GONGCHENG SHUXUE FUBIANHANSHU

·工程数学·

复变函数

牛少彰 编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

·工程数学·

复变函数

牛少彰 编著

北京邮电大学出版社
·北 京·

内 容 简 介

本书是按照教育部新审订的有关复变函数课程的基本要求，结合目前的教学改革需要而编写的. 全书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数及其应用、保角映射共 6 章. 全书按章节编排，每节后面都附有习题和答案，便于读者进行同步训练. 每章的后面还有复习题，主要侧重于本章内容的综合掌握，以进一步加强对所学概念和定理的理解.

本书可供高等院校工科类各专业作为教材使用，也可供工程技术人员阅读.

图书在版编目(CIP)数据

·工程数学· 复变函数 / 牛少彰编著. —北京：北京邮电大学出版社，2004
ISBN 7-5635-0874-0

Ⅰ. 工… Ⅱ. 牛… Ⅲ. ①工程数学—高等学校—教材②复变函数—高等学校—教材 Ⅳ. TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 077499 号

书　　名：·工程数学· 复变函数
编　　著：牛少彰
责任编辑：周　堃
出 版 者：北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路 10 号)
邮编：100876　电话：(010)62282185　62283578
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京通州皇家印刷厂印刷
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：8
字　　数：221 千字
印　　数：1—3000 册
版　　次：2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

ISBN　7-5635-0874-0/O·88　　定价：13.00 元

如有印装质量问题请与北京邮电大学出版社发行部联系

前　　言

本书是按照教育部新审订的有关复变函数课程的基本要求，结合目前的教学改革需要，根据编者多年从事复变函数教学的经验而编写的. 全书内容包括复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、复级数、留数及其应用、保角映射共 6 章.

复变函数是工程数学中的一门重要课程. 随着教学改革的不断深入，特别是教育部开展了高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作以来，各专业对复变函数课程的教学内容从深度和广度上都相应地提出了更高的要求.

复变函数作为高等院校的工程数学课程，由于内容多、课时少、进度快，有些重要的内容不得不一带而过，或者删掉，从而使得学生对课程内容的理解往往只是浮于表面. 为了弥补这些不足，编者在内容和结构方面做了精心编排，在讲解上尽量以提出问题或以通俗简单的实例引入概念，对重点定理和方法，提供较多的例题加以分析，以便于学生理解和掌握，达到化难为易的目的. 本书还提供了非常丰富的习题. 全书按章节编排，习题也按照章节给出，每节后面都附有习题和答案，便于读者进行同步训练. 每章的后面还有复习题，主要侧重于本章内容的综合掌握，以进一步加强学生对本章所学概念和定理的理解. 本书通过例题讲解，以及每节的习题和每章的复习题，使得解题训练循序渐进.

本书的编写得到了北京邮电大学理学院数学部许多老师的帮助，特别是数学部胡细宝、史悦、莫娇、刘吉佑、李叶舟、李鹤、章卫平、郭玉翠、丁金扣、刘宝生、贺祖国等老师，他们的教学经验丰富了本书的内容. 李叶舟、李鹤两位老师在理学院应用数学专业进行复变函数课程教学的体会，为本书在编写中进行“理工融合”方面的尝

试提供了宝贵的材料.本书的编写和出版也得到了闵祥伟教授的支持和帮助,在此一并表示感谢.

本书作为我校承担的教育部21世纪初高等教育“理工融合”教学改革项目的子课题研究内容的一部分,得到了北京邮电大学教学改革项目《理工融合培养模式中数学系列课程教学内容和课程体系改革方案及其实践》的大力支持.北京邮电大学出版社为本书的出版做了大量的工作,在此表示衷心感谢.

由于编者水平有限,书中难免有疏漏和错误之处,恳请读者批评指正.

