

中等學校科學教育教學叢書

# 如何教高中數學

—改進中的數學教學—

教育部中等教育司主編

黃武雄編著

正中書局印行

版權所有



翻印必究

中華民國六十五年三月臺初版

中華民國六十六年十二月臺二版

中等學校科學教育  
數學叢書

如何教高中數學

—改進中的數學教學—

全一冊 基本定價 三元

(外埠酌加運費匯費)

主編者 教育部中等教育司

編著者 黃武雄

發行人 黎元馨

發行印刷 正中書局

(臺灣臺北市衡陽路二十號)

海外總經銷 集成圖書公司

(香港九龍油麻地北海街七號)

海風書店

(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番地)

東海書店

(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號(7104)軍  
(1000)

## 序

這本書是作者在六十三年度，奉教育部借調到彰化高中實地試教一年，經整理諸種資料與心得後寫成的。

二十多年來，數學教材由於變革求進的需要，在世界各地都發生很多理論與實際的爭議。作者一直強調，在改進過程中，教材、教法與測驗三項須以携手並進的姿態作密切的配合。目前國內數學教學的一個主要缺陷是：教材改了，本身已是弱點斑斑，教法與測驗又在重重限制下觀望不前，甚至只顧競相指責。

課堂是教學的現場，考試是教學的評估。這些正緊密在左右全盤的改進。作者數年來因參加國際數學研討會的講及試教，對全國各校作過一些廣泛的接觸，本書便是對教學現場的病提出改進教法。這種弊病實際上不只是限於國中高中教學現場，實來目大學，它的改革也將終結於大學。

教法不能從教材中劃界孤立。本書也對數學改進的意義作相當篇幅的說明。作者深信合理且實際可行的改進，應將數學教育的用意建立在一個紮實的哲學基礎上：「數學是一部文化史上重要的方法論！」這是作者的基本理念，也是促使作者數年來從事數學教育的原始動力。

感謝教育部、教育廳、彰化高中，在一年試教期間提供作者各方面的協助。更感謝數年來各地熱心的數學教育實踐者，給予作者在取得教學經驗、認識教學制度上的各種提携。這些無名英雄，對於教材改革從反對、懷疑到支持的轉變過程，叫人欣喜而感佩，他們的看法

## 2 如何教高中數學——改進中的數學教學

與建設性的批評，正在到處播種與萌芽。同時，要深深感謝吳貴美女士，數年來在她教課百忙之餘，勤儉持家，使作者享有最大的工作幅度，在各地奔走以深入問題。

黃武雄 民國64年9月於臺北

## 楔 子

### ——老師，我們去哪裡？

小時候我曾住在豐原東邊的山裏，父親常帶着我入城。這條路很長，走起來總要兩三個鐘頭，每次父親走在前邊，我跟在後頭，他的步伐大且快，我必須兩腳不停地划，眼睛不停地盯住他的那雙破舊的布鞋，一路不停地趕。

有一次，天色向晚，路過一道鐵橋，一根根枕木的間隔比我的步子還寬。平常父親總會歇下來等着我爬過去，或索性抱着我過去，但那天他心裏不知牽掛些什麼，等到我爬過橋，抬頭一看，他已經「失蹤」了。

突然，我湧起一陣恐懼：「這條路來回已跟着父親走過二三十趟了，怎麼一下子變得如此陌生？」

我哭着等在橋端的田埂上，幾個鐘頭在黑夜裏又餓又怕。我甚至分不清家的方向。我苦苦思憶，但呈現的總是父親那雙不停晃動的布鞋。午夜時分總算由遠而近，傳來了母親呵責父親的聲音。後來我才知道父親回到家竟還不知我早在半途就已丟失。

今天，很多教師在上課，沒告訴學生「我們去哪裡？」不指出大體的方向。一開始就下定義，一味要學生一步步陷在「推理」的泥坑，以為這便是思考訓練，這便是「數學」，其實這只是數學的「形式」。

演示解題時也是一樣，一步步非常嚴密，非常工整，每寫一行問

## 2 如何教高中數學——改進中的數學教學

學生一句：「對不對？」，學生的回答也是非常合作：「對」。這樣熱烈的上課情緒，該說是天衣無縫了。若效果還不好，只好怪學生素質不佳或教材不當了？

事實是：學生看到的不是「路該怎麼走」，他們只看到了「布鞋不停地晃動」，簡單的「左—右—左—右……」的換腳規則知道的，但一旦沒有「布鞋」在前面帶路，便覺一片陌生。家在何方？路怎麼走？

