高考E+E系列

文科数学

WEN KE SHU XUE

2004年－2005年

高考新动向E+E

GAO KAO XIN DONG XIANG E+E

新考纲解读

中世 组编

主编：屠新民

新考纲

新题型

新样卷

民族出版社

高考E+E系列

文科数学

WEN KE SHU XUE

2004—2005年

2004—2005年

高考新动向E+E

GAO KAO XIN DONG XIANG E + E

丛书编写学科带头人名单

语文：章雪莱　　理科数学：陈忠怀　　文科综合：熊大翔
英语：李玉新　　文科数学：屠新民　　理科综合：杨汉楚

中世　组编

本书主编：屠新民

编写人员：屠新民　项昭义
李丽琴　李小斌
韩兴茹

民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考新动向E+E. 文科数学/民族出版社中世编辑室组编. -北京:民族出版社,2004.4

ISBN 7-105-06185-5

Ⅰ.高... Ⅱ.民... Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第031658号

民族出版社出版发行

(北京市和平里北街14号 邮编100013)

民族出版社微机照排 北京市美通印刷厂印刷

各地新华书店经销

2004年4月第1版 2004年4月北京第1次印刷

开本:787×960毫米 1/16 印张:14.375

字数:250千字 定价:24.00元

该书如有印装质量问题,请与本社发行部联系退换

(总编室电话:64212794;发行部电话:64211734)

出版说明

民族出版社中世编辑室应广大考生要求，隆重推出《高考新动向 E + E》系列丛书，该丛书包括语文、英语、文科数学、理科数学、文科综合、理科综合。其最大特点是用例题解读新考试大纲，透视重点考点内容，旨在帮助广大师生在最短时间内领悟教育部考试中心《普通高等学校招生全国统一考试大纲》所涵盖的全部内容和信息，并有重点地理解《考试大纲》的精神和宗旨。

该套丛书编写阵容庞大，名师云集。执笔者均为全国著名特、高级教师，中国考试命题专家，国家级学科骨干教师。他们除了长期从事高考第一线的教学研究工作之外，还同时被聘为教育部考试中心会议中心的特聘教师，对高考改革方向、高考的重点和热点明察秋毫，对例题的选取、安排、分析、更解具有绝对权威性。

丛书体例新颖、别致，顺应高考形式，结合大量例题给考生讲解《考试大纲》的内容和要求，并以例题带分析的方式，通过"重点考点剖析"、"主要考查内容"、"解题思路"、"知识扩展"等栏目对《考试大纲》中的重点、热点、难点进行逐层深入剖析。所选例题多为根据高考各科试卷的形式与结构设置的原创性仿真题，凝结着专家学者们多年备考、应考经验，准确地体现了《考试大纲》中有关考点和分值的变化与调整要求。其答案之详尽、点拨之精到、拓展之到位、角度之新颖、预测之准确更是不言而喻。

丛书附有全真模拟试卷若干套，其各项指标的设置包括知识点考查、分值分布以及长度、难度、信度、效度等，均与高考原题水平完全一致，能够让考生做到从形式到内容迅速熟悉高考，从容应试，超常发挥。

编　者

祝你好运！

目录 contents

第一部分　考试内容与考试要求

1　平面向量

2004 年考点

理解向量的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念

掌握向量的加法与减法

掌握实数与向量的积，理解两个向量共线的充要条件

了解平面向量的基本定理，理解平面向量坐标的概念，掌握平面向量的坐标运算

掌握平面向量的数量积及其几何意义，了解用平面向量的数量积可以处理有关长度、角度和垂直的问题，掌握向量垂直的条件

掌握平面两点间的距离公式，以及线段的定比分点和中点坐标公式，并且能熟练运用掌握平移公式

例题 1　下列命题

①若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 必与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 之一的方向相同；

②若 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{e}$，则 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$；

③$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^3$；

④若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，又 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 必共线；

⑤若平面内四点 A、B、C、D，则必有 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

正确命题的个数是

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

【答案】　C

【解析】　①对.②错，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向，则 $\boldsymbol{a}=-|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}$.③错，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cdot\boldsymbol{a}\neq|\boldsymbol{a}|^3$.④对.⑤对，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$.

