

高中立体几何

重点知识归纳与验收



长 春 出 版 社

东北朝鲜民族教育出版社

《中学基础知识基本技能训练丛书》

高中立体几何 重点知识归纳与验收

潘福田 徐望根 田 盛
王续宗 张祖安 编

长 春 出 版 社
东北朝鲜民族教育出版社

高中立体几何重点知识归纳与验收

潘福田等 编

责任编辑：吴昌振 孙慧平

封面设计：王国庆

长春出版社出版
(长春市重庆路40号)

新华书店总店北京发行所发行
河北省迁安县印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32

1990年2月第1版

印张：6.875

1991年2月第2次印刷

字数：154 000

印数：23 301—46 109册

ISBN 7—80573—137—3/G·32

定价：2.70元

出版说明

基础知识、基本技能是中学阶段各科教学和训练的主要着眼点，亦是检验中学生对各科知识掌握、理解程度的参照坐标。

本套丛书就是从“双基”出发，遵循初、高中各科教学大纲的宗旨，根据近年来初、高中升学考试的总体趋势，按照初、高中各学科的知识体系编写而成的。

本丛书按学科分册，各册均由“学好××学科的钥匙”、“重点知识归纳与运用”、“升学考试模拟试题”、“参考答案”四部分组成。其中主体部分的“重点知识归纳与运用”包括“知识归纳”、“理解与运用”、“知识验收”等项。

由于本丛书立足于学科重点知识的系统归纳，既适用于初、高中升学考试的总复习，也可作为初、高中学生日常学习用书。

编者

1990年1月

《中学基础知识基本技能训练丛书》

编 委 会

主 编 严 诚

副主编 潘福田 盛 刚

编 委 严 诚 潘福田 盛 刚 马在珍

林宗炘 方纯义 胡炯涛 华跃义

熊佩锵 滕永康 金 新 卢鸿勋

王剑青 王绍宗 杨光禄 叶智友

胡 滨 伍谷奇 许洪廉 王文彩

赵长云 赵 政 李光琦 高晓霞

目 录

学好立体几何的钥匙.....	(1)
重点知识归纳与运用.....	(10)
第一章 共面 异面.....	(10)
第二章 平行、垂直 (一)	
——平行关系.....	(23)
第三章 平行、垂直 (二)	
——垂直关系.....	(33)
第四章 距离和角 (一)	
——距离.....	(51)
第五章 距离和角 (二)	
——角.....	(63)
第六章 多面体.....	(81)
第七章 旋转体.....	(103)
第八章 截面.....	(121)
第九章 接切.....	(128)
第十章 最值.....	(134)
升学考试模拟试题.....	(146)
参考答案.....	(159)

学好立体几何的钥匙

立体几何是研究空间图形的性质、画法、计算及其应用的
一门学科。它是平面几何的拓展与延伸，亦是进一步学习和
更加广泛应用的基础。现就怎样学好立体几何谈几点看法。

一、准确地掌握知识

立体几何教材中的定义、定理、公理、性质、法则（包
括画法）、公式、重要的解题规律和证明方法，是立体几何
的基础知识。它是分析、解决问题的根据，也是进一步学习
的基础。怎样学好这些知识呢？

1. 熟记教材中的定义、定理、公理、性质、公式、法
则等重要基础知识，把它作为分析问题、解决问题的根据。
例如学习立体几何第一章第一单元《平面》，就要熟记平面
的六个基本性质；学习第二单元《空间两条直线》，就要熟
记异面直线的定义、异面直线的距离和所成角的定义以及与
平行直线有关的三线平行公理（公理4）和空间等角定理等
等。把它们作为分析、解决问题的根据。

对于一些重要的定理，不但要熟记它的内容，还要熟记
它的名称，如线面平行的判定定理、线面垂直的性质定理和
三垂线定理等等。做到一看到定理马上能想起它的名称，或者
反过来一看到定理的名称马上想到定理的内容。只有这样才能
把所学的知识串联起来，形成体系，便于记忆和使用。

对于所学的知识，不仅要善于记忆，还要善于归类，把

它们按着一定的体系串联起来。例如，可按所研究的对象和问题的不同，把立体几何的知识分为两类，一是关于直线和平面的知识，另一是关于多面体和旋转体的知识。而在“直线和平面”中，又可以根据它所研究的对象和问题区分为平面、空间两条直线、空间的直线和平面及空间两个平面；

