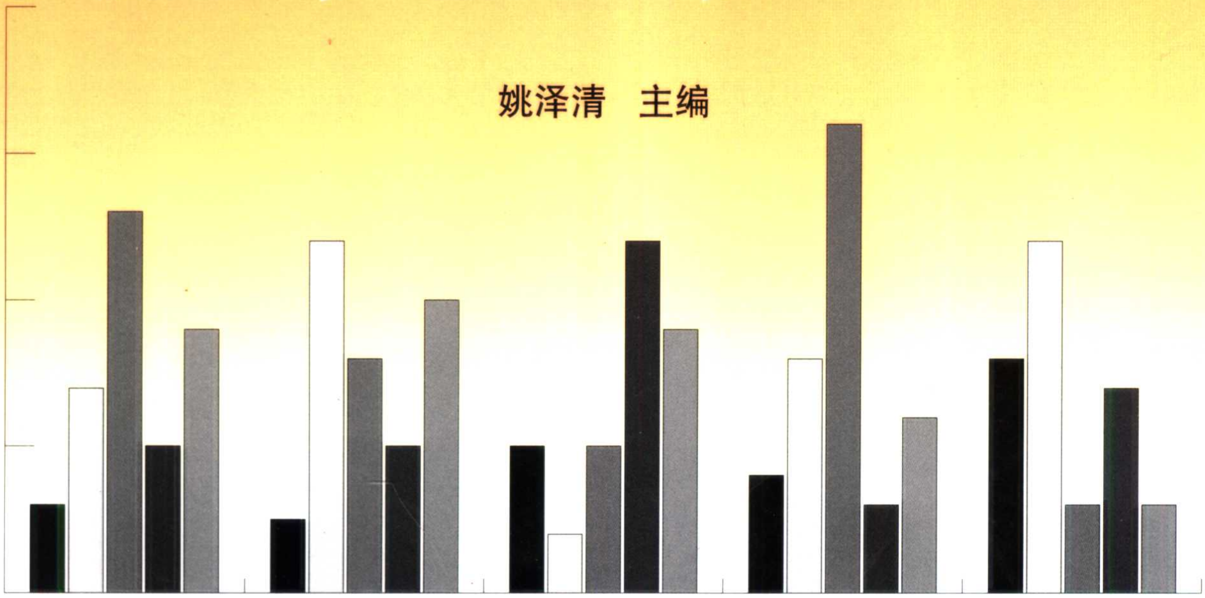
高等院校核心课程导学

概率统计导学



姚泽清　主编

国防工业出版社
http://www.ndip.cn

高等院校核心课程导学

概率统计导学

主编　姚泽清

编写　姚泽清　汪泽焱
　　　刘海峰　吴　岱

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书以全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲为基准，并参照浙江大学《概率论与数理统计》（第三版）教材的章节顺序编写而成。全书分为三大部分：第一部分是内容综述，介绍各章所涉及的基本概念、基本性质和基本方法；第二部分是典型例题，对 1987 年以来的数学一、数学三和数学四考研真题以及部分全国高等教育自学考试的试题进行了全面解析；第三部分是同步练习，精选了各级各类考试中的常见题型供读者作习题之用。本书将纷繁复杂的概率统计概念、理论和方法用一条清晰的脉络显现出来，将经典的概率统计解题思路全方位地展现在学生面前，使学生能够得到有效的概率统计思维方式的训练，以缩短学生学习和复习的进程，提高学习效率。此外，书后还列有 120 道快速自测题，供读者强化训练之用，书中所有习题均配有解答。

本书可作为概率统计的教学参考书和考研辅导书供各级各类高等院校的学生使用，也适用于参加全国高等教育自学考试的朋友们。

图书在版编目（CIP）数据

概率统计导学 / 姚泽清主编. —北京：国防工业出版社，2004.8

ISBN 7-118-03531-9

Ⅰ. 概... Ⅱ. 姚... Ⅲ. ①概率 - 高等学校 - 教学参考资料②数理统计 - 高等学校 - 教学参考资料 Ⅳ. 021

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 073958 号

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）

（邮政编码 100044）

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787 × 1092 1/16 印张 11¼ 255 千字