【考点透视】　本题考查向量的概念，向量的几何表示，共线向量的概念和命题的概念，以及有关运算的知识.

【知识拓展】　此类题目可拓展到结合平面向量的加减运算和乘法运算，以及向量的垂直等知识，见下例.

题目：下面的四个命题

①$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$；　②$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$；

③若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；　④若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

其中真命题是

A.①②　　　B.③④　　　C.①③　　　D.②④

（提示：由向量的数量积的定义可知，应选 B.）

例题 2　证明：向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$终点A、B、C共线的充要条件是存在实数λ，μ且$\lambda+\mu=1$，使得$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

解析　必要性：$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的终点A、B、C共线，则$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BC}$，故存在实数$m$，使得

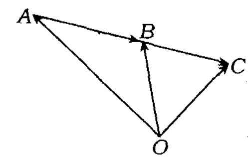

图 1-1

$\overrightarrow{BC}=m\overrightarrow{AB}$,

又　$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,

故　$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$,

$\overrightarrow{OC}=-m\overrightarrow{OA}+(1+m)\overrightarrow{OB}$.

令$\lambda=-m$，$\mu=1+m$，则存在λ、μ且$\lambda+\mu=1$，使得$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$.

充分性：若$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中$\lambda+\mu=1$，则$\mu=1-\lambda$，$\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.从而有

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\lambda(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，即　$\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BA}$.

所以A、B、C三点共线，即向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$的终点在一条直线上.

【考点透视】　本题考查平面向量共线的概念及共线的充要条件、实数与向量的积和向量的几何表示.

【知识拓展】　此问题还可延伸至判定图形的问题.

题目：设不在同一直线上的三点A、B、C的位置向量分别为$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$，线段AB、AC的长分别为p、q，以$\boldsymbol{a}+t\left(\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{p}+\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{q}\right)(t\geqslant 0)$为位置向量的点，能画出什么样的图形呢？

简解：如图 1-2，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AC}$,

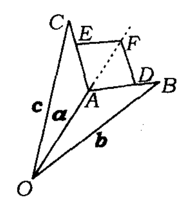

图 1-2

$\therefore$　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{p}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{q}$,

这两个向量分别表示与$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$方向相同的单位向量.

设$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$.

则四边形$ADFE$是菱形，因此AF平分角A，所以

$\boldsymbol{a}+t\left(\dfrac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{p}+\dfrac{\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}}{q}\right)=\overrightarrow{OA}+t(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AF}(t\geqslant 0)$.

以上式左边为位置向量的点的图形是$\angle BAC$的平分线.

例题 3　已知向量$\boldsymbol{a}=(x+3,x^2-3x-4)$与$\overrightarrow{AB}$相等，其中$A(1,2)$，$B(3,2)$，

求 x.

【解析】 $\because$ $A(1,2),B(3,2)$,

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}=(2,0)$,又 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$,

$\therefore$ $(x+3,x^2-3x-4)=(2,0)$,

$\therefore$ $\begin{cases}x+3=2,\\x^2-3x-4=0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-1,\\x=-1\text{ 或 }4.\end{cases}$

$\therefore$ $x=-1$.

【考点透视】 本题考查平面向量的坐标概念和运算,以及平面向量相等的充要条件的应用.

【知识拓展】 我们可将运算中的字母 x 拓展到两个字母 x,y.进行更为复杂的计算.

题目:已知向量 $\boldsymbol{a}=(x^2+y^2,xy)$,$\boldsymbol{b}=(5,2)$,若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,求 x,y.

