普通高等院校计算机类专业系列教材

Discrete Mathematics

离散数学

主编　马光思

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

普通高等院校计算机类专业系列教材

离散数学

Discrete Mathematics

主编　马光思

参编　刘家祥　张维琪　田絮资

西安电子科技大学出版社

2004

内 容 简 介

本书系统地介绍了离散数学的基本内容。全书共分 9 章，内容包括命题逻辑、谓词逻辑、集合论、关系、函数与无限集、代数系统、布尔代数、图论、数论及组合计数基础。本书内容取舍得当，结构组织合理。各章均配有适量习题，便于读者巩固书中的概念和知识。

本书可作为计算机及相关专业的离散数学教材，供一般本科院校教学使用，也可作为其他类院校相关专业的离散数学教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学＝Discrete Mathematics/马光思主编．
—西安：西安电子科技大学出版社，2004.7
(普通高等院校计算机类专业系列教材)
ISBN 7－5606－1387－X

Ⅰ．离…　Ⅱ．马…　Ⅲ．离散数学—高等学校—教材　Ⅳ．0158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 033279 号

责任编辑　云立实　龙晖
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　　邮　编　710071
http://www.xduph.com　　　E-mail：xdupfxb@pub.xaonline.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2004 年 7 月第 1 版　2004 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×1092 毫米　1/16　印张 20.5
字　　数　487 千字
印　　数　1～4 000 册
定　　价　22.00 元
ISBN 7－5606－1387－X/O・0070(课)

XDUP 1658001－1

普通高等院校计算机类专业系列教材
编审专家委员会名单

项目策划　陈宇光　马乐惠
策　　划　云立实　马武装　臧延新　马晓娟
电子教案　马武装

前　言

相对于研究连续量的微积分，离散数学是以离散量为研究对象的一门数学分支学科。20世纪60年代兴起的离散数学，其目的和用途是为蓬勃发展的计算机科学及时提供一种理论基础。面对突如其来的任务，一方面离散数学要把传统的数理逻辑、集合论、抽象代数、布尔代数、图论、数论等数学分支的相关内容纳入自己的研究范畴，在理论的渊源上可以追溯到人类智力活动的初期；另一方面，离散数学还要把包容的理论与计算机科学的实际应用及科研成果相结合，涉足于科学进步的前沿阵地。跨越数学诸多分支和整个计算机科学两大领域的繁重任务，使得离散数学所涵盖的知识、主题，涉及的概念、方法，采用的符号、工具的多、广都远远超出了其他学科。这些特点正是离散数学难教、难学的根本原因，也正是离散数学深具诱惑和迷人之处。

国外许多离散数学教材仍然致力于兼顾基础理论和实际应用的双重原则，教材内容和课时安排往往要多达一个学年。我国结合自己的教育现状和教学改革实际，逐渐精简教材内容，压缩了一部分生僻理论，并把一部分应用题材转移给了后续的专业课，从而或多或少地减轻了离散数学教学的压力和负担。离散数学的基本理论和方法，大量应用在数字电路、数据结构、编译原理、操作系统、数据库系统、算法分析与设计、软件工程、人工智能、计算机网络等计算机专业的课程及信息科学的许多相关课程中。离散数学的教学目的旨在培养和训练学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和归纳构造能力，提高学生的专业水平，为后续专业课的学习奠定必要的理论基础。

本书根据国家教委对计算机专业教学的基本要求，参考了近30年来国内外许多离散数学教材的内容取舍情况，包含了数理逻辑、集合论、代数系统、图论和组合计数几个部分的内容。全书选材适当，结构合理，文字严谨，分析透彻，叙述深入浅出，举例短小精悍，并配有大量习题。本书既可作为普通高等学校计算机等专业的本科生教材，也可作为数学和计算机科学爱好者的参考书。结合我们多年来的教学经验，本书建议学时为90～120学时。任课教师可结合自己学校的教学要求安排学时数，适当删、减带星号部分的内容和组合计数的部分内容。

本书的命题逻辑，谓词演算的部分内容，代数系统，图论的部分内容，数论及组合计数基础由马光思编写；集合论，关系，函数与无限集由刘家祥撰写初稿；布尔代数，图论的绝大部分由张维琪撰写初稿；谓词逻辑的大部分，图论中树的一部分由田絮资撰写初稿。全书由马光思统稿，从最初动笔到交稿共历时一年多。在编写过程中，曾与刘国荣、王吉普老师多次交换意见，讨论本书的内容和观点，使作者受益匪浅。本书参考了大量的离散数学书籍和资料，在此一并向有关作者表示感谢。衷心感谢西安电子科技大学出版社对本书的出版给予的大力支持，特别感谢出版社的总编和编辑，感谢他们对本书的关心及所做的大量工作。