我深深相信，當時父親如果像趕牛一樣讓我走在前頭，出城的時候便用手指明家的方向，然後問我：「吳厝的大榕樹，舊厝的土地廟，阿公溪上的鐵橋，南坑阿婆家後的小徑……。你認不認得？」而在我點頭之後告訴我大略路徑。我必定在走過一遍之後便要十分熟悉整條路徑。

如果父親是最最上乘的教育家，也許他在指明家的方向後，便要我帶路，他在後頭寧可隨我多走一點冤枉路，一邊加以修正。其後並畫圖比較近路與遠路，如此我不只會熟悉家城之間的路徑，城東郊的地理我必也在走過一遭後便瞭如指掌，再也不愁迷路，甚至可以常常代我父親跑腿辦事。

可是我不敢苛求，我仍該感謝父親，畢竟他不曾抱着或背着我走，使得我尚有一絲鎮定，能在漫長的四五個鐘頭裡守在同一個地方等着他與母親回來找到我。

在今天的教室裏，我看到學生不敢或不知問出一句：

「老師，我們去哪裏？」

總覺得老師走在前頭，一味要學生「尾隨」。甚至有的老師是將學生「背着走」的。要改良教學，或許我們今天該提出要學生「帶路走」的趕牛教法，這個教法應強調三件事：

$\left\{ \begin{array}{l} \text{明指歸向} \\ \text{分析方法} \\ \text{隱藏推理} \end{array} \right.$

我曾在東部某中學注意過一個上課實例，現在以它為例來解釋這三個原則：

【實例】題目：化簡  $\sqrt{15+4\sqrt{14}}$

藉這個題目，我們來說明尾隨、背負、趕牛的三種教法：

(I) 尾隨教法 (要學生跟着走)

把它寫成  $\sqrt{15+2\sqrt{56}}$

然後拆做  $\sqrt{7+2\sqrt{7}\sqrt{8}+8}$

於是變成  $\sqrt{(\sqrt{7})^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}+(\sqrt{8})^2}$   
 $=\sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{8})^2}$   
 $=\sqrt{7}+\sqrt{8}$

檢討：在整個過程中，只有步步推演，須多做了很多例子後學生才悟出一點共通的道理。

(II) 背負教法 (背着學生走)

當我們看到了這種題目

$$\sqrt{15+4\sqrt{14}}$$

同學要記得三個步驟：

(1) 把  $\sqrt{\quad}$  中無理數那一項變成  $2\sqrt{\quad}$  的型式，如

$$4\sqrt{14}=2\cdot 2\sqrt{14}=2\sqrt{56}$$

(2) 再找出兩個數  $a, b$  使

$$\begin{cases} a \cdot b = 56 \\ a + b = 15 \end{cases}$$

#### 4 如何教高中數學——改進中的數學教學

解得  $a=7, b=8$

(8) 答案便是  $\sqrt{7} + \sqrt{8}$ ，此因

$$\begin{aligned}\sqrt{15+4\sqrt{14}} &= \sqrt{15+2\sqrt{56}} \\ &= \sqrt{7+8+2\sqrt{7 \cdot 8}} \\ &= \sqrt{\sqrt{7}^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{8} + \sqrt{8}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{8})^2} \\ &= \sqrt{7} + \sqrt{8}\end{aligned}$$

旁白：背負教法，時常很討學生歡迎，因為步驟整理得清清楚楚，以後學生只遇到這種問題，便可依樣畫葫蘆，如法泡製。但學生經過這樣的教法以後，只會做一些「定型的」題目，面對稍須靈活運用方法的題目便會心慌意亂。而且長期這樣做，學生四肢退化，以後的發展會受到很大的箝制。

(III) 趕牛教法（要學生帶路走——一種點渡教法）——

重複一下題目：要化簡  $\sqrt{15+4\sqrt{14}}$

(A) 明指方向

很自然要拿掉  $\sqrt{\quad}$

就必須將  $\sqrt{\quad}$  裏邊湊成

$$15+4\sqrt{14} = (\quad)^2$$

(B) 分析方法

點渡 1

想想，我們學過什麼基

本的式子是關於

$$(\quad)^2$$

的？

我們有

黑板上

$$(A) \sqrt{15+4\sqrt{14}} = \dots\dots$$

$\dots\dots$

$$= \sqrt{(\quad)^2} = (\quad)$$

(B)