提示:由两向量相等的充要条件,得

$$\begin{cases}x^2+y^2=5\\xy=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\y=1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\y=2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-2,\\y=-1.\end{cases}$$

例题 4 已知 $P_1(2,-1)$,$P_2(0,5)$,P 在$\overrightarrow{P_1P_2}$的延长线上,且$\overrightarrow{P_1P}=2|\overrightarrow{PP_2}|$,求点 P 的坐标.

【解析】 设点 P 的坐标为(x,y),由已知得

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}=-2,\quad\therefore\quad x=\frac{2+(-2)\times 0}{1-2}=-2,y=\frac{-1+(-2)\times 5}{1-2}=11.$$

$\therefore$ P 点的坐标为$(-2,11)$.

【考点透视】 本题考查向量的坐标运算和应用定比分点公式解决问题的能力.

【知识拓展】 应用定比分点公式,通过点的重合,可证明三点共线,见下述题目.

题目:已知点 $A(a,b+c)$,$B(b,c+a)$,$C(c,a+b)$,求证:A、B、C 三点共线.

简解:设 $C'(c,y)$在$\overrightarrow{AB}$上,C'分$\overrightarrow{AB}$的比为λ,则

$$\begin{cases}\dfrac{a+b\lambda}{1+\lambda}=c,\\[2mm]\dfrac{(b+c)+\lambda(c+a)}{1+\lambda}=y.\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}\lambda=\dfrac{a-c}{c-b},\\[2mm]y=a+b.\end{cases}$$

$C'(c,y)$与 $C(c,a+b)$重合,由题设知 C 在$\overrightarrow{AB}$上,所以 A、B、C 三点共线.

例题 5 已知 $\boldsymbol{a}\neq 0$,$\boldsymbol{b}\neq 0$,且$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$,$(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$.

求 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角.

【解析】 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$$

又∵ $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}),(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,

$$\therefore\quad\begin{cases}(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,\\(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}7\boldsymbol{a}^2-15\boldsymbol{b}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0, & ①\\7\boldsymbol{a}^2+8\boldsymbol{b}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0. & ②\end{cases}$$

②-①得 $23\boldsymbol{b}^2-46\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,即 $\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

(①×15+②×8)÷161,得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$,$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

$$\therefore\quad\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}==\frac{\frac{1}{2}|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore\quad\theta=\frac{\pi}{3}.$$

【考点透视】 本题考查平面向量的数量积的运算和向量夹角的求法.

【知识拓展】 应用平面向量的数量积及其运算律往往能解决证明垂直和求范围问题,请看下题.

题目:已知平面上三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的模均为1,它们相互之间的夹角为120°.

(Ⅰ)求证:$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$;

(Ⅱ)若 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|>1(k\in\mathbf{R})$,求 k 的取值范围.

简解:(Ⅰ)∵ $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$,且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 之间的夹角为120°,

∴ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos120°-|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos120°=0$.

∴ $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$.

(Ⅱ)∵ $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|>1$, ∴ $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2>1$,

∴ $(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})>1$,

即 $k^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>1$.

∵ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\cos120°=-\frac{1}{2}$, ∴ $k^2-2k>0$,

∴ $k<0$ 或 $k>2$.

例题6 已知向量 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$,其中 $\boldsymbol{e}_1=(1,0)$,$\boldsymbol{e}_2=(0,1)$.

(Ⅰ)试计算 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 的值;

(Ⅱ)求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角的大小.

【解析】 (Ⅰ)$\boldsymbol{a}=(1,0)-(0,1)=(1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(4,0)+(0,3)=(4,3)$.

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,-1)\cdot(4,3)=1$；$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|(5,2)|=\sqrt{29}$.

（Ⅱ）$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore\quad \theta=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【考点透视】 本题考查平面向量的数量积和坐标运算，以及平面两点间的距离等有关知识.

【知识拓展】 将上述例题所涉及的知识与三角函数进行有机联系，能形成具有综合性特点的题目.

题目：平面直角坐标系内有点 $P(1,\cos x)$，$Q(\cos x,1)$，$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$.