2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月北京第 1 次印刷

印数：1—5000 册 定价：16.00 元

前　言

概率统计是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门学科，作为数学的一个重要分支在许多领域有着广泛的应用。实际上，我们的一生都在和具有偶然性的随机现象打交道，正如法国大数学家拉普拉斯所言，"生活中最重要的问题，其中绝大多数在本质上只是概率的问题。"英国学者威尔斯曾经说过："统计的思维方式，就像读和写的能力一样，将来有一天会成为效率公民的必备能力。"因此，概率统计不仅仅是高等院校中的一门数学基础课程，也不仅仅是工学、经济学和管理学等专业硕士研究生入学考试数学试卷中的一个必考科目，而且是一个现代人知识结构中不可或缺的一个组成部分，它构成了一个人的人文素质的一个重要方面。

然而，概率统计的学习却让很多人犯难。繁多的理论概念，繁杂的计算公式和繁琐的解题过程，使不少人望而却步。说到底，这不是学生的无能，而是教师的失职。如何将纷繁复杂的概率统计概念、理论和方法用一条清晰的脉络显现出来，将经典的概率统计解题思路全方位地展现在学生面前，使学生能够得到有效的概率统计思维方式的训练，以缩短学生学习和复习的进程，提高学生的学习效率，使概率不再难，便是本书试图解决的一大问题。

本书以《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》为基准，结合教育部颁发的概率统计课程教学基本要求和全国高等教育自学考试数学课程的考试要求，并参照浙江大学《概率论与数理统计》教材(第三版)的章节顺序编写而成。全书共分九章，每章又分为三大部分：第一部分是"内容综述"，分类介绍各章内容所涉及的基本概念、基本性质和基本方法，使读者对本章的知识体系有一个准确的把握；第二部分是"典型例题"，对 1987 年以来的数学一、数学三和数学四考研真题以及部分全国高等教育自学考试高等数学二和概率统计二的试题分门别类地进行了全面解析，并用题前分析的方式对解题思路进行了剖析，用题外话的方式对解题过程中的出彩点和易出错的地方进行了点评；第三部分是"同步练习"，精选了各级各类考试中的常见题型供读者作习题之用。此外，我们还将 120 道选择题和填空题作为"快速自测题"列在书后，供读者复习之用，以检验自己对概率统计的概念、性质和方法的把握是否准确。

本书可作为概率统计的教学参考书和考研辅导书，供各级各类高等院校的学生使用，也适用于参加全国高等教育自学考试的朋友们。

本书的第一章至第三章由刘海峰、吴岱同志执笔编写，第四章、第五章由汪泽焱同志执笔编写，第六章至第九章由姚泽清同志执笔编写，姚泽清还负责全书的总撰定稿工作。本书的编写工作得到了李力教授、苏兆龙教授、滕加俊副教授、田作威副教授、刘守生副教授和解放军理工大学理学院数理系运筹与系统工程教研室各位同仁的大力支持，在此表示衷心的感谢，并借此机会向理学院训练部苏晓冰部长、数理系张寿虎政委致谢，感谢他

们对我们始终如一的关怀和信赖！

由于时间和水平所限，书中错漏之处在所难免，恳请各位专家和读者批评指正，信寄：yzqnj@yahoo.com.cn

姚泽清

2004年4月于南京

目　　录

第一章　随机事件与概率

一、内容综述

(一) 基本概念

1. 确定性现象与随机现象

在一定条件下必然发生或必然不发生的现象称为确定性现象;在一定条件下可能发生也可能不发生,但在大量重复试验中却呈现出某种规律性的现象称为随机现象。概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门学科。

2. 随机试验与随机事件

具有下列三个特性的试验称为随机试验。

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,但每次试验所有可能结果事先知道;