“多面体和旋转体”的知识又可以区分为多面体和旋转体两部分。这样就把整个立体几何知识区别为①平面；②空间两条直线；③空间的直线和平面；④空间两个平面；⑤多面体；⑥旋转体等六个部分。对于每个部分，再记忆主要的基础知识，这不仅便于记忆，也便于形成一个比较固定的知识体系，通过知识的内在联系加深理解和记忆。对于立体几何知识还可以通过另外的角度和途径把它们串联和归纳起来，那就是根据它们的共同的用途来分类，例如在“直线和平面”一章中，就可以按：①证直线在平面内的知识；②确定平面或判定两平面重合的知识；③证异面直线的知识；④证线线、线面、面面平行或垂直的知识；⑤求线线、线面、面面之间的距离和角的知识；⑥证线段和角相等的知识等等将知识分析、归纳、归类；在“多面体和旋转体”当中也可以归纳出：①证一多面体是棱柱、正棱柱、棱锥、正棱锥、棱台、正棱台、平行六面体、长方体、正方体的知识；②求多面体、旋转体中的点、线、面、截面之间的距离、角的知识；③求多面体和旋转体的表面积、截面面积和体积的知识。这种按用途归类，不仅有利于知识之间的相互联系，同时也为知识的应用创造了条件。

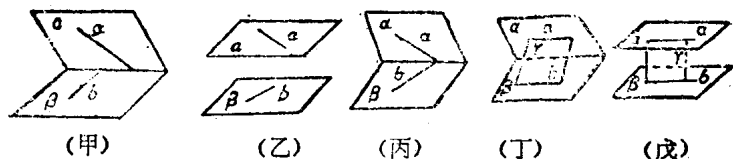
2. 准确地掌握定义、定理、公理、性质、公式、法则的内容，不要出现理解性、记忆性和应用方面的错误。对于定义要掌握定义中的条件和所定义对象的名称，否则就会在

应用中出现错误。例如在1983年的高考题中就有这样一道选择题：两条异面直线，指的是：

- (A) 在空间内不相交的两条直线；
- (B) 分别位于两个不同平面内的两条直线；
- (C) 某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线；
- (D) 不在同一平面内的两条直线。

〔答〕()

此题正确答案是(D)。但有相当多的同学答成(B)，还有的答成(A)和(C)。其原因是对“不在同一平面”是指“不能同时在任何一个平面内”这个含义没有搞清楚，例如分别在两个不同平面内的两条直线，可能是异面直线(如图中的甲和乙)，但也有不是异面直线的(图中的丙、丁、



戊)，那就是它们不在 α 、 β 内，但可以在第三平面 γ 内。准确地掌握定义就会逼着你认真去思考，就会不出或少出类似的错误。

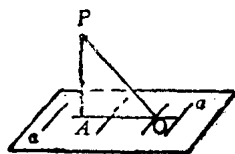
对于定理、公理要掌握它的条件和结论，并能根据定理的条件和结论给定理命名。例如线面平行判定定理有三个条件：①平面外的直线，②平面内的直线，③平面外的直线和平面内的直线平行。其结论是平面外的直线和平面平行。三个条件缺一不可，缺一就会出现“经过两条平行线中一条直线的平面必平行于另一条直线”的判定错误。因为这平面

还可以通过另一条直线，不符合另一条直线是在平面外这个重要条件。

对于公式、性质和法则，也要注意它的条件和结论，只有把条件、结论掌握好，才能把知识用好。

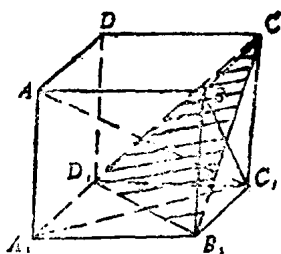
3. 了解定义、定理、公理、公式、性质、法则的用途，并能准确熟练地应用，对于已经熟记的知识不仅知道它所反映客观的规律和规定，还能通过对它们的条件、结论的分析以及典型问题的分析了解它在证明、计算、画图和判断方面的应用。例如对“三垂线定理”，它反映的是这样一条规律：