（Ⅰ）求向量$\overrightarrow{OP}$和$\overrightarrow{OQ}$的夹角 θ 的余弦有 x 表示的函数$f(x)$；

（Ⅱ）求 θ 的最值.

简解：（Ⅰ）$\because\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=2\cos x$，

$|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=1+\cos^2x$，

$\therefore\quad \cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{2\cos x}{1+\cos^2x}=f(x)$.

（Ⅱ）$\cos\theta=f(x)=\dfrac{2\cos x}{1+\cos^2x}=\dfrac{2}{\cos x+\dfrac{1}{\cos x}}$.

$x\in\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\therefore\quad \cos x\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$. 故 $\quad 2\leqslant\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\leqslant\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\quad \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant f(x)\leqslant 1$，即 $\quad \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\leqslant\cos\theta\leqslant 1$. $\therefore\quad \theta_{\max}=\arccos\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\theta_{\min}=0$.

例题 7 把函数 $y=2^{x-2}+3$ 的图像按 $\boldsymbol{a}$ 平移，得到函数 $y=2^{x+1}-1$ 的图像，则 $\boldsymbol{a}$ 为

A. $(-3,-4)$ B. $(-3,4)$ C. $(3,4)$ D. $(3,-4)$

【解析】 由平移公式

$\begin{cases}x'=x+h,\\y'=y+k,\end{cases}$ 代入 $y=2^{x+1}-1$，

得 $\quad y+k=2^{x+h+1}-1$，$\therefore y=2^{x+h+1}-(1+k)$.

$\therefore\begin{cases}h+1=-2,\\-(1+k)=3,\end{cases}$ 即$\begin{cases}h=-3,\\k=-4.\end{cases}$ $\therefore\boldsymbol{a}=(-3,-4)$.

【考点透视】 本题考查应用平面向量平移变换解题的能力.

【知识拓展】 将本题所应用的知识与三角函数相结合，用于解决三角函数图像的平移方面，往往效果很好. 见下题.

题目:已知 $M=(1+\cos 2x,1)$,$N=(1,\sqrt{3}\sin 2x+a)$($x\in\mathbf{R}$,$a\in\mathbf{R}$,a 是常数),且 $y=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}$($O$ 为坐标原点).

(Ⅰ)求 y 关于 x 的函数关系式 $y=f(x)$;

(Ⅱ)若 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$f(x)$的最大值为 4,求 a 的值,并说明此时 $f(x)$的图像可由 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$的图像经过怎样的变换而得到.

简解:(Ⅰ)$y=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+a$,

$\therefore\quad f(x)=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x+1+a$.

(Ⅱ)$\because\quad f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1+a$,$\therefore\quad 2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,

即 $x=\frac{\pi}{6}\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,$f(x)$取最大值 $3+a$.

由 $3+a=4$,得 $a=1$.$\therefore\quad f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2$.

$\therefore$ 将 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$图像上每一点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍,纵坐标保持不变,再向上平移 2 个单位长度可得 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2$ 的图像.

2 集合、简易逻辑

2004 年考点

理解集合、子集、补集、交集、并集的概念.了解空集和全集的意义.了解属于、包含、相等关系的意义.掌握有关的术语和符号,并会用它们正确表示一些简单的集合

理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义.理解四种命题及其相互关系.掌握充要条件的意义

例题 1 设集合 $A=\{x\mid x=5-4a+a^2,a\in\mathbf{N}^*\}$,$B=\{y\mid y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{N}^*\}$,则下列关系正确的是

A. $A=B$　　B. $A\supseteq B$　　C. $A\subseteq B$　　D. $A\subsetneqq B$

答案 A

【解析】 集合 $A=\{x\mid x=5-4a+a^2,a\in\mathbf{N}^*\}$，可化为 $A=\{x\mid x=(a-2)^2+1,a\in\mathbf{N}^*\}$，即 A 中元素 $x\geqslant1$；又因为集合 $B=\{y\mid y=4b^2+4b+2,b\in\mathbf{N}^*\}$，可化为 $B=\{y\mid y=(2b+1)^2+1,b\in\mathbf{N}^*\}$，即 B 中的元素 $y\geqslant1$，所以 $A=B$.