(3) 一次试验将发生哪个结果在试验之前不能预言。

在随机试验中,我们将在一次试验中可能发生也可能不发生,但在大量重复试验中却呈现出某种规律性的事件称为随机事件,简称事件。

3. 样本空间

随机试验 E 的每一个可能结果称为基本事件,基本事件具有下面两个基本性质:

(1) 完备性:每次试验必出现一个基本事件;

(2) 互斥性:每次试验只出现一个基本事件,任何两个基本事件不同时发生。

全体基本事件所组成的集合称为样本空间,用 Ω 表示,其中的每一个基本事件用 e 表示,称为样本空间中的样本点。

随机事件是若干样本点的集合,从而是样本空间 Ω 的子集。必然事件 Ω(全空间)与不可能事件 $\varnothing$(空集)是两个特殊的随机事件。

4. 事件的关系

设随机试验 E 的样本空间为 Ω, A, B 是 Ω 的两个子集。

(1) 包含关系: 若 $A\subset B$, 则称事件 B 包含事件 A, 即事件 A 发生时事件 B 必发生;

(2) 相等关系: 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$;

(3) 互斥关系: 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B 互不相容(或互斥),即事件 A 与事件 B 不同时发生。

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,且 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$,则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组。

5. 事件的运算

名　称	记　号	定义式	意　　义
和事件	$A\cup B$	$A\cup B=\{x:x\in A$ 或 $x\in B\}$	事件 A 与事件 B 中至少有一个发生
积事件	$A\cap B,AB$	$A\cap B=\{x:x\in A$ 且 $x\in B\}$	事件 A 与事件 B 同时发生
差事件	$A-B$	$A-B=\{x:x\in A$ 且 $x\notin B\}$	事件 A 发生且事件 B 不发生
逆事件	$\bar{A}$	$\bar{A}=\Omega-A$	事件 A 不发生
注:逆事件亦称为对立事件。			

6. 频率与概率

(1) 频率:设随机事件 A 在 n 次独立重复试验中发生了 n_A 次,则比值$\frac{n_A}{n}$称为随机事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$$

(2) 概率的统计定义:在大量重复试验中,随着试验次数 n 的增加,随机事件 A 发生的频率$f_n(A)$常在某一稳定值 p 附近摆动,此时,我们称此性质为频率的稳定性,并称此定值 p 为事件 A 的概率,记为 $P(A)$。

(3) 概率的公理化定义:设随机试验 E 的样本空间为 Ω,随机事件 A 是 Ω 的子集,$P(A)$称为事件 A 的概率,若集合函数 $P(\cdot)$满足下面三条公理:

公理 1(非负性):对于任一事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2(规范性):对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

公理 3(可列可加性):对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

7. 条件概率

设 A,B 是两个事件,且 $P(B)>0$,称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率。条件概率具有概率的一切性质。

8. 独立性

(1) 两个事件的独立性:设 A,B 是两个事件,若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

则称事件 A 与事件 B 相互独立,简称独立。

(2) n 个事件的独立性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若任给 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,$k=2,3,\cdots,n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。

【注】不仅仅是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立!

(二) 基本性质

1. 事件的运算律

设 A, B, C 为事件,则有

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$

(2) 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(4) 对偶律(德·摩根律): $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

(5) 吸收律:若 $A \subset B$,则 $A \cup B = B$, $AB = A$

2. 概率的性质

(1) 不可能事件的概率: $P(\varnothing) = 0$;

(2) 有限可加性:对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 单调性: 若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$;

(4) 可减性: 若 $A \subset B$,则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$;

(5) 逆事件的概率: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

(6) 加法公式: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$。

一般地,有:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

3. 条件概率三公式

(1) 乘法公式:设 $P(A) > 0$,则有

$$P(AB) = P(A) P(B \mid A)$$

一般地,有:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) \cdots P(A_{n-1} \mid A_1 \cdots A_{n-2}) P(A_n \mid A_1 \cdots A_{n-1})$$