编者

2004年8月

目　　录

第 1 章　复数与复变函数 ………… 1
1.1　复数及其运算 ………… 1
1.1.1　复数的概念及其表示法 ………… 1
1.1.2　复数的代数运算 ………… 4
1.1.3　扩充复平面与复球面 ………… 9
习题 1.1 ………… 10
1.2　复平面上的曲线和区域 ………… 12
1.2.1　复平面上的曲线方程 ………… 12
1.2.2　简单曲线与光滑曲线 ………… 16
1.2.3　复平面上的点集与区域 ………… 16
习题 1.2 ………… 18
1.3　复变函数 ………… 20
1.3.1　复变函数的概念 ………… 20
1.3.2　复映射 ………… 21
习题 1.3 ………… 24
1.4　复变函数的极限和连续性 ………… 25
1.4.1　复变函数的极限 ………… 25
1.4.2　复变函数的连续性 ………… 27
习题 1.4 ………… 29
小结 ………… 30
第 1 章复习题 ………… 31
第 2 章　解析函数 ………… 33
2.1　复变函数的导数 ………… 33
2.1.1　导数的概念 ………… 33

2.1.2 可导的充要条件 …… 37
习题 2.1 …… 40
2.2 函数的解析性 …… 41
2.2.1 解析函数的概念 …… 41
2.2.2 解析函数的充要条件 …… 43
习题 2.2 …… 45
2.3 初等函数 …… 47
2.3.1 指数函数 …… 47
2.3.2 对数函数 …… 48
2.3.3 幂函数 …… 50
2.3.4 三角函数和双曲函数 …… 51
2.3.5 反三角函数与反双曲函数 …… 54
习题 2.3 …… 56
小结 …… 57
第 2 章复习题 …… 59
第 3 章 复变函数的积分 …… 62
3.1 复变函数积分的概念 …… 62
3.1.1 复积分的定义 …… 62
3.1.2 复积分存在的条件及计算公式 …… 64
3.1.3 复积分的基本性质 …… 66
习题 3.1 …… 68
3.2 柯西积分定理 …… 69
3.2.1 柯西积分定理 …… 70
3.2.2 柯西—古萨基本定理 …… 71
3.2.3 复合闭路定理 …… 73
习题 3.2 …… 76
3.3 原函数与不定积分 …… 77
习题 3.3 …… 80
3.4 柯西积分公式和高阶导数公式 …… 81
3.4.1 柯西积分公式 …… 81

3.4.2 高阶导数公式 …… 84
3.4.3 柯西不等式 …… 88
习题 3.4 …… 89
3.5 解析函数与调和函数的关系 …… 91
习题 3.5 …… 96
小结 …… 97
第 3 章复习题 …… 99
第 4 章 复级数 …… 103
4.1 复数项级数 …… 103
4.1.1 复数列的收敛性及其判别法 …… 103
4.1.2 复数项级数的收敛性及其判别法 …… 104
习题 4.1 …… 106
4.2 幂级数 …… 107
4.2.1 幂级数的概念 …… 107
4.2.2 收敛圆和收敛半径 …… 109
4.2.3 收敛半径的求法 …… 110
4.2.4 幂级数的运算性质 …… 113
习题 4.2 …… 115
4.3 泰勒级数 …… 116
4.3.1 泰勒级数展开定理 …… 116
4.3.2 初等函数的泰勒级数展开式 …… 119
习题 4.3 …… 123
4.4 洛朗级数 …… 126
4.4.1 洛朗级数展开定理 …… 126
4.4.2 用洛朗级数展开式计算积分 …… 131
习题 4.4 …… 133
小结 …… 135
第 4 章复习题 …… 137
第 5 章 留数及其应用 …… 140
5.1 孤立奇点 …… 140

5.1.1 孤立奇点的定义 …… 140

5.1.2 孤立奇点的分类 …… 141

5.1.3 用函数的零点判别极点的类型 …… 143

5.1.4 函数在无穷远点的性态 …… 146

习题 5.1 …… 147

5.2 留数和留数定理 …… 149

5.2.1 留数的定义和计算 …… 149

5.2.2 留数定理 …… 153

5.2.3 洛必达法则 …… 156

5.2.4 函数在无穷远点的留数 …… 158

习题 5.2 …… 160

5.3 留数在定积分计算中的应用 …… 162

5.3.1 形如 $\int_0^\alpha f\left(\cos\frac{2\pi\theta}{\alpha},\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}\right)\mathrm{d}\theta$ 的积分 …… 162