那就是平面内的一条直线，如果和斜线在平面内的射影垂直，就一定和这条斜线垂直。那就是它给了一个判定准则，也是就通过平面内的直线和射影垂直来判定这条直线和斜线垂直。



掌握这一规律就可以在实际应用中灵活运用。例如在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，

证明 $AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 时，可以先利用 $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$ 来断定 A_1C_1 是 AC_1 在这平面内的射影，再利用平面内的直线 B_1D_1 与这射影 A_1C_1 垂直（这是易证的）来证明 $B_1D_1 \perp AC_1$ ；



然后再利用 AB 是平面 BB_1C_1C 的垂线， B_1C 和斜线 AC_1 在平面 BB_1C_1C 内的射影 BC_1 垂直的条件证明 $B_1C \perp AC_1$ 或利用 $AD \perp$ 平面 DD_1C_1C 来证明 $D_1C \perp AC_1$ 。进而证明 $AC_1 \perp$ 平面 B_1CD_1 。对于三垂线定理就要求掌握到这种程度，否则就不能灵活运用。

4. 掌握知识间的内在联系, 通过横向或纵向的对比、类比加深对知识的理解, 例如在“直线和平面”一章中, 抓共面、异面、平行、垂直、距离、角之间的联系和同一类别中不同知识的区别和联系; 在“多面体和旋转体”中抓柱、锥、台、球的定义、性质、画法、截面、表面积和体积之间的区别与联系; 在棱柱中注意区别棱柱、直棱柱、正棱柱; 在平行六面体中注意区别直平行六面体、长方体、正方体的区别与联系等等, 都有利于知识的理解、记忆和掌握。

5. 注意立体几何和平面几何的区别和联系。学习立体几何首先要和平面几何区别开来, 注意研究对象变了, 许多在平面中成立的结论到空间就不适合了。例如在平面内两条直线(指不同直线)不平行就相交, 没有第三种可能; 而在空间, 不平行还可能是异面直线。类似这样的例子很多, 要注意区分。然而两种几何毕竟都是研究几何图形, 许多定义、定理还有相似之处。例如长方体的对角线定理($l^2 = a^2 + b^2 + c^2$)就和平面几何中的勾股定理类似。注意到这方面的联系就会事半功倍。

二、培养自己运用所学知识分析、解决问题的能力, 掌握一些必要的技能、技巧。

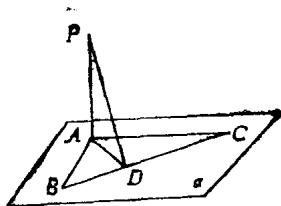
掌握了知识, 只是有了分析、解决问题的基础, 但有了基础不等于会使用, 还需要具有一定的能力, 这就要在立体几何的学习和复习中不断提高。

在立体几何的学习、复习中, 需要提高如下能力:

1. 提高对知识和问题的理解力。特别是对所遇到的问题, 要明确已知什么, 求什么, 通过什么样的途径(证明、计算、作图还是判定)达到这个要求, 要清清楚楚, 不能出现理解性的错误。其次是对题中所给的图形也要充分理解, 要

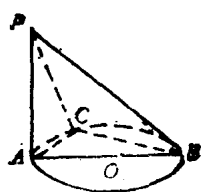
认识到它表示的是些什么样的空间图形,有哪些重要元素,各元素间的位置关系和数量关系怎样.不能仅靠直观,还要靠知识(立体几何中的特殊规定)、

靠分析、靠推理和想象.例如看到左面的图形应马上认识到它表示平面内的一个 $Rt\triangle ABC$ 和平面的一条垂线段 PA . $\angle BAC$ 的两边画得和表示平面的平行四边



形的两邻边分别平行,一般表示直角. AD 是 PD 在平面 α 上的射影,由于它和 BC 垂直,根据三垂线定理以它为射影的直线 PD 必然和 BC 垂直.在这种情况下, PA 是 P 到 α 的距离, PD 是 P 到直线 BC 的距离.把这些地方都看到了并且都理解了就有利于问题的进一步解决.