【考点透视】 本题考查集合、子集、真子集的概念和包含、相等的关系与意义以及有关的术语和符号.

【知识拓展】 就理解子集、真子集和集合相等的概念还可进行如下练习：

(1)已知 $\{a,b\}\subseteq A\subsetneqq\{a,b,c,d,e\}$，求满足条件的集合 A.(答案:7 个)

(2)设 $A=\{x\mid x^2-8x+15=0\}$，$B=\{x\mid ax-1=0\}$，若 $B\subsetneqq A$，求实数 a 组成的集合.

(答案:实数 a 组成的集合为$\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\}$)

(3)已知集合 $A=\{m,m+d,m+2d\}$，集合 $B=\{m,mq,mq^2\}$，其中 $m\neq0$ 且 $A=B$，求 q 的值.

(答案:$q=-\frac{1}{2}$)

例题 2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-8=0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+a^2-12=0\}$，求满足 $B\subseteq A$ 的 a 值组成的集合.

【解析】 易知 $A=\{-2,4\}$，B 是 x 的方程 $x^2+ax+a^2-12=0$ 的解集.

(1)若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=a^2-4(a^2-12)=-3(a^2-16)<0$，所以 $a<-4$ 或 $a>4$，此时显然 $B\subseteq A$.

(2)若 $B=\{-2\}$，由根的意义知 $a=4$ 或 $a=-2$，当 $a=4$ 时，恰有 $\Delta=0$；当 $a=-2$ 时，$\Delta>0$，从而 $a=4$ 满足题意.

若 $B=\{4\}$，由根的意义得 $a=-2$，这时 $\Delta>0$，方程还有另一根，但不等于 4，从而矛盾.

若 $B=\{-2,4\}$，则 $a=-2$.

综上所述，满足 $B\subseteq A$ 的值组成的集合是

$\{a\mid a<-4$ 或 $a=-2$ 或 $a\geqslant4\}$.

【考点透视】 本题考查子集、空集的概念.

【知识拓展】 解此类题不仅要紧扣子集定义，注意空集及本身这一子集.同时还要根据所求 a 的值加以验证.

例如:已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$ 与 $Q=\{x\mid ax+1=0\}$，满足 $Q\subsetneqq P$，求 a 的所有取值.

例题 3 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{x\in U\mid x^2-5x+q=0\}$，求$\complement_UA$ 及 q 的值.

【解析】 当 $q=0$ 时，$x^2-5x=0$，$x_1=5$，$x_2=0$. 其中 $5\in U$，此时，$A=\{5\}$，$\complement_U A=\{1,2,3,4\}$.

当 $q\neq 0$ 时，由根与系数关系知方程 $x^2-5x+q=0$ 的根在 1、2、3、4、5 中取时，只有 3 或 2，1 或 4. 因此

$q=6$ 时，$A=\{2,3\}$，$\complement_U A=\{1,4,5\}$. $q=4$ 时，$A=\{1,4\}$，$\complement_U A=\{2,3,5\}$.

$\therefore$ $q=0$ 时，$\complement_U A=\{1,2,3,4\}$；$q=4$ 时，$\complement_U A=\{2,3,5\}$；$q=6$ 时，$\complement_U A=\{1,4,5\}$.

【考点透视】 本题考查全集、子集、补集的概念以及相交知识的表述与符号的应用.

【知识拓展】 关于全集、子集、补集的概念的应用，常见于关于方程（如本例）、数的讨论或不等式问题. 如下述两题：

(1)设全集 $U=\{x\mid x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}^*\}$，$A=\{x\mid x=\frac{1}{4^n},n\in\mathbf{N}^*\}$，求$\complement_U A$.