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

這個式子由左推到右只是單純的分配律，但由右反推回來，則有賴熟習。換句話說：我們時常把東西先湊成

$$\square^2 + 2\square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2$$

然後，便說它其實就是

$$(\square + \bigcirc)^2$$

這就是「配方法」的第一層意義。

因此我們現在想做的是

「設法將  $15 + 4\sqrt{14}$  湊成

$$\square^2 + 2\square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2$$

則

$$\sqrt{15 + 4\sqrt{14}} = \square + \bigcirc$$

而得以化簡

$$\sqrt{15 + 4\sqrt{14}} = \dots\dots$$

$$= \sqrt{\square^2 + 2\square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2}$$

$$= \sqrt{(\square + \bigcirc)^2}$$

$$= \square + \bigcirc$$

檢討：此時可抽出兩分鐘讓學生在自己桌上很快地練習，試看看能否自己找到  $\square$  與  $\bigcirc$  內該是什麼？若很多學生尚有困難，我們再繼續第二段的「方法分析」，接引學生渡河。

## 點渡 2

$15 + 4\sqrt{14}$  如何湊成

$$\square^2 + 2\square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2$$

呢？比較兩邊：平方可以去

掉  $\sqrt{\quad}$ ，故  $\square^2$  與  $\bigcirc^2$  可以

黑板上

黑板上

變成有理數相應於有理部份  
15。

而  $2\square \cdot \bigcirc$  仍相應於無理部  
份  $4\sqrt{14}$ 。試試看可否有

$$\begin{cases} 15 = \text{前兩項}\square^2 + \bigcirc^2 \\ 4\sqrt{14} = 2\square \cdot \bigcirc \end{cases}$$

〔這種聯立式子不要這般規矩地  
寫在黑板上，徒趨學生陷入  
「式子」的泥坑，在黑板上不  
妨保持原來連等式而加一行字  
如右〕

這時，便可以將  $4\sqrt{14}$   
前的 4 化成  $2 \cdot 2$  而得  
 $4\sqrt{14} = 2 \cdot 2\sqrt{14} = 2 \cdot \sqrt{56}$   
所剩的問題，只是  
『尋找兩數使其積為 56，其  
和為 15？』

這時候試驗一下，大部  
份學生很快會找到

$$\begin{cases} 8 \cdot 7 = 56 \\ 8 + 7 = 15 \end{cases}$$

那麼答案便是

$$\sqrt{15+4\sqrt{14}} = \sqrt{7} + \sqrt{8}$$

黑板上

$$\begin{aligned} & \sqrt{15+4\sqrt{14}} \\ &= \sqrt{\underbrace{\square^2 + \bigcirc^2}_{15} + \underbrace{2\square \cdot \bigcirc}_{4\sqrt{14}}} \\ & \quad \quad \quad \parallel ? \quad \quad \parallel ? \\ & \quad \quad \quad 15 \quad \quad 4\sqrt{14} = 2\sqrt{56} \\ & \quad \quad \quad = 2\square \cdot \bigcirc \\ &= \sqrt{\square^2 + 2\square \cdot \bigcirc + \bigcirc^2} \\ &= \sqrt{(\square + \bigcirc)^2} \\ &= \square + \bigcirc \end{aligned}$$

### (C) 隱藏推理

最後一式接一式的導引，如

$$\begin{aligned}\sqrt{15+4\sqrt{14}} &= \sqrt{7+8+2\sqrt{56}} = \sqrt{\sqrt{7}^2 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{8} + \sqrt{8}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{8})^2} = \sqrt{7} + \sqrt{8}\end{aligned}$$

就要學生自己來寫在他們隨時準備好的練習簿上。其實，要隱藏的範圍依學生心智發展而定：(B)段方法分析中的點渡2，在學生接受良好時，也可由學生自己找路，而列入隱藏之列。

檢討：我們在舉過實例之後，又回來對上述的點渡教法作些說明：

#### (1) 話多，時間不多

有些教師看了我這段說明之後，會覺得這樣講課所費時間太多，但這樣的看法只是表面膚淺的感覺。

上述的分析，在靈活的教室現場以口頭來進行將比起筆者落筆爲文不知輕鬆幾倍。只要對教材認真分析過，這種點渡法一經熟練便不着形相，運用自如。談所費時間多少應同時考慮效率。有些教師上課時，一連依照傳統的尾隨教法做了三個例子。到第三個例子，學生中才有一半領會這個化簡题目的做法，領悟力較好的學了這個題目也無法觸類旁通，對「配方法」的用意及使用的場合毫無概念。對數學的了解只是零星片斷，互不相干。