2. 提高对较复杂问题的分析能力,通过对问题的分析抓住问题的本质和解决这一问题的关键.例如在1986年高考中就出现了一道书上的习题,那就是:如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 是圆周上不同于 A 、 B 的任意一点.求证:平面 PAC 垂直于平面 PBC .这是一个比较复杂的问题,因为它的结论是证明两个平面互相垂直,而证明这两平面垂直的条件题中没有直接



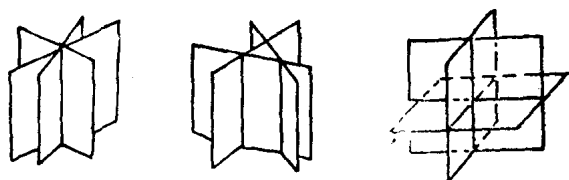
给出,需要我们去题中寻找.首先,根据面面垂直的判定定理,要证两平面垂直,只需在一个平面找到另外平面的一条垂线就可以了,有了这条垂线就可用判定定理直接证明.这条垂线怎么找?分析题给条件:给了一个线面垂直,就可以证明这条线(PA)和平面内的任意一条直线(包括 AB 、 AC 、 BC)垂直;给了一个直径,就可用平

几知识证明 AC 和 CB 垂直。综合这两个结论就可以发现 BC 既与 AC 垂直，又与 PA 垂直，因此和平面 PAC 垂直。复杂的问题就迎刃而解了。这种利用所学的知识由“未知”看“需知”或由“已知”看“可知”，沟通“已、未知”，是一种重要的分析问题的方法。使用这种方法，会不会成功，要看自己的实力和能力，要看知识的运用是否灵活。

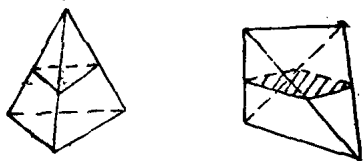
3. 提高运用所学知识做出正确的判断或进行正确的推理、演算的能力，也就是整个数学学科需要培养的逻辑思维能力和运算能力。这是因为数学问题的解决不能只靠理解和分析，还要靠具体的推理、演算，从已知出发逐步达到所要得出的结论。而在立体几何中，对推理的要求比初中提高了，那就是“言必有据”，只能用教科书用黑体字出现的定义、定理、公理、性质、公式、法则来做根据，而不能用其它东西做根据；对于推理过程要求的也比较严格，要比较全面、完整，这比高中数学的其他学科的要求严格。如果说其他学科主要看结论和重要的解题步骤，那么立体几何要看论证，要看它的全过程。不仅证明题要求，计算问题也要求必要的论证。这一点不仅在教学中要求，在考试中也要求。只要看一看高考的立体几何题（标准化试题除外）的评分标准就可以看出每一步都重要，都要评分。对于计算，也比平面几何复杂得多，特别是关于多面体和旋转体的计算，得到的结果往往不那么简单，不那么“凑整”。在判断上的要求也十分严格，稍不注意就要出问题。这种推理论证，判断计算的能力就要靠平日学习和复习不断培养。其培养途径是①准确掌握知识，不出判断错误；②掌握推理、判断、演算的规则，不做违反规律的事情；③掌握分析、解决各类问题，特别比较复杂的问题的规律的方法；④不断进行实践，积累解题经验，形成一些必

要的技能、技巧。

4. 培养和提高自己的空间想象力。首先，要注意所研究的问题是空间，分析、思考问题都在空间，不要局限于平面，树立站在空间的角度来分析、解决问题的观念，即树立空间观念；其次，是要想到可能出现的各种可能，不只想到一种可能。例如空间三个平面将空间最多分为几部分，不能只想到共线、交线平行两种情况，还要想到三面共点的这种情况。因此，正确的答案不是“六”、“七”而是“八”。又如判断空间到不共面四点距离相等的平面有几个？多数同学



只想到经过三棱锥三侧棱中点的平面；而想不到经过两组对棱中点的截面，误把七个平面答为四个平面。第三，掌握各



种空间图形的直观图或示意图的画法。会用直观图或示意图分析空间图形，或用简明直观的平面图形表示复杂的空间图形。这就要多观察、多记忆，多积累。

5. 提高综合运用所学知识分析、解决较复杂问题的能力。这就需要一是把遇到的问题分类，掌握立体几何问题的几个基本类型；二是掌握分析、解决各类问题的基本方法和规律。例如，如何确定平面？如何证线线平行？怎样求异