因作者水平有限，书中不妥及错误之处在所难免，恳请广大读者和同行批评指正。

编　者

2003年11月

目 录

第1章　命题逻辑

逻辑(Logic)是研究推理方法的学科。逻辑推理(Logical Reasoning)不但可以用于数学进行定理证明，用于计算机科学检验程序的正确性，用于自然及物理科学提取或抽象实验结论，还可以用于社会科学及日常生活解决各种难题。

命题逻辑也称命题演算(Propositional Calculus)，它以命题为研究对象(Object)，以命题联结词为逻辑运算(Operation)，以形式化符号语言为工具，讨论逻辑运算所满足的规律，采用一些基本推理规则和技术研究命题之间的推理关系，确定论证的有效性。

下面介绍命题逻辑的基本概念。

1.1　命题及命题联结词

1. 命题及其符号化(命题符号化的第一步)

命题(Statement，Proposition)是一种陈述句，它要么为真(成立、正确)，要么为假(不成立、错误)，但不能二者兼具。

一般常用命题表示事物具有的性质或事物之间存在的关系。例如，素数有无穷多个，Ada 是世界上第一位程序员，加法满足交换律：$a+b = b+a$，高等数学比初等数学更抽象，这些都是命题。

而像"Are you sure?"、"给我倒杯水。"、"天气真好!"这些疑问句(Question)、祈使句(Invocation)、感叹句(Interjection)等都不是命题，因为它们都不是陈述句。

又若取值与其他因素有关，或无论为真还是为假都将引出矛盾的陈述句也不视为命题。亦即，命题的真值(Truth)或逻辑值(Value)能且只能在"真"、"假"二中取一。亦即，命题逻辑属于二值逻辑。

例如，$5-x=2$ 虽是陈述句，但因其取值与未知量 x 有关而无法确定，所以不算命题。又如，"他说他讲的是假话。"这种语句比较特殊，需要仔细推敲。若设其为真，则可推出其为假，反之，若设其为假，又可推出其为真。这种无论为真、为假都将引出矛盾的陈述句常被逻辑学家称为悖论(Absurdity)，也不视其为命题。

能用一条简单陈述句描述的命题称为**简单命题**(Simple Proposition)、**原子命题**(Atomic Proposition)或**本原命题**(Primitive Proposition)。

(1) 把简单命题用一个符号或字母表示。

所用的符号可以取 p，q，r，…或 p_i，q_j，r_k，…，其中，索引下标 i，j，k，…可取 1，2，3，…。书写格式是把符号写在左端，把用自然语言描述的命题写在右端，中间用冒号"："分隔。

(2) 把命题的逻辑值真(True)用 T 或 1 表示，假(False)用 F 或 0 表示。例如：

p：The earth revolves round the sun。

q：1+1>3。

r：Leibniz 是数理逻辑的创始人。

s：鲁班的匠工技艺高于墨子。

u：金星(Venus)表面气温高达 1000℉。

其中，命题 p 的真值为 1；命题 q 的真值为 0；命题 r 的真值为 1；命题 s 通过考证鲁班与墨子关于研制攻、防器械的争论，可认为其真值为 0；命题 u 的真值目前虽然确定不了，但最终总可以用科学原理推知其为 1 还是为 0。

分析讨论如下命题：

p：现在是凌晨 6 点。

q：实验室的灯光彻夜不熄。

r：右移一个单位就到了原点。

s：室外比室内舒适。

u：2+2=11。

若恰在上午 6 时，则 p 的真值为 T，否则为 F。q 的真值要看具体指哪个实验室，也可能当时大家都清楚 q 中指的是连续加班的 A 实验室，也可能指忘记了关灯的 B 实验室，即 q 取值为 T(简称 q 为 T)。但一般而言，q 未必为 T。r 的真值与当前指向的点有关，若在原点左侧一个单位，则 r 值为 T，否则 r 的值为 F。s 的真值与所指房间内、外的原始条件有关，有时也可能与当事人的心情有关(比如，小孩子想到屋外去玩)，即 s 可能为真，也可能为假。u 的真值要看讨论范围，若对三进制运算，则为 T，其他数制运算则为 F。