這是目前數學教育的癥結所在！

#### (2) 本例牽涉稍嫌局限

上述趕牛教法，其實就是一種點渡教法。點渡教法所說的「明指歸向」實際上談的是比較整體性的歸向，比如說：

「高中數學教材內容的歸向何在？」

「高一下學期教材內容有幾個大方向？」

「極限的歸向何在？」

「向量引入其用意是什麼？」

這些東西時常牽涉到教師本身對教材的全盤認識與對教材所下的功夫。（同時我們將在以下各章所陸續提到以問題起源的「多迴路教法」及強調來龍去脈的「三層教法」之中再逐次證明。）

但點渡教法所強調的是：不管其牽涉範圍或廣或狹，每在引論內容詳節之中必須明指其歸向。

同時要以「分析方法」代替「演示推理」的一貫做法。使學生慢慢掌握「數學是一部方法論」的意義，了解每一方法的用意及挑出它來運用的背景。同時發展學生的推理能力。

點渡教法強調「隱藏推理」，似乎違反傳統說法。其實這套教法有它的理論基礎：每一個人在一十多年的生存經驗中都已發展了相當程度的推理能力。數學教室的附帶目的——只是——附帶一是使他更熟習運用他的推理。

那麼教的時候，為何反而要「隱藏推理」？這是一個耐人尋味的問題。我們慢慢要加以申論。

點渡教法希望培養的是一個學生真正能看到了「路」摸清了「路」，而不只記得那雙「布鞋」的晃動。不致於一旦失去「布鞋」的帶引，「路」便也跟着迷失。

**附註：**關於點渡教法，我們將於第三部份再予申論。

# 目 次

## 序

楔子 老師，我們去哪裡？

## 第一部份 數學的用意

|     |                |    |
|-----|----------------|----|
| 第一章 | 概論：數學的形式、內容與方法 | 1  |
| 第二章 | 「形式」的障礙        | 7  |
| 第三章 | 跨過「新數學」        | 13 |
| 第四章 | 「定義」是起點麼？      | 19 |
| 第五章 | 譯述：偏窄的數學家      | 31 |
| 第六章 | 譯述：高中數學課程的全盤商榷 | 43 |

## 第二部份 課堂上

|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 第一章 | 當前數學教材教法的三種弊病——閉鎖、片斷與被動              | 51 |
| 第二章 | 需求性與多迴路教法——有問題才有學習                   | 57 |
| 第三章 | 主動性與點渡教法——多吃幾口水                      | 61 |
| 第四章 | 連貫性與三層教法——總要知道所學全盤                   | 67 |
| 第五章 | 要舉些什麼樣的「問題」？——以極限、實數完備性及指數與對數的課程內容為例 | 93 |

## 第三部份 我們該教些什麼？

|     |      |     |
|-----|------|-----|
| 第一章 | 逼近觀點 | 111 |
|-----|------|-----|

## 2 如何教高中數學——改進中的數學教學

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 第一節 概論                                | 111 |
| 第二節 單變量的基本模型                          | 128 |
| 第三節 多變量的基本模型                          | 154 |
| 第四節 二次問題專論                            | 162 |
| 第二章 轉化觀點                              | 199 |
| 第一節 轉化的基礎——向量處理、坐標處理與複數處理             | 199 |
| 第二節 轉化的程序——以線性映射的處理為例                 | 205 |
| 第三節 關於資料處理：方差的用意——轉化方法中的<br>「數量化與資料化」 | 226 |
| 附錄一 測驗問題                              | 247 |
| 附錄二 「方法」與「解題」的一個實例                    | 256 |
| 附錄三 「料子」問題                            | 271 |
| 附錄四 試教半年的心得與建議                        | 284 |
| 附錄五 試教計劃總報告                           | 287 |
| 附錄六 日本高校數學一瞥                          | 293 |