面直线的距离？怎样计算旋转体的体积等等。三是不断积累、总结经验，掌握一些具体的证明、计算方法。立体几何类型不太多，关键是我们能不能很好地掌握。

三、积极地进行学习、复习和解题的实践，养成良好的习惯，积累总结经验。

对于立体几何的知识首先要不断地复习、总结，增添新的内容，逐步地形成比较系统、完整的知识。二是养成“解前思、解中思、解后思”的所谓“三思而后行”的良好解题习惯。那就是解前要想遇到的是什么问题？属哪种类型？可用哪些知识来解或如何去解？解中可能发生什么困难或出现什么错误，做到有备而无患。其次，在解题中要注意从哪入手，经过什么样的途径达到什么样的结果？中间有哪些主要步骤，怎样写、怎样算，会不会出现理解和运用错误，怎样预防和检验；解后要先回过头来看一看，所做的答案是否符合问题的要求，是否合乎实际，有无更好的方法，有哪些规律性的东西，如何归纳和总结？三是积极参加各种练习，通过练习使知识更加准确、牢固；方法更加灵活、实用；对阶段考试、毕业考试和升学考试的特点和规律也有所掌握，使自己不仅学得好、用得好，而且考试也“考不倒”，以优异的成绩向党和国家汇报。

为使同学们准确地掌握知识，提高能力和积累经验，特在下面设立“重点知识归纳与运用”、“升学考试模拟试题”、“参考答案”，选择了一些精美的习题，并对知识进行系统的总结，通过对这些知识和习题的分析、解答使知识、能力和经验都得到进一步提高。

重点知识归纳与运用

第一章 共面、异面

空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们“共面”，如果不都在同一个平面内，又可以简单地说它们“不共面”或“异面”。共面、异面是立体几何中的一个重要问题，这是因为空间的点和线不一定共面，也不一定异面，是否共面或异面都需要判定和证明。除此之外，经过空间的某些点或直线能作并且只能作几个平面，也是立体几何中的一个重要问题。因此，学习和运用立体几何，就必须学习和研究有关共面、异面和确定平面的问题。

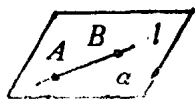
〔知识归纳〕

一、平面的基本性质

（一）有关直线在平面内的公理

公理1 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。即

$$\left. \begin{array}{l} A, B \in l \\ A, B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l \subset \alpha$$

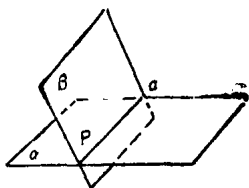


直线上所有的点在平面内可以说为直线在平面内，或说为平面经过直线。

（二）关于两个平面相交的公理

公理2 如果不重合的两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。

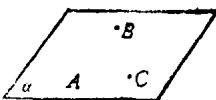
$$\text{即 } \left. \begin{array}{l} P \in \alpha \\ P \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta \neq \emptyset \\ \alpha \cap \beta = l \text{ (直线)} \\ l \ni P \end{array} \right.$$



(三) 有关平面确定的公理和推论

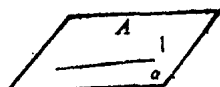
公理3 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面。或者简单地说不在同一直线上的三个点确定一个平面。

$$\text{即 } \left. \begin{array}{l} A, B, C \\ \text{不共线} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A, B, C \\ \text{确定一个平面} \end{array} \right.$$



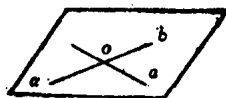
推论1 一条直线和这条直线外的一点确定一个平面。

$$\text{即 } A \in l \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A, l \\ \text{确定一个平面} \end{array} \right.$$



推论2 两条相交直线确定一个平面。

$$\text{即 } a \cap b = o \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a, b \\ \text{确定一个平面} \end{array} \right.$$



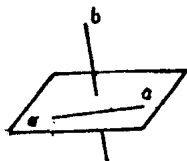
推论3 两条平行直线确定一个平面。

$$\text{即 } a \parallel b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a, b \\ \text{确定一个平面} \end{array} \right.$$

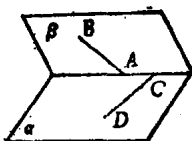


二、异面直线

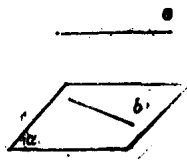
(一) 异面直线的定义



(图1)



(图2)



(图3)