注 1 通过对以上有意选出的命题的分析讨论可知，约定俗成，命题的真值将随时间、空间、环境条件、讨论范围及观察者的观测角度和所持立场而异。

注 2 命题逻辑并不在意某个命题的真值究竟是 T 还是 F，只要能取其一且仅取其一就行，对两个真值 T，F 同等看待。

2. 命题联结词及其符号化(命题符号化的第二步)

自然语言中有许多复杂语句，因含有**联结词**(Connective)“非，而且，或者，若…… 则……，……当且仅当……”等而无法用简单陈述句表达。命题逻辑对它们的处理方法是分解与组合。所谓分解，是先把复杂语句拆分成若干简单命题；所谓组合，是将这些简单命题与相关联结词及其他辅助符号连接在一起组成新命题。相对于简单命题，这个新命题称为**复合命题**(Compound Proposition)。复合命题的真值由它所含简单命题的真值组合与相关联结词来确定。下面借用真值表给出几种常见复合命题的形式定义，其中主要是确定相关联结词的符号及其逻辑含义。提请注意，定义的有关联结词在数理的意义上解释为逻辑运算符。

定义复合命题，即复合命题符号化。其中，主要是有关联结词符号化。

定义 1.1-1 否定(Negation)联结词 ～

设 p 为命题，“非”、“没有”、“不”(not)等否定联结词记为～(或$\neg$)，复合命题“非 p”表示为$\sim p$(或$\neg p$)，称为 p 的否定式，p 为否定项。与 p 相关的$\sim p$ 的真值由表 1.1-1(a)

或(b)完全确定。

表 1.1-1　$\sim p$ 的真值表

(a)

p	$\sim p$
F	T
T	F

(b)

p	$\sim p$
0	1
1	0

由表 1.1-1 可知，$\sim p$ 为真，当且仅当 p 为假。

因只有一个作用对象，否定联结词～视为一元或单目(Unary)逻辑运算。

表 1.1-1(a)定义了一元(真值)函数 $f_{\sim}$，其中，$f_{\sim}(\mathrm{T})=\mathrm{F}$，$f_{\sim}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}$。同理，表 1.1-1($b$) 定义了一元函数 $f_{\sim}$，其中，$f_{\sim}(0)=1$，$f_{\sim}(1)= 0$。

例 1.1-1　给出如下命题的否定式：

(1) p：It is cold。

(2) q：$2+3 > 4$。

(3) r：0，1，2，3 全都是正整数。

解

(1) $\sim p$：It is not cold。其中，p 为 T 时，$\sim p$ 为 F；p 为 F 时，$\sim p$ 为 T。

(2) $\sim q$ ：2 +3 不大于 4。即 $\sim q$ ：$2+3 \leqslant 4$，因 q 为 T，故 $\sim q$ 为 F。

(3) $\sim r$ ：0，1，2，3 不全是正整数。因 r 为 F，所以 $\sim r$ 为 T。

注意，$\sim r$ 不能解释为：0，1，2，3 全都不是正整数。

定义 1.1-2　合取(Conjunction)联结词 ∧

设 p，q 为二命题，复合命题“p 而且 q”表示为 $p \wedge q$，称为 p 与 q 的合取式。其中，p，q 为合取项。根据 p 与 q 的真值组合，$p \wedge q$ 的真值由表 1.1-2 完全确定。

表 1.1-2　$p \wedge q$ 的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由表 1.1-2 可知，$p \wedge q$ 为真，当且仅当 p 与 q 均为真。

因有两个作用对象，合取联结词 ∧ 视为二元或双目(Binary)逻辑运算。

表 1.1-2 定义了二元(真值)函数 $f_{\wedge}$：$f_{\wedge}(0, 0) = f_{\wedge}(0, 1) = f_{\wedge}(1, 0) = 0$，$f_{\wedge}(1, 1) = 1$。

例 1.1-2　求如下命题的合取式：

(1) p：张杰考上了大学。q：张燕考上了大学。

(2) r：小丽上午在图书馆。s：小丽下午在操场。

(3) u：It is ring。v：$5 > 3$ 。

(4) x：2 是偶数。y：2 是素数。

解

(1) $p \wedge q$：张杰与张燕都考上了大学。

(2) $r \wedge s$：小丽上午在图书馆，但下午在操场。

(3) $u \wedge v$：It is ring and $5 > 3$ 。

(4) $x \wedge y$：2 是偶素数。

日常用语中的"和"、"与"、"以及"、"并且"等一般均可用合取联结词 $\wedge$ 表示。但像"张杰与张燕是兄妹"中的"与"却不能符号化为 $\wedge$，原因是该句本身就是一个描述双方关系的简单命题，不能再行分解。