## 第一部份 數學的用意

(一) 概論——數學的形式、內容與方法。

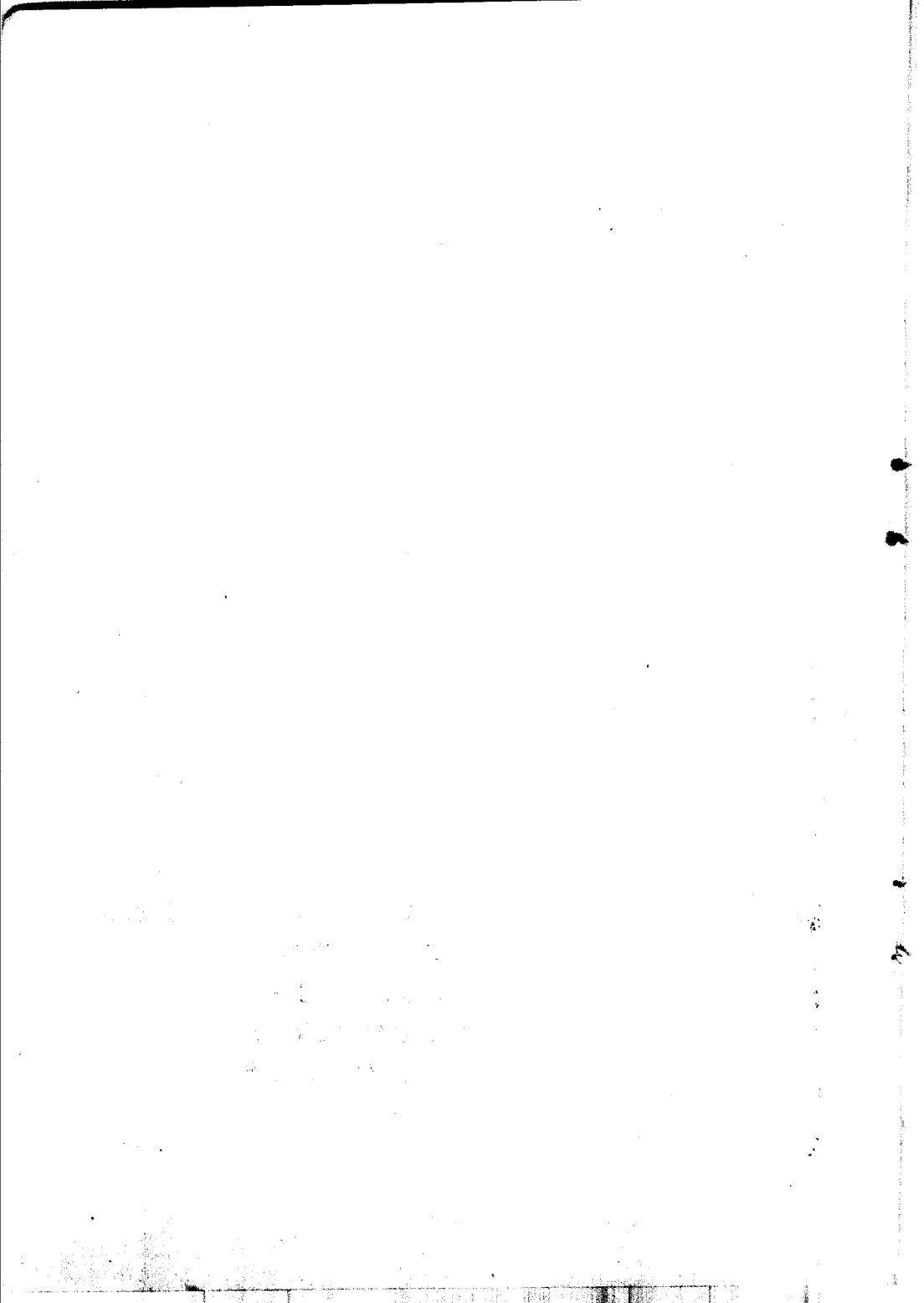
(二) 「形式」的障礙。

(三) 跨過「新數學」

(四) 「定義」是起點麼？

(五) 譯述：偏窄的數學家

(六) 譯述：高中數學課程的全盤商榷



## 第一章 概論：數學的形式、內容與方法

一般時候，大家想到「數學」時，心裏存着兩種範疇：是「數學家的數學」還是「應用科學的數學」？前者通稱為「理論數學」，後者稱「實用數學」。

本質上理論數學與實用數學並沒有界限，他們只是一種分工，同樣都是為了「實用」。理論數學可以說是「長遠實用」，實用數學比較起來則接近於「立時實用」。

「理論數學」一方面授予「實用數學」以發展的基礎或比較的模型。另一方面又把「實用數學」所發展的一些個案的成果綜合整理起來，變成一個普遍的結論與方法。兩者原是相輔相成，同以實用為依歸，只是實用數學顯得「直接」顯得「立時」。

就是因為「理論數學」在實用的需要線上居於間接性的角色，很多圈內圈外的人看不清它原來的功用。尤其近廿年內來，抽象形式的引入更使一般人誤以「理論數學」完全是「理論」，與實用無關。

「為數學而數學」的呼聲在戰後北美洲富裕的條件下日日高漲，「純粹數學」的名稱也跟着出現了。「純粹」的反面是「混雜」，說某些數學是「純粹」，某些又是「混雜」，是否帶着任何價值評斷上的意義？

幸好近幾年，在很多地方，數學的「實用性」又開始在抬頭。