(2) 全概率公式:设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组,且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,则有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)$$

(3) 逆概公式(贝叶斯公式):设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组,且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,则有

$$P(A_k \mid B) = \frac{P(A_k) P(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)}, \; k = 1, 2, \cdots, n$$

【注】已知 $P(B|A_i), i=1,2,\cdots,n$(例如,各厂的次品率),求 $P(B)$(总次品率)时,用全概公式;求 $P(A_k|B)$(次品出自第 k 个厂的概率)时,用逆概公式。

4. 相互独立的随机事件的性质

(1) 设 A、B 是两事件,且 $P(B)\neq 0$,则 A,B 相互独立$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A)$;

(2) 若 A 与 B 相互独立,则以下各对事件也相互独立:$\bar{A}$ 与 B,A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$。

(三) 基本方法

1. 古典概型下概率的计算

随机试验称为等可能概型或古典概型,若它具有下面两个特性:

(1) 有限性:试验的结果为有限个;

(2) 等可能性:试验中每个基本事件发生的可能性相同。

此时,随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\Omega\text{ 中基本事件的总数}}$$

2. 几何概型下概率的计算

随机试验称为几何概型,若它具有下面两个特征:

(1) 它的样本空间是平面(或直线、空间)中的某一区域 Ω;

(2) 任意一点落在 Ω 中面积(或长度、体积)相同的子区域的可能性是相同的。

此时,随机事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$$

其中 S_A,S_Ω 分别为 A,Ω 的面积(或长度、体积)。

3. 条件概率的计算

计算条件概率有两条途径:

(1) 不改变样本空间,按照乘法公式来计算条件概率:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

(2) 按条件改变样本空间,将条件概率化为无条件概率。

例如:假定男性、女性出生率相同,在有三个孩子的家庭中,已知有一男孩,求三个孩子都是男孩的概率。

【解法一】设事件 $A=$“三个孩子中有一个男孩”,$B=$“三个孩子都是男孩”,则样本空间中共有 $2^3=8$ 个样本点,故

$$P(A)=\frac{7}{8},\ P(AB)=\frac{1}{8}$$

从而有

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{7}$$

【解法二】已知三个孩子中已有一男孩,则原来样本空间中“三个孩子都是女孩”这一

基本事件可以除去，此时，样本空间中的样本点个数由原来的 8 个减为 7 个，而“三个孩子都是男孩”只是其中之一，故所求概率为

$$p = \frac{1}{7}$$

二、典型例题

（一）概率的计算

例 1 设方程 $x^2 + bx + c = 0$ 中的 b, c 分别是连掷两次一枚骰子先后出现的点数，求此方程有实根的概率和有重根的概率。

（1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题）

【解】 设 A = “方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有实根”，此时有 $b^2 - 4c \geqslant 0$，即

$$c \leqslant \frac{b^2}{4}$$

设 B = “方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有重根”，此时有 $b^2 - 4c = 0$，即

$$c = \frac{b^2}{4}$$

b 的可能取值为 1～6，而 c 在上述两类限制下的取值如下表：

b	1	2	3	4	5	6
$c \leqslant \frac{b^2}{4}$		1	1～2	1～4	1～6	1～6
$c = \frac{b^2}{4}$		1		4		

由此可见，A 中所含的样本点有 19 个，故

$$P(A) = \frac{19}{36}$$

B 中所含的样本点有 2 个，故

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

例 2 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A) =$ ________。

（2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题）

【解】 由 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$，有

$$P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$$

得 $P(A) = P(B)$；

因为 A、B 相互独立，所以 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 也相互独立。由 $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$，得

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = (1 - P(A))^2 = \frac{1}{9}$$

解得 $1-P(A)=\pm\frac{1}{3}$,由于 $P(A)\leqslant 1$,将负值舍去,得

$$P(A)=\frac{2}{3}$$

(二) 全概公式与逆概公式

例 3 假设一厂家生产的每台仪器,以概率 0.70 可以直接出厂;以概率 0.30 需进一步调试,经调试后以概率 0.80 可以出厂;以概率 0.20 定为不合格品不能出厂。现该厂新生产了 $n(n\geqslant 2)$ 台仪器(假设各台仪器的生产过程相互独立),求:

(1) 全部能出厂的概率 α;

(2) 其中恰好有两件不能出厂的概率 β;

(3) 其中至少有两件不能出厂的概率 θ。

(1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题)

【解】设 A =“一台仪器可直接出厂”,B =“一台仪器能出厂”,则由题设有

$$P(A)=0.7,\ P(B|\bar{A})=0.8$$

由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})\\&=0.7\times 1+0.3\times 0.8=0.94\end{aligned}$$

故一台仪器不能出厂的概率为 0.06。记 $P_n(k)$ 为 n 台仪器中恰有 k 台不能出厂的概率,则有

$$P_n(k)=C_n^k\times 0.06^k\times 0.94^{n-k},\ k=0,1,\cdots,n$$

(1) $\alpha=P_n(0)=C_n^0\times 0.06^0\times 0.94^n=0.94^n$;

(2) $\beta=P_n(2)=C_n^2\times 0.06^2\times 0.94^{n-2}$;

(3) $\theta=1-P_n(0)-P_n(1)=1-0.94^n-C_n^1\times 0.06\times 0.94^{n-1}$。

例 4 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%,现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该产品属 A 生产的概率是________。

(1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题)

【解】设 A =“任取一件产品是 A 厂生产的”,B =“任取一件产品是 B 厂生产的”,C =“任取一件产品是次品”,则有

$$P(A)=0.6,\ P(B)=0.4$$
$$P(C|A)=0.01,\ P(C|B)=0.02$$

因为 A,B 构成一完备事件组,故由逆概公式,有

$$\begin{aligned}P(A|C)&=\frac{P(A)P(C|A)}{P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)}\\&=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}\end{aligned}$$

例 5 设有来自三个地区的各 10 名、15 名、25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份。随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出 2 份。

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率。

(1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题)

【解】设 B_i = "报名表是第 i 个地区的考生的",$i=1,2,3$;

A_j = "第 j 次抽到的报名表是女生表",$j=1,2$

则由题设,有

$$P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=\frac{1}{3}$$

$$P(A_1|B_1)=\frac{3}{10},\ P(A_1|B_2)=\frac{7}{15},P(A_1|B_3)=\frac{5}{25}$$

(1) 先抽到的一份是女生表的概率为

$$p=P(A_1)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}$$

(2) 根据题意,所求概率为

$$P(A_1|\bar{A}_2)=\frac{P(A_1\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}$$

由全概率公式,有

$$P(A_1\bar{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A_1\bar{A}_2|B_i)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3\times 7}{10\times 9}+\frac{7\times 8}{15\times 14}+\frac{5\times 20}{25\times 24}\right)=\frac{2}{9}$$

以及

$$P(\bar{A}_2)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(\bar{A}_2|B_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}+\frac{8}{15}+\frac{20}{25}\right)=\frac{61}{90}$$

最后得所求的概率为

$$q=P(A_1|\bar{A}_2)=\frac{P(A_1\bar{A}_2)}{P(\bar{A}_2)}=\frac{2/9}{61/90}=\frac{20}{61}$$

(三) 独立性

例 6 设 A,B 是任意二事件,其中 A 的概率不等于 0 和 1,证明 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件。

(2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学四试题)

【证】由于 A 的概率不等于 0 和 1,知题中两个条件概率都存在。

(1) 必要性:因为事件 A 与 B 独立,所以事件 $\bar{A}$ 与 B 也独立,因此

$$P(B|A)=P(B),\ P(B|\bar{A})=P(B)$$

从而

$$P(B|A) = P(B|\bar{A})$$

(2) 充分性:由 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$,有

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$P(AB)[1-P(A)] = P(A)P(B) - P(A)P(AB)$$