定义 1.1-3 析取(Disjunction)联结词 $\vee$

设 p，q 为二命题，复合命题"p 或者 q"表示为 $p \vee q$，称为 p 与 q 的析取式。其中，p，q 为析取项。根据 p 与 q 的真值组合，$p \vee q$ 的真值由表 1.1-3 完全确定。

表 1.1-3 $p \vee q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由表 1.1-3 可知，$p \vee q$ 为假，当且仅当 p 与 q 均为假。

析取联结词 $\vee$ 为二元或双目(Binary)逻辑运算。

表 1.1-3 定义了二元(真值)函数 $f_{\vee}$：$f_{\vee}(0, 0) = 0$ ，$f_{\vee}(0, 1) = f_{\vee}(1, 0) = f_{\vee}(1, 1) = 1$。

例 1.1-3 构造如下每对 p 与 q 的析取式：

(1) p：2 是正整数(Positive Integer)。q：$\sqrt{2}$ 是有理数(Rational Number)。

(2) p：灯泡坏了。q：线路出了故障。

(3) p：$3+2>5$。q：$3+2=5$。

解

(1) $p \vee q$：2 是正整数或者 $\sqrt{2}$ 是有理数。

(2) $p \vee q$：不是灯泡坏了，就是线路出了故障。

(3) $p \vee q$：$3+2 \geqslant 5$ 。

注 1 定义 1.1-3 中的符号 $\vee$，对应自然语言中的"或"、"或者"(or)等联结词，根据 $p \vee q$ 的真值表，$\vee$ 表示的是可兼或(Inclusive Or)，即 p 与 q 同时为 1 时，$p \vee q$ 为 1。如例 1.1-3(2) 中的 p，q 可能都为真，这时对应的 $p \vee q$ 亦为真。

注 2 对于有些不可兼或(Exclusive Or)，如例 1.1-3(3)，因 p 与 q 不可能同时为真，即例 1.1-3(3)对应的真值表不出现表 1.1-3 的最后一行(其实只取第二行)，故仍然能用可兼或联结词 $\vee$ 来表示。

注 3 对于那些不可兼或，其中的两个简单命题可能同时出现为真或同时为假的情况

时要特别留意，不能再用∨。例如，假定要选派两位同学中的一位做大会代表，但却因某种原因出现了二人都选不中或都选中的情形，这时就必须定义专门的“不可兼或”联结词符号(有些作者采用$\overline{\vee}$)，其对应真值表只需将表 1.1－3 中最后一行改为 1 1 0 即可。

定义 1.1－4 蕴涵(Implication)联结词 →

设 p，q 为二命题，条件(Conditional)复合命题“p 蕴涵(Implies)q”表示为 $p \to q$，称为 p 与 q 的蕴涵式或条件式。其中，p 称为蕴涵式的前件、前提、条件，q 称为蕴涵式的后件、结论。根据 p 与 q 的真值组合，$p \to q$ 的真值由表 1. 1－4 完全确定。

表 1.1－4 $p \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

由表 1.1－4 可知，$p \to q$ 为假，当且仅当 p 真且 q 假。

蕴涵联结词→为二元或双目(Binary)逻辑运算。蕴涵也可写为蕴含。

表 1.1－4 定义了二元(真值)函数 $f_\to$：$f_\to(0, 0) = f_\to(0, 1) = f_\to(1, 1) = 1$，$f_\to(1, 0) = 0$。

例 1.1－4 给出如下各对 p、q 的蕴涵式：

(1) p：天降大雨。q：路面打滑。

(2) p：程序中有 bug。q：$2+3=5$。

解

(1) $p \to q$：如果天降大雨，则路面打滑。

(2) $p \to q$：如果程序中有 bug，则 $2+3=5$。

例 1.1－4(1)表明在逻辑学中，可以像日常用语一样使用条件命题，即当自然语言中提到“若 p 则 q 时”，已承认了 p 与 q 之间存在因果关系的假定。逻辑学称这种蕴涵为**形式蕴涵**。但日常生活中决不使用例 1.1－4(2)的说法。因为程序中有无 bug 与 $2+3=5$ 毫无关系。像例 1.1－4(2)这种只允许在逻辑学中出现的蕴涵式常称为**实质蕴涵**。

逻辑学中，蕴涵用于更广泛的意义。当假定前件 p 为真，且有 q 为真时，即可直接断言(Assert)$p \to q$ 为真。换言之，称 $p \to q$ 为真，是指不出现 p 为 T 且 q 为 F 的情形，而并非通常意义上的“p 导致 q”。