(答案:$\complement_U A=\{x\mid x=\frac{1}{2^{n+1}},n\in\mathbf{N}^*\}$)

(2)已知 $A=\{x\mid\frac{x+1}{x-3}>0\}$，$B=\{x\mid ax^2-x+b\geqslant 0\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=\mathbf{R}$，求 a，b.

(提示:先求$\complement_{\mathbf{R}}A$，即 $B=\complement_{\mathbf{R}}A$，$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{3}{2}$).

例题 4 已知 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{1,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，且 $A\cap B=\{2,5\}$，求 $A\cup B$.

解析 由 $A\cap B=\{2,5\}$，可知 $5\in A$，从而 $a^3-2a^2-a+7=5$，

$\therefore$ $a^3-2a^2-a+2=0$，即 $(a^2-1)(a-2)=0$.

$\therefore$ $a=-1$ 或 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=-1$ 时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,2,4,5\}$，$A\cap B=\{2,4,5\}$. 这与 $A\cap B=\{2,5\}$ 矛盾，所以 $a=-1$ 时不合题意.

当 $a=1$ 时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,4,1,12\}$. B 中有重复元素，这与集合的元素的互异性矛盾，所以 $a=1$ 不合题意.

当 $a=2$ 时，$A=\{2,4,5\}$，$B=\{1,2,5,25\}$，此时，$A\cap B=\{2,5\}$.

$\therefore$ $A\cup B=\{2,4,5\}\cup\{1,2,5,25\}=\{1,2,4,5,25\}$.

【考点透视】 本题考查集合、交集、并集的概念，以及有关的术语和符号.

【知识拓展】 关于应用交集、并集的概念的题目，由整数型可扩展到代数式型和与全集、补集等概念结合的题型. 见下述两题.

(1)已知 $A=\{x\mid\frac{x+1}{x-3}>0\}$，$B=\{x\mid ax^2-x+b\geqslant 0\}$，且 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=$

$\mathbf{R}$,求 a、b.

(提示:$A=\{x\mid -1<x<3\}$,$B=\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 3\}$,$a=\dfrac{1}{2}$,$b=-\dfrac{3}{2}$).

(2)全集 $U=\{1,2,3,4,\cdots,8,9\}$,$\complement_U A\cup\complement_U B=\{2,3,4,6,7,8\}$,$\complement_U A\cap B=\{3,7\}$,$\complement_U A\cup B=\{1,3,5,7,6,8,9\}$,求 A、B.

(提示:由$\complement_U A\cup\complement_U B=\complement_U(A\cap B)$,可知 $A\cap B=\{1,5,9\}$,又因为$\complement_U A\cap B=\{3,7\}$,所以 $B=\{1,3,5,7,9\}$.又由$\complement_U A\cup B=\complement_U(A\cap\complement_U B)$可知 $A\cap\complement_U B=\{2,4\}$,而 $A\cap B=\{1,5,9\}$,所以 $A=\{1,2,4,5,9\}$.)

例题 5 某年级 52 人参加了数学或英语小组,其中参加数学小组的有 32 人,参加英语小组的有 40 人,那么同时参加数学和英语小组的人有多少?

【解析】 设 $A=\{$参加数学小组的人$\}$,$B=\{$参加英语小组的人$\}$,$A\cap B=\{$数学和英语小组都参加的人$\}$,

则 $\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-52=20$(人)

【考点透视】 本题考查交集和集合元素个数的概念和运算.

【知识拓展】 本例应用了公式:$\mathrm{card}(A\cap B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cup B)$.对于三个集合的此类问题还将用到公式:$\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

例如:开运动会时,高一某班共有 28 名学生参赛,有 15 人参加游泳比赛,有 8 人参加田径比赛,有 14 人参加球类比赛,同时参加游泳和田径比赛的有 3 人,同时参加游泳和球类比赛的有 3 人,没有人同时参加三项比赛,问同时参加田径和球类比赛的有多少人?只参加游泳一项比赛的有多少人?

