f''(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有(　　)

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$　　(B) $f'(x)>0,f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$

1998 年二(1)

7. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,周期为 4,又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$,则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

1999 年二(1)

8. 设 $f(x)$ 是连续函数,$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则(　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必为偶函数

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必为奇函数

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必为周期函数

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必为单调增函数

2000 年二(2)

9. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导,则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是(　　)

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

2001 年二(1)

10. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,则(　　)

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2002 年二(1)

11. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义,在开区间 (a,b) 内可导,则(　　)

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$,有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f'(\xi)=0$

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

2003 年二(1)

12. 曲线 $y=xe^{x^{\frac{1}{2}}}$(　　)

(A) 仅有水平渐近线　　(B) 仅有铅直渐近线

(C) 即有铅直又有水平渐近线　　(D) 既有铅直又有斜渐近线

2004 年二(9)

13. 设 $f(x)=|x(1-x)|$，则(　　)

(A)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(B)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，但$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(C)$x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，且$(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D)$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2004 **年二(11)**

14. 设 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(　　)

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(a)$

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)>f(b)$

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=0$

1997 **年五**

15. 假设某种商品的需求量 Q 是单价 p(单位：元) 的函数 $Q=12000-80p$，商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数：$C=25000+50Q$；每单位商品需要纳税 2 元，试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

1998 **年六**

16. 设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在(假定 $t=0$) 就售出，总收入为 R_0(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0e^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$

假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

1998 **年七**

17. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 ξ、$\eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

1999 **年三**

18. 曲线 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴转成一个图形，记切点的横坐标为 a. 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何?

2000 **年六**

19. 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

2001 **年四**

20. 已知 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]，求 c 的值.$$

2001 **年六**

21. 某商品进价为 a(元 / 件)，根据以往经验，当销售价为 b(元 / 件) 时，销售量为 c 件(a，b，c 均为正常数，且 $b\geqslant\frac{4}{3}a$)，市场调查表明，销售价每下降 10%，销售量可增加 40%，现决定一次性降价. 试问，当销售价定为多少时，可获得最大利润?并求出最大利润.

2002 年七

22. 设某商品需求 Q 是价格 p 的单调减少函数：$Q=Q(p)$，其需求弹

$$\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0.$$

(1) 设 R 为总收益函数，证明 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(1-\eta)$.

(2) 求 $p=6$ 时，总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

2003 年六

23. 设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值是，$t(a)$ 最小？并求出最小值.

2004 年三(18)

24. 设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量.

(Ⅰ) 求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

(Ⅱ) 推导 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

第三节　一元函数积分学

1997 年一(2)

1. 设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ ________.

1998 年一(2)

2. $\int\frac{\ln x-1}{x^2}\mathrm{d}x=$ ________.

1999 年一(2)

3. 设 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f'_x(0,1,-1)=$ ________.

2000 年一(1)

4. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=$ ________.

2002 年一(2)

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$ ________.

2004 年一(3)

6. 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\mathrm{d}x=$ ________.

1997 年二(1)

7. 设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，

则当 $x \to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t \mathrm{d}t$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的（　　）

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

1999 年二(2)

8. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于（　　）

(A) xy　　(B) $2xy$　　(C) $xy+\frac{1}{8}$　　(D) $xy+1$

2001 年二(2)

9. 设 $g(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u$，其中 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2+1), & 若 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1}{3}(x-1), & 若 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内（　　）

(A) 无界　　(B) 递减　　(C) 不连续　　(D) 连续

2002 年二(2)

10. 设函数 $f(x)$ 连续，则在下列变上限定积分定义的函数中，必为偶函数的是（　　）

(A) $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$　　(B) $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$

(C) $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

2004 年二(10)

11. 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$，$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，在 $x=0$ 点不可导

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$

1997 年七

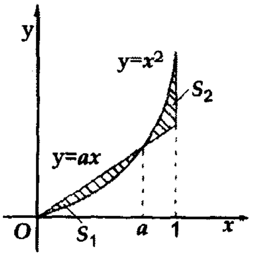
12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)\mathrm{d}t$，试证：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 为单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

1998 年八

13. 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $a<1$.