特别要注意的是，由表 1.1－4 可知，若 p 为假，则无论 q 取什么值，$p \to q$ 都为真。这一事实描述为命题“一个为假的前提蕴涵任意结论”。该命题常被误解为：“若前提为假，则结论一定为真”这一明显错误的解释。

例如，蕴涵式 $p \to q$ “若 p：$1+1=3$，则 q：太阳将从西边升起”为真。原因是前件(p：$1+1=3$)总为 F，即没有同时出现前件 p 为 T 且后件 q 为 F 的情形。

类似地，若某结论 q 为真，则对任意前提 p，$p \to q$ 总为真。例如，“若 $1+1=3$，则太阳从东方升起”为真，原因是 q：太阳从东方升起总为真，即不同时出现前件(p：$1+1=3$)为

T 且后件 q 为 F 的情形。

在日常及数学用语中，如下若干论述都可表达为条件命题 $p \to q$：

若 p，则 q；　　p 蕴涵 q；　　q 每当 q；　　p 仅当 q；　　q 只要 p；

p 只有 q；　　p 是 q 的充分条件；　　q 是 p 的必要条件

定义 1.1-5　等值(Equivalence)联结词 $\leftrightarrow$

设 p，q 为二命题，复合命题"p 当且仅当(If and only If，Iff)q"表示为 $p \leftrightarrow q$，称为 p 与 q 的等值式、等价式(Equivalence)或双条件式(Biconditional)。其中，p，q 为等值项。根据 p 与 q 的真值组合，$p \leftrightarrow q$ 的真值由表 1.1-5 完全确定。

表 1.1-5　$p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

由表 1.1-5 可知，$p \leftrightarrow q$ 为真，当且仅当 p 与 q 具有相同的真值。

表 1.1-5 定义了一个二元真值函数 $f_{\leftrightarrow}(0, 0) = f_{\leftrightarrow}(1, 1) = 1$，$f_{\leftrightarrow}(0, 1) = f_{\leftrightarrow}(1, 0) = 0$。

例 1.1-5　给出如下各对 p，q 的等值式及相应真值：

(1) p：$3 > 2$。q：$3-2>0$。

(2) p：三角形的三条边相等。q：三角形的三个内角相等。

(3) p：$1+1=2$。q：6 是完全数。

解

(1) $p \leftrightarrow q$：$3>2$ 是 $3-2>0$ 的充分必要条件，$p \leftrightarrow q$ 的真值为 T。

(2) $p \leftrightarrow q$：三角形是等边三角形当且仅当三角形的三个内角相等，$p \leftrightarrow q$ 的真值为 F。虽然 p 为 T 时，q 一定为 T，但 q 为 T 时，p 却可能为 F。

(3) $p \leftrightarrow q$：$1+1=2$ 等值于 6 是完全数，$p \leftrightarrow q$ 的真值为 T。虽然 $1+1=2$ 与 6 是完全数毫不相干，但二者都是无义的真。

经过第一步和第二步的命题符号化之后，命题逻辑完成了形式化的初级准备工作。由上述讨论可知，命题逻辑一开始就不关心(或无法关心)具体命题的涵义，而只关心其逻辑值。尽管如此，许多命题的逻辑值还是只知其有，将会有或总会有，但却暂时或无法确定其最终究竟是取 0 还是取 1。为了回避这个永远纠缠不清的矛盾，命题逻辑利用代数学的处理方法把命题分为常元(或常量)和变元(或变量)，并以此为基础进一步开展随后的研究工作。

3. 命题公式及其符号化(命题符号化的第三步)

所谓**命题常元**(Proposition Constant)，是指包括逻辑值 F、T(或 0、1)在内的那些表示具体原子命题的标识符。相对于命题常元，把那些表示抽象的、一般的，且从域{F，T}(或

$\{0, 1\}$)中取值的原子命题标识符定义为**命题变元**(Proposition Variable)。命题变元和命题常元统称为**原子命题公式**，简称**原子公式**(Atomic Formula)。

命题公式的形式化归纳定义。

定义 1.1-6 命题公式(Proposition Formula)

命题公式称为**合式公式**(Well-Formed Formula)，常简记为 WFF。

(1) 原子公式是 WFF。

(2) 设 A、B 为 WFF，则$(\sim A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$都是 WFF。