(提示:设同时参加田径和球类比赛共 x 人,又 $\mathrm{card}(A)=15$,$\mathrm{card}(B)=8$,$\mathrm{card}(C)=14$,$\mathrm{card}(A\cap B)=3$,$\mathrm{card}(A\cap C)=3$,$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=0$.所以 $15+8+14-3-3-x=28$,解之,得 $x=3$.)

例题 6 解不等式组 $1<|x-2|\leqslant 3$.

【解析】 原不等式组即

$$\begin{cases}|x-2|>1 & ①\\ |x-2|\leqslant 3 & ②\end{cases}$$

由①得 $x<1$ 或 $x>3$. 由②得 $-1\leqslant x\leqslant 5$. 见图 2-1.

$\therefore$ 原不等式组解集是$\{x\mid -1\leqslant x<1$ 或 $3<x\leqslant 5\}$.

【考点透视】 本题考查绝对值不等式(组)的概念与解法.

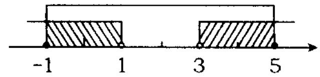

图 2-1

【知识拓展】 本例一类题目还能扩展到二次型或含有两个绝对值的不等式.见下述两题:

(1)解不等式 $2<|x^2-2x-1|<7$.

(提示:原不等式等价于:$2<|(x-1)^2-2|<7 \Leftrightarrow 2<(x-1)^2-2<7$ 或 $-7<(x-1)^2-2<-2$,解得$\{x|-2<x<-1$ 或 $3<x<4\}$.)

(2)解不等式$|x-1|>|2x-3|$.

(提示:两边平方化为 $3x^2-10x+8<0$,解得$\{x|\frac{4}{3}<x<2\}$.)

例题 7 已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$,求 a、b 的值.

【解析】 显然 $a<0$,由$(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})<0$,得 $6x^2+x-1<0$,

变形得 $-6x^2-x+1>0$,与 $ax^2+bx+2>0$ 比较,得 $a=-12,b=-2$.

【考点透视】 此题考查一元二次不等式及其解法.

【知识拓展】 将整式扩展到分式,将一元二次不等式结合集合运算可得下述题目:

(1)解不等式$\frac{x^2-2x-1}{x-1}\geqslant 0$.

(解答:$\{x|1-\sqrt{2}\leqslant x<1$ 或 $x\geqslant 1+\sqrt{2}\}$.)

(2)已知集合 $A=\{x|x^2-5x+4\leqslant 0\}$ 与 $B=\{x|x^2-2ax+a+2\leqslant 0\}$,若 $B\subseteq A$,求 a 的范围.(答案:$-1<a\leqslant\frac{18}{7}$.)

例题 8 不等式$(m^2-2m-3)x^2-(m-3)x-1<0$ 对一切 $x\in\mathbf{R}$ 都成立,求 m 的取值范围.

【解析】 令 $m^2-2m-3=0$,得 $m=3$ 或 $m=-1$.

当 $m=3$ 时,原不等式化为 $-1<0$,对一切 $x\in\mathbf{R}$,它都成立;当 $m=-1$ 时,原不等式化为 $4x-1<0$,它并非对一切 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

若 $m^2-2m-3\neq 0$,原不等式解集为 $\mathbf{R}$.

则$\begin{cases}m^2-2m-3<0\\ [-(m-3)]^2-4(m^2-2m-3)\cdot(-1)<0\end{cases}$ 成立.

解这个不等式组,得 $-\frac{1}{5}<m<3$.故 m 的取值范围是 $-\frac{1}{5}<m<3$.

【考点透视】 本题考查一元二次不等式及其相关知识的应用.

【知识拓展】 解此类含字母参数的不等式,有时需数形结合来解之.见下题:

题目:不等式 $x^2-2mx-1>0$ 对一切 $1\leqslant x\leqslant 3$ 都成立,求 m 的取值范围.

(提示:若 $x^2-2mx-1>0$ 的解集包含集合 $\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,则方程 $x^2-2mx-1=0$ 的两实根,要么都大于3,要么都小于1.由 $x_1x_2=-1$,知 x_1、x_2 都小于1.