5.3.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的积分 …… 165

5.3.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{i\beta x}\mathrm{d}x(\beta>0)$ 的积分 …… 167

习题 5.3 …… 171

5.4* 辐角原理及其应用 …… 172

5.4.1 对数留数 …… 173

5.4.2 辐角原理 …… 175

5.4.3 路西定理 …… 176

习题 5.4 …… 178

小结 …… 179

第 5 章复习题 …… 183

第 6 章 保角映射 …… 186

6.1 保角映射的概念 …… 186

6.1.1 曲线的切线方向和两条曲线的夹角 …… 186

6.1.2 解析函数导数的几何意义 …… 188

6.1.3 保角映射的概念 …… 191

习题 6.1 ········· 193
6.2 分式线性映射 ········· 194
6.2.1 保角性 ········· 194
6.2.2 保圆性 ········· 196
6.2.3 保交比性 ········· 197
6.2.4 保对称性 ········· 199
6.2.5 保侧性 ········· 200
6.2.6 三种特殊的分式线性映射 ········· 203
习题 6.2 ········· 210
6.3 几个初等函数所构成的映射 ········· 211
6.3.1 幂函数与根式函数 ········· 211
6.3.2 指数函数与对数函数 ········· 214
6.3.3 儒可夫斯基函数 ········· 217
习题 6.3 ········· 221
6.4* 保角映射的几个一般性定理及其应用 ········· 222
6.4.1 保角映射的几个一般性定理 ········· 222
6.4.2 施瓦茨—克里斯托费尔映射 ········· 224
6.4.3 拉普拉斯方程的边值问题 ········· 229
习题 6.4 ········· 232
小结 ········· 233
第 6 章复习题 ········· 234
复习题参考答案 ········· 237
主要参考文献 ········· 245

第 1 章 复数与复变函数

所谓复变函数就是自变量为复数的函数，是本课程的研究内容.

本章首先对复数及其基本运算作简要的介绍，然后介绍复平面上的曲线和区域以及复变函数的极限与连续性等概念.

1.1 复数及其运算

1.1.1 复数的概念及其表示法

1. 复数的概念

我们已经知道在实数范围内，方程 $x^2=-1$ 是无解的，因为没有一个实数的平方等于 -1. 于是人们引进一个新数 i，称为**虚数单位**，并规定 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$. 这样 i 是方程 $x^2=-1$ 的一个根.

任意一个复数 z 可以利用虚数单位 i 来表示. 设 x 和 y 为任意实数，则称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，其中 x 和 y 分别称为复数 z 的**实部**(real part)和**虚部**(imaginary part)，分别记作

$$x=\operatorname{Re} z,\quad y=\operatorname{Im} z \tag{1.1.1}$$

当 $x=0,y\neq0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+\mathrm{i}0$ 为实数 x，简记为 $z=x$. 因此复数是实数概念的推广.

两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等. 一个复数 z 等于 0，当且仅当它的实部和虚部同时等于 0.

与实数的情形不同，一般来说，任意两个复数不能比较大小.

复数在实际中有广泛的应用. 如电路分析中复电流和复电压都是用复数表示的.

2. 复数的几何表示

由于一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 惟一确定，因而对于平面上给定的直角坐标系，复数的全体与该平面上点的全体是一一对应的. 这样复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用该平面上坐标为 (x,y) 的点来表示，称这个平面为**复平面**或 **z 平面**，其中 x 轴上的点表示的是实数，称 x 轴为**实轴**；y 轴上的点表示的是纯虚数，称 y 轴为**虚轴**. 这样，复数与复平面上的点成一一对应，并且把"点 z"和"复数 z"看成是一样的.