(3) 仅当有限次应用条款(1)、(2)生成的符号串是 WFF。

例 1.1-6 设 p，q，r 是命题标识符，判断如下哪些符号串是命题公式。对是的指明依据；对不是的指出原因。

(1) $p \wedge \vee q$

(2) $pq \vee r$

(3) $(((\sim p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow r)$

(4) $p \rightarrow q$，$\sim\sim p$，$\sim p \vee q$，$p \wedge \sim q$

解

(1) $p \wedge \vee q$ 不是。因无论怎样使用定义 1.1-6 中的规则都无法产生 $\wedge\vee$，即两个联结词 $\wedge$ 与 $\vee$ 直接相连的情况。

(2) $pq \vee r$ 不是。因无论怎样使用定义 1.1-6 中的规则都无法产生 pq，即两个命题标识符直接相连的情况。

(3) 是 WFF。生成过程如下：

Step1	p，q，r 是 WFF	由条款(1)
Step2	$(\sim p)$是 WFF	由条款(2)
Step3	$(p \wedge q)$是 WFF	由条款(2)
Step4	$((\sim p) \vee (p \wedge q))$是 WFF	由条款(2)
Step5	$(((\sim p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow r)$是 WFF	由条款(2)

(4) 其中 4 项都不是 WFF，因缺少圆括号。

定义 1.1-6 巧妙使用圆括号，一方面，方便构造独立成分；另一方面，在构造新的命题公式时也确定了各成分之间的结合关系，从而合理地避免了歧义性。毋庸置疑，增加圆括号使命题公式的书写变得十分繁琐，且难以阅读。通常可以通过规定逻辑运算符(联结词)的结合顺序，以省略公式中的部分圆括号，简化表达形式。这种做法也常用于程序设计语言中。

与大多数教科书类似，规定联结词结合力的优先级从左向右依次为

$$\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

按上述规定，首先可以省略命题公式最外层的圆括号。又因单目联结词$\sim$的优先级最高，故可省略否定式的圆括号，即$(\sim p)$ 可简记为$\sim p$，$(\sim(\sim p))$ 可简记为 $\sim\sim p$ 。

虽然按规定 $p \wedge q \vee r$ 及 $p \vee q \wedge r$ 中联结词的结合顺序是先 $\wedge$ 后 $\vee$。但为醒目起见，仍建议将它们分别写成$(p \wedge q) \vee r$ 及 $p \vee (q \wedge r)$。

至于 $p \wedge (q \vee r)$和$(p \vee q) \wedge r$ 中的内层圆括号，本来就不可省略。又如，$p \rightarrow (q \rightarrow r)$或 $p \rightarrow (p \rightarrow r)$ 中的圆括号也不能再省略，因为二者的真值一般是不同的。

命题公式的真值与它们所含变元的真值及其中的联结词有关，最基本的方法可以采用真值表的方式解决。例如，命题公式 $p\to(q\land r)$的真值表如表 1.1－6 所示。

表 1.1－6　$p\to(q\land r)$的真值表

p	q	r	$q\land r$	$p\to(q\land r)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

对 p，q，r 的各种真值组合，都可通过表 1.1－6 查出 $p\to(q\land r)$对应的真值。

值得指出的是，真值表仅对少量变元有效；虽属有限，但当变元个数变得相当多时，真值表工具就显得软弱无力。

由定义 1.1－6 的有限性，即可推知每个命题公式中的符号(包括圆括号在内)数都是有限的，即每个命题公式都是有限长的。但按定义 1.1－6 关于命题公式的生成规则，无论用多么少的符号都能生成无限多个形式不同的命题公式。如何研究这无限个形式不同的命题公式就是命题逻辑在完成了形式化三个初级步骤之后所面临的新课题。借用其他数学学科的处理方法，数理逻辑学家首先考虑到的就是：对无限多个命题公式采用分类研究的方法，并讨论同类命题公式不同外表形式间的相互转换过程，进而形成命题演算或逻辑演算。

1.2　命题公式的分类与演算

1. 命题公式的分类

设 A 是含有 n 个不同命题变元 p_1，p_2，…，p_n 的命题公式，常称 A 为 n 元命题公式，为了叙述方便起见，将 A 的隐式记为 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$。变元组$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$具有 2^n 种不同的真值组合，其中，每种组合都称为对 A 的一种**指派或赋值**(Assigment)。使 A 为真的指派称为 A 的**成真指派**，使 A 为假的指派称为 A 的**成假指派**。

