伯拉基斯著

中學數學教學法

第四冊　幾何教學法

中學數學教學法

第四册　幾何教學法

伯拉基斯著

吳品三譯

人民教育出版社出版

中學數學教學法　第四冊　幾何教學法

著　　者：伯拉基斯
譯　　者：吳品三
責任校對：黃淸野
出 版 者：人民教育出版社
（營業許可證出字第二號）
發 行 者：新華書店
印 刷 者：（見正文最後頁）

書號：參 0146　　1953年12月原版
字數：74,600　　1954年5月北京第一次印刷
1—20,000
定價3,600元

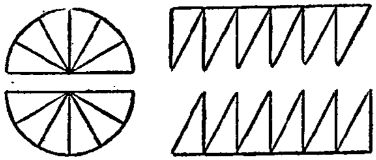
中學數學教學法第四冊目次

第一章　中學幾何課的一般內容

§1. 幾何科學發展的三個階段

幾何科學發展的第一個階段可以用‘累積各個事實並且企圖建立起各個事實間的聯繫’來描述其特徵，這些事實是日常生活上或國家所需要的，並且有着直接實用價值的，首先是長度，面積，體積的度量。正如可以想像到的，這種各個事實的累積，是發生在各處的，只要這裏有人類文化的成長。但是，關於它的比較確定的史料，我們可以在三個國家中找到，即巴比倫、埃及、印度。下面是摘錄自埃夫皆墨·羅篤斯基(Эвдем Родоский 紀元前四——三世紀)所寫的第一個關於數學史的文集中的話：‘因爲，在這裏我們必須論述科學和藝術的起源，依據足够多的證據，我們可以宣稱，幾何學是埃及人所發現的，並且是發生於土地的測量。這種測量是他們所必需的，因爲尼羅河的泛濫時常淹沒了土地的界限。沒有任何可懷疑的，這種科學，和其他科學一樣，是發生於人類的需要’(參考[IV,306])。埃及人建立起許多實際的規則，這些規則有些是正確的，例如，可以利用3, 4, 5爲邊作三角形以得出直角來。然而，也有些僅僅是近似的，例如，利用圓的直徑的$\frac{8}{9}$倍爲邊的正方形面積以計算圓的面積，這時，得到圓面積的值爲$\frac{256}{81}r^2=3.1604\cdots\cdots r^2$而不是精確值$3.1415\cdots\cdots r^2$。結論的正確性是藉經驗(歸納)的方法建立起來的，利用觀察和測量，並沒有邏輯的證明。但是在幾何發展的這個階段已經出現了企圖建立各個幾何事實間聯繫的嘗試，企圖以已學過的規則爲基礎建立另一個規則。例如，有一個印度的數學家曾經作過這樣的斷言，圓面積等於圓周長的一半乘以半徑，而且附以圖15所表示的圖形，並且在旁邊附以‘請看!’的字樣。計算圓面積本來是比較困難的問題，這樣就變成比較簡單的——計算圓周長的問題，而後者是印度人已經很好解決了的問題：他們知道，每一個圓周長的值，近似地等於其半徑的$\frac{3927}{1250}=3.1416$倍。這裏還沒有邏輯的證明，

能够使新的事實由已建立起的事實導出，但印度數學家畢竟超過了用測量的直接核驗，經常按照近似值的需要性，返回到直覺，返回到人類智慧的特點，這是在好多情形直接地看到了眞理，並沒有邏輯的分析，而是所謂在心中進行試驗。在現在的情形，分割半圓而得出的扇形，是與所指出的鋸齒形有區別的，但是顯然這種差別，當扇形的個數逐漸增大時而逐漸減小，而且當扇形的個數無限增長時，這個差收斂於零。



請看!

圖 15

幾何發展的第一個階段——積累各別事實並且初步嘗試在各個事實間建立起聯繫——可以在好多國家中發現，但是，只是到紀元前四——三世紀，在希臘，幾何的發展才進入了第二個階段，可以用‘把積累的材料系統化’來描述其特徵。

概念(除了不多的幾個基本的以外)獲得了精確性，這種精確性是被用應有的定義來保證的，命題也被區分爲兩類，一類是其眞實性不引起任何懷疑的並且被日常經驗所證實了的(公理)，一類是基於這些公理和以前曾經證明過的命題用邏輯方法導出的(定理)。

幾何發展的第二個階段可以稱之爲‘歐幾里得階段’，是以紀元前三世紀阿歷山大學派的學者、‘幾何原本’的著者歐幾里得爲名的。這裏不來描述‘幾何原本’，讀者從‘幾何基礎’這一學科上將會知道得更詳細的(參考〔IV, 24, 33〕的書或者〔IV, 21〕的文章)，讀者最好當作經典文集來研究‘幾何原本’，這個文集不論是對幾何科學的發展以及對幾何教育均有巨大的影響。

幾何發展的第三個階段，亦即近代的階段，是我們祖國的卓越數學家 H. И. 羅巴曲夫斯基所建立起來的，他發現現實世界的空間形式和關係的研究不僅歸諸唯一已知的歐幾里得幾何學以及關聯於它的歐氏空間的概念，而且也引導到另一些幾何學和另一些空間的概念，首先是後來以羅巴

曲夫斯基命名的幾何學和空間的概念。

關於羅氏的生平、事業和思想可以從〔IV, 3, 30a〕的書中認識。國立技術理論書籍出版社出版了他的五卷全集。這五卷中，頭三卷是關於幾何的(卷一出版於 1947 年卷二出版於 1945 年〔IV, 36〕)。從羅氏的發現開始，幾何科學的發展就變成了不同的幾何的發展，數學和物理的問題導致了對它們的研究。這種發展要求精確地闡明每一種幾何學科的基本原則，每一種幾何學科的公理結構。因此，作為特殊情形，包含在歐幾里得'幾何原本'中的敘述，最後被闡明了，不論採取什麼辦法，它都不能滿足公理結構的要求。現在，這種結構的原則，完全地被闡明了。書〔IV, 30B, 15〕中的敘述，在某種程度上滿足了這些要求，而〔IV, 41〕的文章，部分地滿足了這些要求。然而頭一本書，是很難理解的書，因為它採取了非常一般形式的敘述(n 度幾何學)，第二本書比較容易理解，但僅含着原則方面的敘述，沒有制定詳細的細節。最容易理解的是〔IV, 41〕。在所指出的這些文集中，基本概念和公理的體系被很成功地引導到不多的個數；這樣，在希爾伯特的書中〔IV, 15〕總共有 20 個公理和 8 個基本概念，這些概念是點，直線，平面，點與直線的互相附着，點與平面的互相附着，介乎……之間，線段的合同和角的合同。很多的命題，在通常的敘述中，由於它們是非常簡單的而且是顯然真實的，被採取作為不加證明的，但在公理化敘述中，被用很長的而且很難的議論來證明。例如，'圓心在另一圓上並且通過該圓圓心的圓，與此圓有兩個交點'這個定理，就是這樣的例子。在歐幾里得的書中，這個命題既不在公理體系內，也沒有這樣的定理，但在證明他自己的頭幾個定理中已經用上了它，例如，斷言在任意線段上可以作等邊三角形這個命題中。在公理化敘述中，這個命題的證明，除了引用所有其他公理以外，還應用了連續公理。事實上如果圓周不具有連續性，像上面所述那樣兩個圓，很可能沒有交點。

在〔IV, 10〕的文章中，企圖使得一度空間歐氏幾何的公理化敘述通俗化。在〔IV, 11〕的書中含有預定為中學教師用的整個歐氏幾何的公理化敘述。

幾何學在其發展的三個階段中，具有非常不同的特色。在第一階段

中，它主要是經驗的科學，幾何的方法與物理學和天文學的方法很少不同之處。在第二階段中，幾何的經驗基礎變得非常狹小了，邏輯議論代替了作圖和測量，變成了首要地位，然而，仍時常藉諸直覺，藉諸幾何形象'顯然的'性質，例如在平面上所畫的自身不交叉的閉曲線，分平面爲內外兩部分；分析這些作爲進行議論基礎的基本概念的性質，遠不是完全的。在第三階段中，又重新擴張經驗的基礎，而且發現對於物理學和天文學有密切的聯繫；與歐氏幾何並立地，又出現了其他一些幾何學；在每一種幾何學中公理的個數達到了最小的限度，而且在公理的表上僅留下這些利用其他公理不可能證明的公理。所有其餘的命題都以公理和以前證明過的定理爲基礎來證明，在證明中不能允許歸結爲直觀、藉諸顯然的性質。這樣的一些概念，例如'在……之內'，'在……之外'，'介乎……之間'，'在……的一邊'，'在……的不同兩邊'等等，已經不再認爲是對於每個人都顯然的、用不着解釋的概念了：其中有些是算作基本概念的數目內的，例如'介乎……之間'的概念，而且這個概念的內容是藉專設的公理來揭露的，而其它的概念是用已有的概念（基本的和被定義過的）來定義的。

§2. 中學學習幾何的目的

在學校中學習幾何的基本目的在於掌握這門科學的基礎。但在前面所講過的幾何發展的三個階段中，學校的幾何課應注意哪一階段呢？非常希望宣稱中學學習幾何的目的在於掌握它的高等的、最近代的形式，掌握公理化幾何。然而由於它的複雜性和難於接受性，在現在希望完成這個目的是不可能的；'把希爾伯特的初等幾何學的公理以及公理的方法直接帶入學校教育中是非常不恰當的'（參考〔IV, 21〕, § 14）。在十年級爲了學習幾何，嘗試制定不多的一章，用公理化精神來敍述將是很有興趣的，而且是大有教益的，但是，可以使得學生得到關於公理化方法的觀念的具體材料，到現在爲止，仍未完成。沒有任何可懷疑的，中學學習的幾何學應該以幾何發展的第二階段，歐幾里得階段爲對象。但是掌握它仍然遇到嚴重的困難。首先應該很好掌握大量的幾何事實，獲得關於最重要的幾何形象清楚的觀念，掌握相應的術語。僅當合乎幾何發展第一階段的

要求做了這些預備工作以後，才可以有成效地進入幾何發展第二階段(歐幾里得階段)的學習。由此看來，在學習基本課(系統的課)以前，應該學習實驗幾何(預備的課)。現在實行的教學計劃上並未規定學習這樣的課，但算術課的教學大綱上含有不少屬於幾何部分的章節。在小學中應該學習長度的度量，直線段和折線段的測量，直角，鈍角，銳角，以及它們的作圖，利用圓規和直尺作平行線，作矩形和正方形，面積的度量，長方體和正方體，體積的度量。五年級算術教學大綱上屬於幾何的，有下面幾條：'解答計算直線形周界的習題，計算正方形和矩形面積的習題，計算正方體和長方體體積的習題'；'計算正方體和長方體表面積，平行四邊形和三角形面積和圓柱的體積'。這裏，合乎幾何發展的第一階段的要求，亦即以觀察和測量爲基礎，學完了所有這些材料以後，在正確的提法下，學生就已得到對這些材料進一步邏輯加工的要求，而且爲它做了足够的準備。另一方面的事也有着主要意義。在幾何基本課中，許多具有實際性質的問題，例如，面積、體積的測量，圓周長的計算，遠未按照實際的需要而放入課程中(例如，面積在八年級教學大綱中)，而在七年制中學畢業後就要參加實際工作的這些青年人，並沒有學到這些問題。因此，對於小學和五年級算術教學大綱中規定着的幾何預備知識課中的這些問題，保證使學生獲得完全有價值的知識和技能，是十分重要的。

學習幾何，有它的教養目的，包括着掌握幾何基本課的實際材料以及它的邏輯展布的方法，這還是從幾何發展的歐幾里得階段就保有的，學習幾何，同時也有它的教育目的，發展學生的邏輯習慣和他們的空間想像力。教學計劃上的任何一個學科，都有教會學生正確議論的職責，但是，沒有任何一個學科，像幾何這樣，在教會學生正確議論中，佔有如此重大的地位。在學習幾何時，學生學會正確地下定義，正確地將概念進行分類，在每一個命題中區別出條件和結論，區別出正命題，逆命題，對命題，逆對命題，理解它們的相互關係，建立充分和必要的條件，利用各種證明的方法等等。

然而，在學習幾何發展的歐幾里得階段的時候，邏輯的統治地位，遠不是獨一無二的。與公理化的敍述不同，在那裏直觀形象沒有任何價

值，而在這裏，每一個議論是基於幾何的直觀形象來進行的，而且在學習幾何課的過程中，學生發展整個愈來愈複雜的幾何元素的想像能力。在一開始，學生以圖形和模型獲得這些形象，學生運用想像力使得圖形和模型逐漸達到完善的地步，轉向沒有大小的點，沒有寬窄的線，沒有厚薄的面等等。進一步，這種所謂‘智力的視覺’的能力完全鞏固，對圖形和模型的需要逐漸減小，逐漸地對於滿足所給條件的比較複雜的幾何形象產生更淸晰的想像力。這種能力在學習力學、天文、物理以及大多數的技術科目時，是有巨大價值的。因此，發展空間想像力永遠認爲是中學學習幾何課的最重要目的之一。

在掌握幾何科學的理論內容時，學生也應該理解它們的實際應用，在整個學習的過程中，不斷地練習應用它們。這樣可以保證更好地掌握許多細節和提高對工作的興趣。

現行中學數學教學大綱的‘說明’部分寫道，‘幾何的教學目的在於藉系統的研究平面上及空間內幾何圖形性質的方法，發展學生空間的想像力，並且應用這些知識去解決計算及作圖問題，發展學生的邏輯思維，以及應用獲得的知識去完成實際工作的能力：地面測量，確定各種建築物的表面積和體積，以及最簡單的測量等等’。

協調地發展這三方面——發展空間想像力，發展邏輯思維，獲得實際應用的技能，是學習幾何課有成效的保證。

爲了工作有成效，在六年級的工作是非常重要的，以便使得學生掌握教學大綱中所規定的這些不多的幾何知識和技能。在六年級開始上幾何課時，應該檢查學生實際具有的這些知識和技能，如果發現有缺點的話，應該加以補充。這一部分工作所佔用的時間，可以用以後所數裕出的時間補上，因爲，更好地掌握本課的邏輯方面有賴於它。

§3. 中學幾何課的內容

學習幾何理論歸結爲學習一系列的空間形象的性質，從最簡單的——點，直線，線段等等開始。教師務必使得學生對於這些形象獲得鮮明的、淸晰的觀念：指出環繞在我們周圍的實際物質的這些形象，製作或

多或少接近於這些形象的圖形和模型，闡明由具體物質的性質逐漸抽象化的過程，以便使得學生獲得現代幾何的形象。與得到關於幾何元素的直觀觀念的同時，也揭露相應概念的內容，一些基本的概念是藉公理來討論的，即利用公理間接定義，其餘一些概念是藉定義來討論的。拉緊了的線，或者從一個小孔射入的光線，或者折疊一張紙所成的線，給出直線的觀念；玩具矛頭的尖或者鉛筆尖，或者這些尖端與紙接觸所成的影子給出點的觀念。這裏必須闡明由這些近似的觀念轉變成確切的幾何元素的過程。分析這些公理，例如，兩點決定一直線，直線兩端均可無限延長等可以幫助獲得關於幾何的直線和點的正確觀念。所有基本概念的定義應該滿足第一篇 §5 所說過的那些要求。務必使得學生對於所應用的術語都能說出確切的意義，會正確的描述定義，能够引進一些適合於定義的例子，也能够指出一些事物，由於不能滿足某一條而不適合定義的例子。

認識用來建立這些幾何概念的性質的幾何命題、公理、定理是與學習幾何概念同時進行的。時常發生這樣情形，學生企圖理解某個證明，或者學會這個証明，但是還不清晰地知道這個命題的內容。應該首先保證正確理解每一個命題，會區分命題的條件和題斷，理解所有附加限語的必要性。理解已知命題對於某種實際目的的價值通常是用解題來保證的。這類習題的解答一般的都是放在命題的證明以後，但是，也有時開始就解答這類習題，而把邏輯的證明放在以後。經驗指出，理解某個幾何性質的實際價值，可以更好地掌握表示這個性質的命題，而且由此更便於學習邏輯的證明。例如，輪到學習關於三邊相等則兩三角形全等的定理之前，命學生在家中利用米突尺和圓規作邊長為 5, 6, 7 厘米的三角形和邊長為 5, 6, 7, 8 厘米的四邊形，作在紙上或者紙板上，然後剪下，到班上以後把自己所做的圖形和其他同學互相比較，那麼學生將會注意到三邊確定則三角形唯一確定這個事實，而四邊形則沒有此性質，即四邊確定四邊形非唯一確定，這樣對於邏輯的證明將帶來很大方便。如果給學生們看用鉸鏈連結的三角形和四邊形的模型，也將得到清晰的觀念。

當完全理解了幾何命題的內容以後，如果這個命題不是某個公理，那麼就可着手邏輯的（演繹的）證明。如果對命題的正確性產生懷疑，並且

會提出一些問題，那是很好的。例如，希望證明關於兩直線平行的定理，在這兩條直線被某一直線所截同位角相等的條件下，從回憶用圓規直尺作平行線的方法開始，這個方法是學生在小學就應該掌握的（如果未曾掌握，那麼應該現在指給他們這個方法），描述定理並且提出問題，是否可以圖形為基礎證實這兩條直線無論如何延長永不相交？本來，延長直線可以延長一米，也可以延長一公里，也可以延長一百公里，是否可以證實實際永不相交？討論教室前面的牆和兩側的牆相交所組成的直線是合適的。牆是沿着懸一重物下垂的線砌成的，因此，這兩條線都是與地面垂直的鉛垂線。它們是否平行？按照最初的印象，所有人都給出肯定的回答，但是，必須指出‘鉛垂線’的確切意義：這是通過地球中心的直線，因此所有鉛垂線都是相交的。

引起了證明的需要以後，就來滿足它，導入必須引用的公理和以前學過的定理，也提到必須利用的術語的定義。關於證明的教學法在第一篇§7已經談過，這裏僅指出給與初學者有較大幫助的，區分長的議論為各個要點，這樣很容易分析證明，以及便於記入筆記本內。下面的區分是上述關於平行線特徵的定理證明的大致寫法：

題設：

1）直線 a, b 和直線 c 相交於 A, B 點（圖 16）；

2）同位角 1 與 2 相等。

題斷：　直線 a, b 平行。

證明：

1. 假設 a 不平行於 b，那麼 a, b 或者相交於右邊的 E 點，或者相交於左邊的 D 點（按照定義：如果兩直線位於同平面上且無論怎麼延長都不相交，則兩直線平行）。

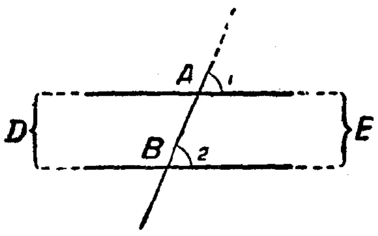


圖 16

2. 假設 a, b 相交於右邊 E 點，我們得 $\triangle ABE$，$\angle 2$ 是這個三角形的一個內角，而 $\angle 1$ 是與 $\angle 2$ 不相鄰的外角。

3. $\angle 1 > \angle 2$（按照定理：外角大

於……)

4. 第 3 條的結論與題設$\angle 1=\angle 2$矛盾；這個矛盾證明a, b相交於E點的假設是不正確的。

5. 假設a, b相交於左邊D點，同樣證明與題設矛盾。

6. 因此，a不可能與b相交，而且又與b位於同一平面，故$a \parallel b$。

在學校幾何課的內容裏絕對不能列舉出所有定義、公理和定理；關於這個課，應該解答三種類型的許多習題——計算題，作圖題，證明題。學習幾何課，僅當對於這門課的每一章節都賦予很多時間解答習題的條件下，才是完全有價值的，然而，可惜的是，在幾何教育的實踐中，學生對於幾何習題所賦予的重視，比起一般的算術、代數、三角習題都要小得多。教師時常說，幾乎是學習幾何的全部時間都放在學習定理方面，以致解題的時間不够用。但是，被認爲標準的，應該是用學習幾何課的$\frac{1}{3}$或者一半的時間去解答幾何習題。

計算題大多數情形是用幾何材料構成的算術和代數習題；不可輕視它們，但是，本質上它們更多的應屬於這兩個學科，而且可以鞏固算術計算的技能(近似計算!)，鞏固代數練習中的恆等變換的技能，鞏固布列和解答方程的技能。幾何的作用通常歸結爲，引起解答習題所必要的公式，但是討論圖形，說明已知的和所求的元素，回憶關聯到的定理，引進補助線——所有這些，當然，主要地幫助更好地闡明和更進一步的鞏固幾何材料。

作圖題完全是屬於幾何的。在其中直觀的幾何形象和邏輯議論非常有價值地結合着，而且是利用學生自己作圖來完成這種結合，這時的邏輯議論並不是像通常學習定理那樣，給出現成的形式。作圖題應該在整個學習幾何的過程中都給與學生，而且，無論如何務必使得學生掌握獨立解答這類習題的技能。應該注意解答作圖題的四個步驟：分析，即尋求解法的途徑；作圖，即實際利用作圖儀器實行作圖；證明，即証明所作的圖形滿足題設的條件；推究，即研究解法可能出現的種種情形。解答作圖題時，學生由學習現成的材料進入應用這些現成的材料於簡單的獨立工作，甚至可以當作最簡的數學創作的形象，因此，解答這類習題，能够有助於更進一步地掌握課程。對於同一個問題，用計算法解，又用作圖法解，並且

說明每一種解法的優缺點，能够產生很大的益處，在以後的敍述裏，我們將討論這樣的同一問題的雙重解法的例子。

證明題在學校實踐中被利用着，可惜比作圖題還少些。應該使得學生由背誦現成的證明轉到理解證明的方法以及會應用這些方法。會解答即使是不複雜的證明題的學生，已經不需要記憶教科書上所寫的定理證明的細節：體會了證明的精神以後，用一兩句話就能描述出證明的‘關鍵’，由這些，自己就會獨立地寫出細節來。

尋求軌跡的習題，佔有特殊重要的地位，它既能發展直觀想像的能力，又能發展邏輯思維的能力：解答這類習題，必須猜想具有所指出的性質的所有點是如何分佈，它們組成什麼樣的圖形，然後進行證明：第一，這個圖形上的所有點，誠然具有所指出的性質；第二，所有具有所指出的性質的點，均在此圖形上。求軌跡的習題，本質上是證明題，但是，應該證明的命題不是給出現成的形式，而是必須先求出它來，解答這樣習題的，是非常有價值的。

§4. 幾何教學的直觀性

頭一次認識幾何形象自然是以討論環繞於我們周圍的或多或少與此形象相接近的事物爲基礎的，因而在中學低年級每一種幾何元素的學習應該從指出現實世界的這種元素的事物開始，從指出可以方便地觀察這種元素的專門的幾何教具開始，從學習表示這種元素的圖形和模型開始。逐漸的學生就獲得足够清楚地想像幾何元素的能力，至少是幾何元素中的最簡單者，能够在‘心中’看見它們，獲得正確的判斷物體性質的能力，而不必要把這個物體擺在眼前，逐漸地產生‘抽象思維’。直觀性在幾何教學的初步階段有着首要的意義。如果不使兒童注意到他們在教室內，街上，家裏所見到的圓，那麼將不能保證他們認識圓；組織他們發現這些圓的競賽，也是很好的：誰能指出我們看到的最大圓？最小圓？在認識圓的事情上，第二步是用各種方法作圓：將圓柱的底放在紙上，用筆繞着轉一圈，用現成的圓規在紙上畫圓，用各種各樣的圓規代用品，例如，用一節細繩和兩根釘子，將一個釘子釘在地上，另一個釘子就可在地上畫出一個

起來。學生的年齡愈大，那麼應用直觀教具的價值也就愈小，抽象思維的功用就愈大，但是畫圖在中學幾何課的任何階段都應該用的，它能顯著地幫助掌握每一個問題。

在第一篇 §20 關於一般數學教學上應用直觀性原則的一般內容，已經敘述過，這裏，我們以下面的作爲補充。

一般公認地將幾何劃分爲平面幾何和立體幾何，這對於先學習簡單問題，後學習比較複雜的和困難的問題來說是必要的，但是，這種劃分，有顯著程度人爲的性質：我們生活在三度空間裏，不論是平面上（二度空間）的幾何形象，還是一度空間的幾何形象，都是作爲某種抽象化的結果才能得到的；例如，就以關於圓來說，我們說圓柱形洋鐵罐的底是圓，這時，我們僅集中注意於洋鐵罐的一部分，把它孤立開來看，但是我們有的仍然是一個圓柱，不過它的高（與半徑相比較）非常小而已！這種三度空間形象的第一性的性質和二度空間的和一度空間的形象的第二性的性質使得人們產生了拒絕人爲的劃分幾何爲平面的和立體的思想，並且產生了連合的學習它們的思想。由此，在幾何教學法的整個過程中，'混合主義'（Фузионизм，導源於拉丁文 Фузио，意即混合）在學習幾何的開頭階段值得我們特別注意，這時是把保證學生有較豐富的正確的、清楚的、能够持久記憶的直觀觀念的習題，放在第一位（例如參考，書〔IV, 34〕）。

現行的中學數學教學大綱中，在不多的幾何預備知識的課中，實行着混合主義，這是包括在小學和中學五年級的算術課中。例如，在'小數'這一章（五年級算術教學大綱）我們找到下面一條：'解答具有幾何內容的習題：計算圓周長，圓的面積，圓柱的表面積和體積'。但在以後的學年中，處理直觀教具時，我們應該强調指出，一度空間的和二度空間的形象是抽象化的結果，是從許多物體中抽出來的，而避免討論關於整個的物體。

由學生自己來製作直觀教具，比買現成的，有更大的價值，雖然不如買來的好。在幾何中有許多概念，很容易用自己製造的直觀教具來解釋。每一個學生應該擁有很好的刻有厘米和毫米的直尺，但是，除此以外，應讓他們每人自製有半厘米分度的直尺，折疊一張練習簿上的紙即可。讓每一個學生用摺紙的辦法作出直角，但也不要認爲這樣就不必要再有一個很好的工廠製的三角板。自己製作分度器和圓規是比較困難的，但是這樣的工作仍然應該介紹給學生做的：製作了或多或少是粗糙的分度器

和圓規以後，即使分度器是照着現成的描下來的，圓規僅能作固定半徑的圓，學生就會很好地估價工廠製造的儀器的優點，而很好地對待它了。

無論是自然的直觀教具，還是人工製的，自做的還是買來的，在五至七年級應用，越多越好。直觀教具的進一步價值逐漸降低，但在幾何課的一定問題上，甚至在中學最後一年級，利用直觀教具，仍然是非常有價值的，例如，多面體和球的模型。圖形和各種各類的測量，在中學任何年級，都保有其價值。

關於地面測量的工作是值得特別提到的；幾何學就是曾經由其中成長出來的，這些工作在現在仍然有其首要的實際意義。有許多是可以很有成效地在學校幾何課的條件下實行的。關於它們，在以後的某些節中將要述及，這裏介紹給讀者〔IV，26a〕的書和〔IV，26б，14〕的文章，從其中教師可以得到爲組織這些工作所必要的最低限度的知識。

§5. 幾何的教學文獻

現在我們中學的幾何課是按照基雪遼夫的教科書進行的，這個課本，初版印行於1882年，在革命前的俄羅斯學校中，得到了最廣泛地流行。在蘇維埃學校，這個課本，曾經暫時被 Ю.О. 顧勒維茨和 Р.В. 岡格路斯的‘幾何系統教程’所代替，但從1938年起，又恢復了它的地位。這些事實說明了這本書的優點，但畢竟遠不是毫無缺點的。對於初學者來說，六年級的基本課是太困難了，而對於高年級來說，本來有可能利用接近於近代觀點和嚴格地敍述，可惜在這本書中未能如此做，這是這本書的缺點。這本書的各個缺點，關於這些是教師首先應該知道的，將要在以後敍述的相應地方，加以指出。

在1938年，當基雪遼夫的教科書重新出版時，就已經公認中學需要新的幾何教科書，而且這樣的教科書在偉大的衛國戰爭年代出版了。這就是 Н. А. 格拉哥列夫的‘初等幾何學’，這本書分成兩卷出版（爲六——八年級用的平面幾何，及九——十年級用的立體幾何）。這本書有一系列的無可懷疑的優點，但是關於它可以更合適地代替基雪遼夫教科書的判斷，尙不可能作出，因爲，關於這本書的教學工作，尙無足够的經驗。在1946年‘數學教學法’雜誌的第一卷曾載有關於這本書的評論。

從很多的老的幾何教科書中，我們僅指出 А. Ю. 大尉道夫的‘初等幾