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

因此 A 与 B 独立。

例 7 将一枚硬币独立地掷两次,引进事件:$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$,$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$,$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$,$A_4=\{$正面出现两次$\}$,则事件

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立

(2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题)

【解】选(C)。A_3 与 A_4 互斥,故有

$$P(A_3A_4) = 0 \neq P(A_3)P(A_4)$$

从而(B)、(D)均不成立;又 A_3 与 A_1A_2 互斥,故有

$$P(A_1A_2A_3) = 0 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

从而(A)也不成立,故选(C)。

三、同步练习

1. 写出下面随机试验的样本空间:

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分);

(2) 同时掷三颗骰子,记录三颗骰子点数之和;

(3) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数;

(4) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的标上“1”,不合格的标上“0”,如连续查出 2 个次品就停止检查,或检查出 4 个产品就停止检查,记录检查结果;

(5) 在单位圆内任取一点,记录它的坐标;

(6) 将一尺之棰折为三段,观察各段的长度。

2. 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A,B,C 都发生;

(2) A,B,C 都不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 中不多于一个发生;

(5) A,B,C 中至少有 2 个发生;

(6) A,B,C 中不多于 2 个发生。

3. 某班有 50 名学生,选出班长、副班长、学习委员各一名。设每个学生当选等可能性。求:

(1) 某甲当选的概率;

(2) 某甲当选为班长的概率。

4. 在 1500 个产品中有 400 个次品,1100 个正品,取 200 个。

(1) 求恰有 60 个次品的概率;

(2) 求至少有 3 个次品的概率。

5. 设有 n 个球,每个球都等可能地被放入到 N 个格子中的任一格子中去($n \leqslant N$),求下列事件的概率:

(1) 指定的 n 个格子,其中各有一个球放入;

(2) 恰好有 n 个格子,其中各有一个球放入。

6. 某产品 100 件,其中有 3 件次品,现从中抽取三件(不放回抽样),求下列事件概率:

(1) 三件中恰有两件次品;

(2) 第三件才抽到次品。

7. 一份试卷有 6 道题,某学生考试时由于粗心随机犯了 4 处错误。假定每道题可以犯 4 个以上错误,试求:

(1) 这 4 个错误发生在最后一道题上的概率;

(2) 这 4 个错误发生在不同题上的概率;

(3) 至少有 3 道题全对的概率。

8. 罐中有 12 颗围棋子,其中 8 颗白子,4 颗黑子。从中任取 3 颗,求:

(1) 取到的都是白子的概率;

(2) 取到 2 颗白子、1 颗黑子的概率;

(3) 取到的 3 颗棋子中至少有 1 颗黑子的概率;

(4) 取到的 3 颗棋子颜色相同的概率。

9. 已知事件 A_1, A_2 同时发生时事件 A 发生,证明:$P(A) \geqslant P(A_1) + P(A_2) - 1$。

10. 设 A, B, C 是三事件,且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$,$P(AB) = P(BC) = 0$,$P(AC) = \frac{1}{8}$,求 A, B, C 中至少有一个发生的概率。

11. 设 A, B 为两个随机事件,已知 $P(\bar{A}) = 0.3$,$P(B) = 0.4$,$P(A - B) = 0.5$,求 $P(B \mid \bar{A})$。

12. 已知 $P(\bar{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\bar{B}) = 0.5$,求 $P(B \mid \bar{A})$与 $P(B \mid A \cup \bar{B})$。

13. 袋中有 1 只球,其颜色不是白色就是黑色。再向袋中放入 1 只白球,然后随机地从袋中取出一球,发现取出的是白球,求袋中另一只球为白球的概率。

14. 据以往资料表明,某一三口之家,患某种传染病的概率有以下规律:$P\{$孩子得病$\} = 0.6$,$P\{$母亲得病$\mid$孩子得病$\} = 0.5$,$P\{$父亲得病$\mid$母亲及孩子得病$\} = 0.4$,求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率。