例如，若命题公式 $A(p, q, r)$表示的显式为 $p\to(q\land r)$，则 A 的 $2^3=8$ 个指派为：(0，0，0)，(0，0，1)，…，(1，1，1)，且(0，0，0)是 A 的成真指派，(1，0，0)为 A 的成假指派，参见表 1.1－6。

关于命题公式的分类，根据命题公式的指派，可以分成如下不同类型(A 为任意命题公式)：

(1) 若 A 的所有指派都是成真指派，则 A 称为**重言式**(Taulology)或**永真式**。

(2) 若 A 的所有指派都是成假指派，则 A 称为**矛盾式**(Contradiction)或**永假式**(Absurdity)。

(3) 若 A 至少有一个成真指派，则称 A **可满足**(Satisfactory)。

例如，$p\vee\sim p$ 是永真式，$p\wedge\sim p$ 是永假式，$p\wedge q$ 既是可满足式又是偶然式。

(4) 若 A 既存在成真指派，又存在成假指派，则 A 称为**偶然式**(Contingency)。

命题逻辑中，称两个命题公式"相等"是毫无意义的。代替"相等"概念，命题逻辑中采用术语"逻辑等价"。

定义 1.2-1 如果命题公式 $A\leftrightarrow B$ 为重言式，则称 A 与 B **逻辑等价**(Logically Equivalent)，简称 A 与 B 等价，记为 $A\equiv B$ 或 $A\Leftrightarrow B$，也称 A 逻辑等价于 B。

注 符号"$\equiv$"不是命题联结词，它只是 $A\leftrightarrow B$ 为重言式时的特殊记号。

若 $A\equiv B$，则 A 的真值表与 B 的真值表完全相同，且 $A\leftrightarrow B$ 的真值表全 1。

例 1.2-1 设有两个命题公式 $p\rightarrow q$ 及 $\sim p\vee q$，考察 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ 的真值表。

解 如表 1.2-1 所示，$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ 的真值表可逐步写出。

表 1.2-1 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ 的真值表

p	q	$\sim p$	$\sim p\rightarrow q$	$\sim p\vee q$	$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1

观察 $p\rightarrow q$ 与 $\sim p\vee q$ 的真值表，显见二者相同。又 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ 的真值表全 1，可知 $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim p\vee q)$ 为永真式，即 $(p\rightarrow q)\equiv(\sim p\vee q)$。由此，$p\rightarrow q$ 也常间接地解释为 $\sim p\vee q$。

定理 1.2-1 基本逻辑等价式

$p\wedge p\equiv p$，$p\vee p\equiv p$　　幂等律(Idempotent Law)

$p\wedge q\equiv q\wedge p$，$p\vee q\equiv q\vee p$　　交换律(Commutative Law)

$p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$，
$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$　　结合律(Associative Law)

$p\wedge(p\vee q)\equiv p$，$p\vee(p\wedge q)\equiv p$　　吸收律 (Absorptive Law)

$p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$，
$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$　　分配律(Distributive Law)

$\sim(\sim p)\equiv p$　　双重否定律(Double Negative Law)

$\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$，
$\sim(p\vee q)\equiv\sim p\vee\sim q$　　德・摩根律(De Morgan's Law)

$p\wedge\mathrm{T}\equiv p$，$p\vee\mathrm{F}\equiv p$　　同一律(One Law)

$p\wedge\mathrm{F}\equiv\mathrm{F}$，$p\vee\mathrm{T}\equiv\mathrm{T}$　　同零律(Zero Law)

$p\rightarrow q\equiv\sim p\vee q$　　蕴涵表达式(Implicative Expression)

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$　　等价表达式(Equivalence Expression)

定义 1.2-2　如果蕴涵式 $A \to B$ 是重言式，则称 $A \to B$ 为**永真蕴涵式**，记为 $A \Rightarrow B$，读作"A 永真蕴涵 B"。

注　符号"$\Rightarrow$"不是命题联结词，它只是 $A \to B$ 为重言式时的特殊记号。

定理 1.2-2　基本永真蕴涵式

$p \Rightarrow p \vee q$	附加式(Addition)
$p \wedge q \Rightarrow p$	化简式(Simplication)
$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$	假言推理(Modus Ponens)
$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg q$	拒取式(Modus Tellendo Ponens)
$\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$	析取三段论(Disjunctive Syllogism)
$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow p \to r$	假言三段论(Hypothtical Syllogism)
$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Rightarrow q \leftrightarrow r$	等值三段论(Equivalence Syllogism)
$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \wedge r) \Rightarrow q \wedge s$	合取构造
$(p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \vee r) \Rightarrow q \vee s$	析取构造