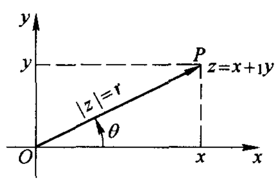

图 1.1

在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还与从原点 O 指向点 $P(x,y)$ 的平面向量一一对应，因此复数 z 也能用向量 $\overrightarrow{OP}$ 来表示，并且在几何上称该复数 z 为**复向量** z（图 1.1）. 复向量 z 的长度称为 z 的**模**或**绝对值**，记作

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.2}$$

并且当 $z\neq 0$ 时，我们把以正实轴为始边，以复向量 z 为终边的转动角的弧度数 θ 称为 z 的**辐角**（argument），记为 $\operatorname{Arg} z=\theta$. 于是有

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta \tag{1.1.3}$$

由于 $z=0$ 的辐角是不确定的，$\operatorname{Arg}(0)$ 无意义. 当 $z\neq 0$ 时，由于其辐角 θ 增加 2π 的整数倍时，其终边不变，因此 $\operatorname{Arg} z$ 是多值的，但满足条件 $-\pi<\operatorname{Arg} z\leqslant\pi$ 的辐角值是惟一的，称该值为其**辐角的主值**，记为 $\arg z$. 于是有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots) \tag{1.1.4}$$

当 $z=x+\mathrm{i}y\neq 0$ 时，辐角的主值可按下列关系确定

$$\arg z=\begin{cases}\arccos\dfrac{x}{|z|}, & y\geqslant 0\\[2ex] -\arccos\dfrac{x}{|z|}, & y<0\end{cases} \tag{1.1.5}$$

辐角的主值也可以由反正切函数的主值确定：

$$
\underset{(z\neq 0)}{\arg z} = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & \text{当 } x>0 \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } x=0, y<0 \\ \arctan \dfrac{y}{x}+\pi, & \text{当 } x<0, y\geqslant 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x}-\pi, & \text{当 } x<0, y<0 \end{cases}
$$

其中
$$
-\frac{\pi}{2}<\arctan \frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}
$$

例 1 求复数 $z_1=2-2\mathrm{i}$ 和 $z_2=-3+4\mathrm{i}$ 的模和辐角.

解 $|z_1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}, |z_2|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

由于 $\operatorname{Im} z_1=-2<0$，因此 $\arg z_1=-\arccos \dfrac{2}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\pi}{4}$，于是

$$
\operatorname{Arg} z_1=-\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)
$$

由于 $\operatorname{Im} z_2=4>0$，从而 $\arg z_2=\arccos \dfrac{-3}{5}=\pi-\arccos \dfrac{3}{5}$，于是

$$
\operatorname{Arg} z_2=\arccos \frac{-3}{5}+2k\pi=(2k+1)\pi-\arccos \frac{3}{5}
$$
$$
(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)
$$

我们把实部相同且虚部绝对值相等但符号相反的两个复数称为**共轭复数**，与 z 共轭的复数记作 $\bar{z}$. 如果 $z=x+\mathrm{i}y$，那么 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$.

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面内的位置是关于实轴对称的(图 1.2)，因而 $|z|=|\bar{z}|$. 如果 z 不在负实轴和原点上，还有 $\arg z=-\arg \bar{z}$.

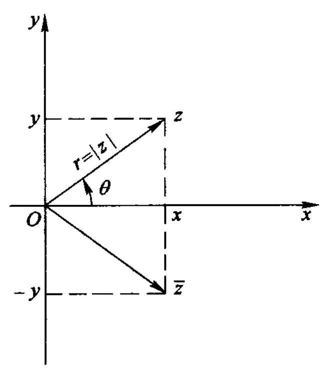

图 1.2

复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的**代数表示式**. 由式(1.1.3)还可以把 z 表示

成下面的形式

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.1.6}$$

称为复数的**三角表示式**.

利用 Euler 公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则有

$$z=re^{i\theta} \tag{1.1.7}$$

这种表示形式称为复数的**指数表示式**.

例 2 将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

(1) $z=1+\mathrm{i}$ (2) $z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}$

解 (1) 由于 $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$，因此，$z$ 的三角表示式为

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

z 的指数表示式为

$$z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

(2) 由于 $r=|z|=1$，又

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi$$

因此 z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi$$

z 的指数表示式为

$$z=e^{\frac{3}{10}\pi i}$$

1.1.2 复数的代数运算

1. 复数的四则运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法、减法及乘法定义如下

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad (z_2\neq 0)$$

显然，当 z_1 与 z_2 为实数(即当 $y_1=y_2=0$)时，与实数的运算法则一致.