作 $y=x^2-2mx-1$ 的图像知,只需 $x=1$,即 $1^2-2m-1>0$,$m<0$ 即可.故 m 的取值范围是 $m<0$.)

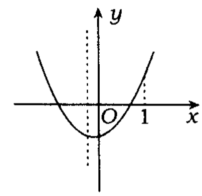

图 2-2

3 函数

2004 年考点

了解映射的概念,理解函数的概念

了解函数的单调性的概念,掌握判断一些简单函数的单调性的方法

了解反函数的概念及互为反函数的函数图像间的关系,会求一些简单函数的反函数

理解分数指数幂的概念,掌握有理指数幂的运算性质.掌握指数函数概念、图像和性质

理解对数的概念,掌握对数的运算性质.掌握对数函数的概念、图像和性质

能够运用函数的性质、指数函数和对数函数的性质解决某些简单的实际问题

例题 1 设 $y_1=4^{0.9}$, $y_2=8^{0.48}$, $y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}$,则

A. $y_3>y_1>y_2$　　B. $y_2>y_1>y_3$

C. $y_1>y_2>y_3$　　D. $y_1>y_3>y_2$

【答案】 D

【解析】 $\because$ $y_1=4^{0.9}=2^{1.8}$, $y_2=8^{0.48}=2^{1.44}$, $y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1.5}=2^{1.5}$.

$\because \quad 2^x$ 是增函数. $\therefore y_1 > y_3 > y_2$. 故应选 D.

【考点透视】 本题主要考查比较函数值大小等基本方法,考查运算能力.

【知识拓展】 本题属于"比较函数值大小"题型,我们再联想一道试题:

题目:三个数 $6^{0.7}, 0.7^6, \log_{0.7}6$ 的大小顺序是

A. $0.7^6 < \log_{0.7}6 < 6^{0.7}$　　B. $0.7^6 < 6^{0.7} < \log_{0.7}6$

C. $\log_{0.7}6 < 6^{0.7} < 0.7^6$　　D. $\log_{0.7}6 < 0.7^6 < 6^{0.7}$

解答: $6^{0.7} > 1, 0.7^6 < 0.7^0 = 1$, 又 $\log_{0.7}6 < 0$.

故应选 D.

说明:借助 1 的代换法: $0.7^0 = 1$, 有化繁为简之妙. 本题考查指数函数和对数函数的性质.

例题 2 关于函数 $f(x) = \sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$, 有下面四个结论:

(1) $f(x)$ 是奇函数　　(2) 当 $x > 2003$ 时, $f(x) > \frac{1}{2}$ 恒成立

(3) $f(x)$ 的最大值是 $\frac{3}{2}$　　(4) $f(x)$ 的最小值是 $-\frac{1}{2}$

其中正确结论的个数为

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

【答案】 A

【解析】 $\because \quad f(x) = \sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} + \frac{1}{2}$,

显然 $f(-x) = f(x)$, $\therefore$ (1)错.

又当 $x > 2003$ 时, $-\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} \to 0^-$, 而 $\sin^2 x$ 在 0 和 1 之间跳动. 当 $\sin^2 x = 0$ 时, $f(x) < \frac{1}{2}$, 故(2)错.

如果 $f(x) \leqslant \frac{3}{2}$, 则 $\sin^2 x - \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} \leqslant 1$.

$\therefore \quad \sin^2 x \leqslant 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{|x|}$ 也不正确, 故(3)错.

当 $x = 0$ 时, $\sin^2 x = 0$ 最小, 且 $-\left(\frac{2}{3}\right)^{|x|} = -1$ 最小.

$\therefore \quad f(x) \geqslant 0 - 1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, 最小值是 $-\frac{1}{2}$.

(1)、(2)、(3)、(4)四个结论中仅(4)正确.

故应选 A.

【考点透视】 本小题主要考查正弦函数、指数函数的性质等基本知识,考查