15. 有两个箱子,第一个箱子有 3 个白球 2 个红球,第二个箱子有 4 个白球 4 个红球,现从第一个箱子中随机地取出 2 个球放到第二个箱子中,再从第二个箱子中取出 2 个球,求第二次取出的 2 个球是一红一白的概率。

16. 某地公安部门经统计后发现,交通事故由自行车造成的占$\frac{1}{2}$,由汽车造成的占$\frac{1}{3}$,由其他造成的占$\frac{1}{6}$。由自行车造成的交通事故的死亡率为$\frac{1}{4}$,由汽车造成的交通事故

的死亡率为$\frac{1}{2}$，由其他原因造成的交通事故的死亡率为$\frac{1}{3}$，试求遭遇交通事故后的死亡率。

17. 口袋里装有 $a+b$ 枚硬币，其中 b 枚硬币是废品(两面都是国徽)，从口袋中随机地取一枚硬币，把它独立地抛 n 次结果发现向上的一面全是国徽，试求这枚硬币是废品的概率。

18. 有两箱同类零件，一箱是甲厂生产的，一箱是乙厂生产的。已知甲厂产品合格率0.9，乙厂产品合格率0.85；今从两箱中随机取一箱，然后从该箱中取零件两次，每次任取1个，取后放回(有放回抽样)。

(1) 求两次取到的零件中合格品与不合格品各有一个的概率；

(2) 求在第一次取出的零件是合格品且第二次取出的零件是不合格品的条件下，这2个零件是甲厂生产的概率。

19. 无线电通信中，由于随机干扰，当发送信号"•"时，收到信号为"•"、"不清"、"—"的概率分别为0.7,0.2与0.1；当发送信号"—"时，收到信号为"—"、"不清"、"•"的概率分别为0.9,0.1与0。如果整个发报过程中"•"与"—"的比例分别为0.6与0.4，那么当收到信号"不清"时，原发信号为"•"与"—"的概率分别有多大?

20. 求证：事件 A 与 B 独立，当且仅当 $P(\bar{A}B)P(A\bar{B})=P(AB)P(\bar{A}\bar{B})$。

21. 设有三个事件 A,B,C，其中 $P(B)>0$，$P(C)>0$，且 B、C 相互独立，求证：$P(A\mid B)=P(A\mid BC)P(C)+P(A\mid B\bar{C})P(\bar{C})$。

22. 三人独立地去破译一份密码，已知每人能译出的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，问三人中至少有一人能将此密码译出的概率。

第二章　随机变量及其分布

一、内容综述

(一) 基本概念

1. 随机变量

(1) 定义:设随机试验的样本空间 $\Omega=\{e\}$, $X=X(e)$是定义在 Ω 上的实值单值函数,则称 X 是一个随机变量。

(2) 刻画:随机变量用分布函数来刻画。设 X 是一个随机变量,x 是任意实数,则函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}$$

称为 X 的分布函数。

2. 离散型随机变量

(1) 定义:若随机变量 X 的可能取值只有有限个或可列无限多个,则称 X 为离散型随机变量。

(2) 刻画:离散型随机变量用分布律来刻画。设 X 的所有可能取值为 $x_i, i=1,2,\cdots$,则称

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,2,\cdots$$

为离散型随机变量 X 的分布律。分布律也可以用表格的形式来表示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

3. 连续型随机变量

(1) 定义:设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,若存在非负函数 $f(x)$,使得对于任意实数 x,有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)\mathrm{d}x$$

则称 X 为连续型随机变量,其中函数 $f(x)$称为 X 的概率密度函数,简称概率密度。

(2) 刻画:连续型随机变量用概率密度来刻画。对于连续型随机变量,它的分布函数 $F(x)$可表为概率密度 $f(x)$的变上限积分,因而是连续函数。

【注】随机变量除了离散型和连续型以外,还有混合型(部分离散型部分连续型)和奇异型(即非离散型也非连续型),故离散型和连续型不是非此即彼的关系。