(1) 试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体

的体积.

1999 年六

14. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数,且当 $x \geqslant 0$ 时,$f(x)F(x) = \frac{xe^2}{2(1+x)^2}$.

已知 $F(0)=1, F(x)>0$,试求 $f(x)$.

1999 年七

15. 已知 $f(x)$ 连续,$\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t = 1-\cos x$,求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

1999 年八

16. 证明:当 $0<x<\pi$ 时,有 $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

2000 年四

17. 计算 $I = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^{1+x}+e^{3-x}}$.

2000 年八

18. 设函数 $f(x)$ 在$[0,\pi]$上连续,且$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0, \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0$. 试证明:在$(0,\pi)$内至少存在两个不同的点 ξ_1、ξ_2,使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

2001 年七

19. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且满足

$$f(1) = 3\int_0^{\frac{1}{3}} e^{1-x^2} f(x)\mathrm{d}x,$$

证明存在 $\xi \in (0,1)$,使得 $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

2001 年八

20. 设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内连续,$f(1)=\frac{5}{2}$,且对所有 $x,t\in(0,+)\infty$,满足条件

$$\int_1^{xt} f(u)\mathrm{d}u = t\int_1^x f(u)\mathrm{d}u + x\int_1^t f(u)\mathrm{d}u,$$ 求 $f(x)$.

2002 年三

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

2002 年五

22. 设 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$,求$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$

2002 年八

23. 设函数 $f(x), g(x)$ 在$[a,b]$上连续,且 $g(x)>0$,利用闭区间上连续函数性质,证明存在一点 $\xi\in[a,b]$,使$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2004 年三(19)

24. 设 $F(x)=\begin{cases}e^{2x},x\leqslant 0\\ e^{-2x},x>0\end{cases}$,$S$ 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$ 之间的面积,对任何 $t>0$,$S_1(t)$ 表示矩形 $-t\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant F(t)$ 的面积.求

(Ⅰ)$S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式;

(Ⅱ)$S(t)$ 的最小值.

第四节　多元函数微积分学

1999 **年一(2)**

1. 设 $f(x,y,z)=e^x yz^2$,其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数,则 $f'_x(0,1,-1)=$ ________.

2001 **年一(2)**

2. 设 $z=e^{-x}-f(x-2y)$,且当 $y=0$ 时,$z=x^2$,则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

2003 **年一(3)**

3. 设 $a>0$,$f(x)=g(x)=\begin{cases}a,若\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0,其他,\end{cases}$ 而 D 表示全平面,则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

1999 **年二(2)**

4. 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于(　　)

(A)xy　　(B)$2xy$　　(C)$xy+\dfrac{1}{8}$　　(D)$xy+1$

2003 **年二(3)**

5. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 取得极小值,则下列结论正确的是(　　)

(A)$F(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零

(B)$F(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零

(C)$F(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零

(D)$F(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在

1997 **年四**

6. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数,$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

1997 **年六**

7. 求曲线 $y=x^2-2x,y=0,x=1,x=3$ 所围成的平面图形的面积 S,并求该平面图绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

1997 **年八**

8. 设 D 是以点 $O(0,0)$,$A(1,2)$ 和 $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域,求$\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

1998 年四

9. 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

1998 年五

10. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$，求 $\iint\limits_D \sqrt{x}\,dxdy$.

1999 年四

11. 计算二重积分 $\iint\limits_D y\,dxdy$，其中 D 是由直线 $x=-2,y=0,y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y2}$ 所围成的平面区域.

1999 年五

12. 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小.

2000 年三

13. 已知 $z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\frac{y}{x}$，求 dz.

2000 年五

14. 假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是 $p_1=18-2Q_1,p_2=12-2Q_2$，其中 p_1 和 p_2 分别表示该产品在两个市场的价格(单位：万元 / 吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量(即需求量，单位：吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

(1) 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(2) 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

2000 年七

15. 设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y & 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，求 $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x\}$.

2001 年三

16. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$，

求 $\frac{du}{dx}$.

2001 年五

17. 求二重积分 $\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\,dxdy$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x,y=-1$ 及 $x=1$ 围