定理 1.2-1 与定理 1.2-2 给出了永真式(重言式)的若干模式，其中，p，q，r，s 均为命题变元。无疑，作为最基本的方法和工具，真值表就可以用来证明上述基本逻辑等价式和永真蕴涵式。按定义 1.2-1 及定义 1.2-2，有些教科书在定理 1.2-1 及定理 1.2-2 中更一般地采用任意的命题公式符如 A，B，C，D，而不用变量符 p，q，r，s。这可能也是一种合理的处理方式，但证明过程不如采用命题变量与真值表直观。究竟在定理中用变项还是用公式描述各条性质，稍后的讨论中有进一步的解释。

例 1.2-2　证明逻辑等价式 $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$。

证明　$p \leftrightarrow q$ 与 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 的真值表如表 1.2-2 所示。

表 1.2-2　$p \leftrightarrow q$ 与 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

由于 $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \to q) \wedge (q \to p)$ 对应的两列真值完全相同，可以断定二公式关于联结词 $\leftrightarrow$ 为重言式，即 $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$。

逻辑等价式与永真蕴涵式具有如下重要性质：

(1) $\equiv$ 与 $\Rightarrow$ 的自反性：

$A \equiv A$，$A \Rightarrow A$

(2) $\Rightarrow$ 的反对称性，$\equiv$ 的对称性：

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则 $A \equiv B$

若 $A \equiv B$，则 $B \equiv A$

(3) $\equiv$ 与 $\Rightarrow$ 的传递性：

若 $A \equiv B$ 且 $B \equiv C$，则 $A \equiv C$

若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$

除了可以采用真值表法证明永真蕴涵式外，还可以用如下方法证明：

方法 1 假定前件为真，若能推导出后件是真，则蕴涵式为真。

方法 2 假定后件为假，若能推导出前件为假，则蕴涵式为真。

以上两条从真值表的角度看，都是在排除蕴涵式前件为真(T,1)且后件为假(F,0)的情形。

例 1.2-3 证明 $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$。

证明 采用方法 1。设 $p \wedge (p \to q)$为 T，则 p，$p \to q$ 均为 T，从而 q 为 T，即有 $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$。

采用方法 2。设 q 为 F，则若 $p \to q$ 为 F 将使 $p \wedge (p \to q)$为 F，从而有 $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$。又若 $p \to q$ 为 T，则 p 不为 T，即 p 为 F，从而 $p \wedge (p \to q)$为 F，则又有 $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$。

上述证明过程仍然采用符号形式与自然语言掺杂的描述方式，证明潜在地利用了化简式。

2. 两个重要规则

为了进一步扩大形式化的范围，争取在证明过程中最大限度地消除自然语言，特给出如下两条十分有用的规则。因为每次应用规则都会产生新公式，也可将两个规则解释为两种操作或运算。

规则 1 代入规则(Rule of Substitution)

设 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$为一永真式，则 A 中的任一命题变项 $p_i (i=1, 2, \cdots, n)$(注意不是常项)用任一命题公式 B 处处(every where)代入后所得的新公式 A 仍为永真式。新公式 A 称为 A 的代入实例。

代入规则之所以正确是因永真式的真值不依赖命题变项的取值，即永真式的真值与指派无关。

正因为有了代入规则，定理 1.2-1 和定理 1.2-2 中采用命题变量 p，q，r，s 等描述各个重言式就有了合理解释。因为对其使用代入规则，即可从同一永真式模式求得各种不同应用形式的永真式。

对非永真式通常不做代入操作。特别是偶然式，因所得代入结果公式的类型不确定，没有实际用途。

若 A 为命题公式 C 的组成成分且 A 为命题公式，则称 A 是 C 的**子公式**(Subformula)。

规则 2 替换规则(Rule of Replacement)

设 $A \equiv B$ 为任一逻辑等价式，且 A 是公式 C 的子公式，若将 C 中的若干 A 替换为 B(不一定处处)而得 D，则 $C \equiv D$。

替换规则的正确性是由于在公式 C 和 D 中，除替换部分外均相同，但对任一指派，A 与 B 的真值相同，故 $C \equiv B$。

应用替换规则，可在逻辑等价的前提下将公式从一种形式转换为另一种形式。

对逻辑等价式：$p \vee q \equiv q \vee p$，把公式 $A \wedge B$ 代入模式中的每个 p，把公式 $A \to B$ 代入模式中的每个 q，可得新的逻辑等价式：