如果 $z=x+\mathrm{i}y$，则与 z 共轭的复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，共轭复数有如下性质

i) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\ \bar{z}_2$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

ii) $\bar{\bar{z}}=z$

iii) $z\bar{z}=[\mathrm{Re}\,z]^2+[\mathrm{Im}\,z]^2$

iv) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$，$z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,z$

在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时，可以利用共轭复数的性质 iii)，把分子与分母同乘以 $\bar{z}_2$，得到

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\ \bar{z}_2}{|z_2|^2}\tag{1.1.8}$$

根据复数的运算法则可知，两个复数 z_1 和 z_2 的加、减法运算和相应向量的加、减法运算一致(图 1.3).

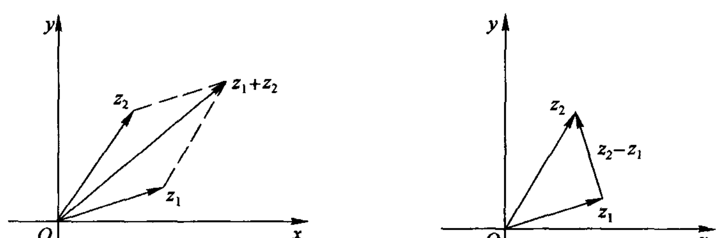

图 1.3

由图 1.3 可以看出，对任意复数 z_1 和 z_2 有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|，\ ||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\tag{1.1.9}$$

对于非零复数

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$$

利用三角函数的和、差公式，可得

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\\&\quad\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]\end{aligned}$$

于是

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{1.1.10}$$

$$\operatorname{Arg} z_1z_2=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2 \tag{1.1.11}$$

由于辐角的多值性，因此，等式(1.1.11)两端都是由无穷多个数构成的两个数集，该等式表示两端可能取的值的全体是相同的.也就是说，对于左端的任一值，右端必有一值和它相等，并且反过来也一样.例如，设 $z_1=-1,z_2=\mathrm{i}$，则 $z_1z_2=-\mathrm{i}$，

$$\operatorname{Arg} z_1=\pi+2n\pi,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\operatorname{Arg} z_2=\frac{\pi}{2}+2m\pi,(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\operatorname{Arg} z_1z_2=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

代入等式(1.1.11)得

$$\frac{3\pi}{2}+2(m+n)\pi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

要使上式成立，必须且只需 $k=m+n+1$.只要 m 与 n 各取一确定的值，总可选取 k 的值使 $k=m+n+1$，反之也一样.若取 $m=n=0$，则取 $k=1$；若取 $k=-1$，则可取 $m=0,n=-2$ 或 $m=-2,n=0$.

对后面出现的含有辐角的等式也应当这样理解.

如果用指数形式表示复数 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$，$z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则有 $z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.

由此归纳可得，如果 $z_k=r_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}=r_k(\cos\theta_k+\mathrm{i}\sin\theta_k)$，$k=1,2,3,\cdots,n$，则有

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n&=r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]\\&=r_1r_2\cdots r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\end{aligned} \tag{1.1.12}$$

类似可得两复数相除的情形,即有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.1.13}$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}\,z_1-\mathrm{Arg}\,z_2 \tag{1.1.14}$$

2. 幂与根

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 **n 次幂**,记作 z^n,即

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\cdots\cdot z}_{n个}$$

如果在式(1.1.12)中,令从 z_1 到 z_n 的所有复数都等于 z,那么对于任何正整数 n,有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta) \tag{1.1.15}$$

特别,当 z 的模 $r=1$,即 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 时,由式(1.1.15)有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.1.16}$$

这就是棣莫弗(De Moivre)公式.

下面用式(1.1.15)和式(1.1.16)来求方程 $w^n=z$ 的根 w,其中 z 为已知复数.

设有非零复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,若存在复数 w 使 $z=w^n$,则称 w 为复数 z 的 **n 次方根**,记为 $w=\sqrt[n]{z}$.

为了求出其方根 w,可设 $w=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$,于是

$$(\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi})^n=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

它等价于 $\rho^n=r$,且 $n\varphi=\theta+2k\pi$,$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,即

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

所求方根可表示为

$$w_k=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \tag{1.1.17}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时,得到 n 个相异的根: