

193353

中学数学提要

长沙市一中数学组编

湖南人民出版社

编写说明

一、本书主要是为中学生和广大知识青年系统复习初等数学而编写的，其中的某些内容对中学数学教师亦有参考价值。为此，我们对于数学的基本概念和基础理论，以及各单元的知识都作了简要概括与阐述，同时为了提高读者分析问题和解决问题的能力，编撰了一定数量的范例和习题。

二、本书是由我组的曾宪侯、余泽平、任远志、黎有为、陈述商五位同志共同编写的，最后由曾宪侯、任远志二同志审定。由于我们水平有限，加上时间仓促，难免有错误，请读者批评指正。

此书在修改过程中，得到了欧阳禄、肖果能二同志的帮助，特表谢意。

19

长沙市第一中学数学组

1978年3月

目 录

代 数 部 分

第一单元 数..... (1)

§ 1. 数的概念的扩展 (1)

§ 2. 各种数集的性质 (3) 习题 (13)

第二单元 代数式的恒等变形..... (15)

§ 3. 代数式 (16) § 4. 有理整式(多项式) (17)

§ 5. 分式 (28) § 6. 根式 (35) § 7. 有理指数的
幂 (41) 习题 (48)

第三单元 方程和方程组..... (51)

§ 8. 关于方程的一般知识 (51) § 9. 一元有理整方
程 (53) § 10. 一元分式方程 (55) § 11. 一元

根式方程 (即一元无理方程)(60) 12. 关于方程组的
一般知识 (63) § 13. 一次方程组 (65) § 14.

二元二次方程组 (68) § 15. 能用除法以求解的二元
高次方程组 (74) § 16. 二元对称方程组 (76) 习

题 (91)

第四单元 不等式..... (95)

§ 17. 不等式的定义与不等式的有关名称 (95) § 18. 不
等式的建立基础与不等式的基本性质 (97) § 19. 两个

数的绝对值的和、差、积、商 (98) § 20. 不等式的
证明 (99) § 21. 同解不等式的定义及其主要定

理 (100) 22. 不等式及不等式组的解法 (101) § 23.
用不等式求某些代数式的最大值或最小值 (104)
习题 (117)

第五单元 函数…………… (122)

§ 24. 函数的基本概念 (123) § 25. 一些最简单的函
数的性质和图象 (130) § 26. 反函数 (136)
§ 27. 幂函数 (138) 习题 (147)

第六单元 指数函数和对数函数…………… (150)

§ 28. 指数与对数 (150) § 29. 指数函数与对数函
数 (153) § 30. 常用对数 (155) § 31. 指数方程
与对数方程 (156) 习题 (164)

第七单元 数列、极限、数学归纳法…………… (167)

§ 32. 数列 (167) § 33. 等差数列与等比数列 (169)
§ 34. 极限 (171) § 35. 无穷递缩等比数列 (172)
§ 36. 数学归纳法 (172) 习题 (183)

第八单元 排列、组合、二项式定理…………… (187)

§ 37. 乘法定理 (排列、组合中的基本定理) (187)
§ 38. 排列与组合 (188) § 39. 二项式定理 (190)
习题 (198)

第九单元 复数…………… (201)

§ 40. 基本概念与定义 (201) § 41. 复数的几何表示
法与复数的三角函数式 (208) § 42. 复数运算的几何
解释、棣美弗定理 (211) 习题 (222)

第十单元 高次方程的初步知识…………… (225)

§ 43. 一元 n 次方程的一般形式 (225) § 44. 综合除

法 (226) § 45. 余数定理及其推论 (228) § 46. 高次方程的根 (231) 习题 (245)

平面三角部分

第一单元 任意角的三角函数…………… (248)

§ 1. 角的概念的推广 (248) § 2. 任意角的三角函数 (250) § 3. 同角三角函数的关系 (253) § 4. 诱导公式 (258) § 5. 三角函数的图象和性质 (261) 习题 (270)

第二单元 复角的三角函数…………… (273)

§ 6. 和(差)角公式 (加法定理)(273) § 7. 二倍角公式、半角公式 (276) § 8. 三角函数的和、差与积的互化 (280) 习题 (293)

第三单元 解三角形…………… (297)

§ 9. 解直角三角形 (297) § 10. 正弦定理与余弦定理 (298) § 11. 解任意三角形 (300) § 12. 三角形的面积公式 (303) § 13. 解三角形的实际应用 (304) 习题 (313)

第四单元 反三角函数和三角方程…………… (316)

§ 14. 反三角函数 (316) § 15. 最简三角方程的解法 (320) § 16. 几种类型的仅含一个未知数的三角方程的解法 (321) § 17. 关于增根和遗根 (331) 习题 (339)

平面几何部分

第一单元 几何基础知识…………… (341)

- § 1. 几何命题(341) § 2. 直线、射线、线段与角(346)
§ 3. 相交线与平行线 (347) 习题 (349)

第二单元 三角形…………… (352)

- § 4. 三角形内角和定理及其推论 (352) § 5. 三角形的分类 (352)
§ 6. 三角形中的主要线段 (353)
§ 7. 等腰三角形 (354) § 8. 直角三角形 (355)
§ 9. 全等三角形 (356) § 10. 三角形边角不等关系 (356)
习题 (362)

第三单元 特殊四边形…………… (364)

- § 11. 平行四边形 (364) § 12. 矩形 (365) § 13. 菱形 (365)
§ 14. 正方形(365) § 15. 梯形(366)
习题 (370)

第四单元 相似形…………… (371)

- § 16. 成比例的线段 (371) § 17. 相似形 (372)
§ 18. 位似形 (373) 习题 (379)

第五单元 圆及圆的内接形与外切形…………… (382)

- § 19. 圆的基本性质 (382) § 20. 圆的切线 (382)
§ 21. 与圆有关的角 (383) § 22. 与圆有关的比例线段 (384)
§ 23. 与圆有关的多边形 (386) § 24. 两圆相切、相交、外离时的性质 (387)
习题 (392)

第六单元 多边形与扇形、弓形的面积…………… (399)

- § 25. 多边形面积的计算 (399) § 26. 两三角形面积之比 (400)
§ 27. 圆、扇形、弓形的面积计算 (400)
习题 (404)

第七单元 轨迹与作图…………… (407)

- § 28. 轨迹 (407) § 29. 作图 (408) 习题 (415)
附录: 综合几何证题的常用方法…………… (418)
综合范例…………… (424)

立体几何部分

第一单元 直线和平面…………… (436)

- § 1. 平面 (436) § 2. 两直线的位置关系 (437)
§ 3. 直线和平面的位置关系 (438) § 4. 平面和平面的位置关系 (440) 习题 (447)

第二单元 柱、锥、台…………… (449)

- § 5. 柱 (449) § 6. 锥 (450) § 7. 台 (452)
习题 (459)

第三单元 球…………… (461)

- § 8. 球面、球冠、球带 (461) § 9. 球、球扇形、球缺 (462) 习题 (466)

平面解析几何部分

第一单元 直角坐标系、曲线和方程…………… (469)

§1. 平面直角坐标系(469) §2. 两点间的距离(470)

§3. 线段的定比分点(470) §4. 曲线和方程(473)

习题(476)

第二单元 向量..... (478)

§5. 向量(478) §6. 向量的加法(479) §7. 向

量的减法(480) §8. 向量与数相乘(481)

习题(483)

第三单元 直线..... (484)

§9. 直线(484) §10. 直线型的经验公式(490)

习题(500)

第四单元 二次曲线..... (503)

§11. 圆(503) §12. 椭圆(504) §13. 双曲

线(505) §14. 抛物线(506) 习题(519)

第五单元 坐标变换..... (523)

§15. 坐标轴的平移(523) §16. 坐标轴的旋转(524)

§17. 二元二次方程的化简(526) 习题(533)

第六单元 极坐标..... (535)

§18. 极坐标系(535) §19. 极坐标和直角坐标的互

换(536) §20. 等速螺线(537) §21. 圆锥曲线的

极坐标方程(537) 习题(542)

第七单元 参数方程..... (545)

§22. 参数方程(545) §23. 摆线及其方程(545)

§24. 渐开线及其方程(546) 习题(551)

代数部分

第一单元 数

数的概念是数学里最重要的概念之一。学习数学，首先就要求我们能够正确地掌握数的概念和数的一些重要性质，并且能够熟练地进行数的运算。

数的概念是从人类生产活动的需要中，逐渐形成并且逐步扩展的。我们必须明确：为什么需要不断地引进新数，把原有的数集加以扩展？数集的扩展应该遵守哪些基本原则？

从自然数扩展到有理数集的过程以及有理数的运算，在初中阶段早就应该熟悉了，我们今天应着重复习无理数的概念、实数集的性质以及实数的运算；至于复数这一内容则由于近十年来在中学数学课本里被砍掉了，致使目前的绝大部分中学生对于复数感到陌生，因此不可能以复习的方式把复数安排在本单元，只宜把复数连同二项式定理等*教学大纲所要求补授的内容，编在代数部分的最后几个单元，以便进行较详尽的阐述。

§1. 数的概念的扩展 数产生于数数和测量，早在人类社会的最初阶段，由于计数和测量的需要，便开始形成了自然数的初步概念。后来由于对事物集合的进一步认识，并引进了数

*《教育部1977年颁发的中学数学教学大纲》(草案)

字符号,才使人们对自然数的认识来了一个飞跃。这样,抽象的数(指自然数)的概念才正式形成了。

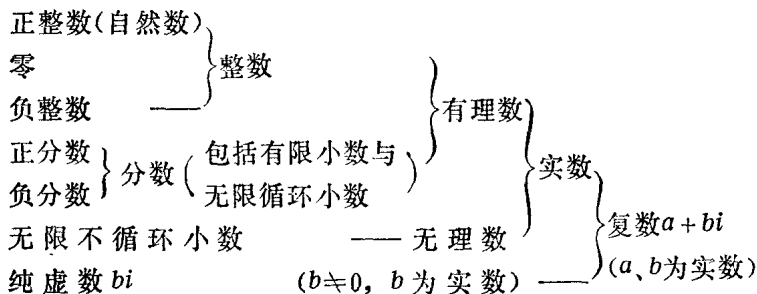
随着人类社会的发展,人们对客观世界存在的量的认识,也就不断深刻。比方测量物体的长度的时候,人们发现所选用的计量单位,一般不能在被测的量上恰巧置放整数次,对于这类量仅仅用自然数就不能精确地加以表示,为了解决这个问题,就需要把测量单位加以细分,这样,新的数——正分数就产生了。

应该认识,新数的引进,不仅仅是由于实际测量的需要,而且也是由于数学本身的需要。比方在自然数的集合里,除法运算并不是永远可以实施的,也就是说,在自然数集里,方程 $ax=b$ (这里 a 、 b 是自然数) 并不总是有解的。正分数的引进解决了这个矛盾,由此也就提供了解决实际问题的新的工具。

数的概念的进一步扩展也是如此。例如负数和无理数的引进,也同样是为了解决实际问题 and 数学本身的需要。至于虚数的引进,则与前几次在性质上有所不同,它首先是由于数学本身的需要:为了解决负数开偶次方的问题,就必须引进一种新数,把数集加以扩充。但是这种新数却不能解释为直接计数或测量的结果,人们便称它为虚数,意即虚幻的数。直到17世纪末,复数的几何表示法出现了,虚数得到了具体的解释,并在实际问题中得到了广泛的运用之后,这种新数(虚数)才被人们承认。

从以上简短的介绍中,可知数集是逐步扩展的。同时也必须认识:数的概念是交错地产生并交错地发展的。例如,“零”被作为一个整数引入数的系统却还后于正分数的引进;当人们

尚未完全认识负数的时候，就早已有了无理数的概念；在实数理论还没有系统地建立之前，就已经产生了虚数的概念；事实上，实数理论的建立，比起复数理论的建立还要迟一些。我们今天只宜就数学本身的系统性与科学性来学习数的概念与理论。根据这个原则，我们把数的概念的发展列为下表：



应提醒读者注意的是：数集的扩张一般应遵守以下的原则：

(1) 增添了新的元素；

(2) 新旧元素在一起构成新的数集。在新的数集里，定义一些基本关系和运算法则，使原有的一些主要性质如运算律、顺序律等仍旧能够适用（只有在整个复数集内涉及到虚数时，顺序律才不适用）；

(3) 旧元素作为新数集里的元素时，原有的运算关系仍旧保持；

(4) 新数集解决了旧数集所不能解决的矛盾。

§ 2. 各种数集的性质

1、整数集（整数环） 全体整数的集合叫做整数集。它

具有以下性质：

(1) 满足下面的顺序律：

(i) 对于任意的两个整数 a 和 b ，

$a > b$ ， $a = b$ ，或者 $a < b$ ，

三种关系中必有、且只有一种成立。

(ii) 对于任一整数 a ，总有 $a = a$ (相等的反射性)。

(iii) 如果 $a = b$ ， $b = c$ ，那末 $a = c$ (相等的传递性)。

(iv) 如果 $a > b$ ，那么 $b < a$ ；如果 $a < b$ ，那末 $b > a$ (不等的对逆性)。

(v) 如果 $a > b$ ， $b > c$ ，那末 $a > c$ (不等的传递性)。

(2) 在整数集合内，加、减、乘三种运算永远可以单值地实施，并且满足以下的基本运算定律：

(i) 加法的交换律 $a + b = b + a$ ；

(ii) 加法的结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ ；

(iii) 乘法的交换律 $a \cdot b = b \cdot a$ ；

(iv) 乘法的结合律 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ；

(v) 乘法对加法的分配律 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 。

(3) 在整数集内，乘法的逆运算即除法并不是总可以实施的。

(4) 任意两个不相等的整数 a 与 b 之间，只存在有限个整数或根本不存在其他任何整数。这性质叫做整数集的离散性。

附注：如果一个数集内的数，经过某种运算后能得到唯一的结果，并且所得结果的数仍然属于原数集，那么就称这种运算在这个数集内可以单值地实施。如果在一个数集内，永远

可以单值地实施加法、乘法以及减法运算，那末这个数集叫做一个环。因为整数集具备环的性质，所以整数集也被称为整数环。如果在一个数集内，永远可以单值地实施加、减、乘、除（零不作除数）四种运算，那末这个数集叫做一个体。

II、有理数集（有理数体） 凡属能化为两整数之比的数都叫做有理数。按这个定义，显然分数是有理数；又任何整数 m 可表为 $\frac{m}{1}$ ，故整数也是有理数（其实应该把整数视为分数的特殊形式）。其次，还必须认识：任何分数总可以化为有限小数或无限循环小数。当分数的分母能表为 $2^m \cdot 5^n$ （ m, n 表自然数或零）的形式时，则这样的分数能化为有限小数；当分母含有 2、5 以外的质因子时，则这样的分数只能化为无限循环小数。反过来，任何一个有限小数或无限循环小数都可以化为分数，故有限小数或无限循环小数是分数的另一形式，因此它们是有理数。

全体有理数的集合叫做有理数集。它满足顺序律和基本运算定律，它在性质上不同于整数集的有以下两点：

(1) 在有理数集内，加、减、乘、除（零不作除数）四种运算都永远可以单值地实施。而在整数集内，则除法并非永可实施。

(2) 任意两个不相等的有理数 a 与 b 之间存在着无穷多个有理数，这叫做有理数集的稠密性。有理数集的这一性质显著地区别于整数集的离散性。

因为有理数集符合体的定义，所以有理数集也被称为有理

数体。

III、实数集(实数体)

1. 实数与实数集的定义 有理数和无理数统称实数。全体实数的集合叫做实数集。

为了使读者深刻理解实数集的性质，就有必要首先阐明无理数的概念：

(1) 无理数的定义 无限不循环小数叫做无理数。一切不尽根如 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ……, $\sqrt[5]{31}$ 等等都能化为无限不循环小数，所以任何不尽根所表示的数都是无理数。但并非只有不尽根才是无理数。例如圆周率 π 和自然对数的底 e 不是不尽根，但它们都可以用无限不循环小数来表示它们的值，因此 π 和 e 都是无理数。

(2) 无理数的近似值 任何无理数永远可以用有限十进小数表示它的近似值，如果用记号 α_n^- 与 α_n^+ 分别表示无理数 α 的精确到第 n 位小数的不足与过剩近似值，则对于任何自然数 n ，永有

$$\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+$$

设 $\alpha = p.q_1q_2\cdots q_n\cdots$ ，其中 p 表 α 的整数部分， q_1 、 q_2 、……表十进数码，则有

$$\alpha_n^- = p.q_1q_2\cdots q_n,$$

$$\alpha_n^+ = p.q_1q_2\cdots q_n + \frac{1}{10^n},$$

很明显，当 n 无限增大时， α_n^- 与 α_n^+ 都无限地迫近于 α 本身，即递增数列 $\{\alpha_n^-\}$ 与递减数列 $\{\alpha_n^+\}$ 都以 α 为其极限。

2. 实数的运算

(1) 实数的四则运算

(i) 两个正实数 α 和 β 相加 (或者相乘), 就是求一个数 γ , 使它大于这两个实数的任何一组不足近似值的和 (或者积), 而小于任何一组过剩近似值的和 (或者积). (如果 α 和 β 中有一个是有理数, 就取其准确值来替代近似值.)

(ii) 两个正实数的减法 (或者除法) 是加法 (或者乘法) 的逆运算.

(iii) 对于负实数的运算, 按着负有理数的同样法则进行.

根据上面的规定, 可知在实数集内, 加、减、乘、除 (零不作除数) 四种运算都永远可以单值地实施, 所以实数集也被称为实数体, 并且基本运算定律和顺序律在实数集内仍然适合.

(2) 实数 α 的乘方和开方

(i) 实数 α 的 n 次方, 就是求 n 个 α 的连乘积.

(ii) 在实数集内, 实数 α 开 n 次方, 就是要求一个实数 x , 使

$$x^n = \alpha.$$

这时 x 叫 α 的 n 次方根.

在实数范围内乘方运算永远可以单值地实施, 但作为乘方的逆运算的开方, 却不是永远可以单值地实施的.

事实上, 负数开偶次方的运算, 在实数集内就不能实施. 我们现在只研究在实数范围内可以开方的那些情况:

(一) 任何一个实数 α (正数、负数或零) 都可以开奇次方 ($2n+1$ 次), 并且所得结果是唯一的:

$$\text{若 } x^{2n+1} = \alpha,$$

则有且只有唯一的 x 适合上式, 这样的 x 记为 $^{2n+1}\sqrt{\alpha}$, 即

$$x = ^{2n+1}\sqrt{\alpha},$$

并且有

$$^{2n+1}\sqrt{\alpha} \begin{cases} > 0 & (\text{如果 } \alpha > 0), \\ = 0 & (\text{如果 } \alpha = 0), \\ < 0 & (\text{如果 } \alpha < 0), \end{cases}$$

以及

$$(^{2n+1}\sqrt{\alpha})^{2n+1} = \alpha.$$

(二) 任何正实数 α 在实数集内可以开偶次 ($2n$ 次) 方, 但所得结果有两个值, 它们互为相反数. 我们规定, 那个正的方根记为 $^{2n}\sqrt{\alpha}$, 负的方根记为 $-^{2n}\sqrt{\alpha}$. 这就是说:

$$\text{若 } x^{2n} = \alpha, \quad \text{则 } x = ^{2n}\sqrt{\alpha},$$

$$\text{或 } x = -^{2n}\sqrt{\alpha},$$

有时把上两式合写为

$$x = \pm ^{2n}\sqrt{\alpha}.$$

要注意的是, 当 $\alpha > 0$ 时,

$$^{2n}\sqrt{\alpha} > 0,$$

$$-^{2n}\sqrt{\alpha} < 0.$$

当然, 还有

$$(\pm ^{2n}\sqrt{\alpha})^{2n} = \alpha.$$

(三) 当 $\alpha = 0$ 时, α 也可以开偶次方, 这时结果仍是唯一的, 它就是零. 因此, 如果

$$x^{2n} = 0,$$

则

$$x = ^{2n}\sqrt{0} = 0.$$

例如：若 $x^2 = 9$ ，则 $x = \sqrt{9} = 3$ ，
或 $x = -\sqrt{9} = -3$ 。

若 $x^4 = 16$ ，则 $x = \sqrt[4]{16} = 2$ ，
或 $x = -\sqrt[4]{16} = -2$ 。

若 $x^2 = 0$ ，则 $x = \sqrt{0} = 0$ ，

若 $x^3 = 0$ ，则 $x = \sqrt[3]{0} = 0$ ，

若 $x^3 = 8$ ，则 $x = \sqrt[3]{8} = 2$ ，

若 $x^3 = -8$ ，则 $x = \sqrt[3]{-8} = -2$ 。

实数的开方运算，呈现了复杂的情况，为了简化它们，在限于实数体内的开方运算中，我们引进了算术根的概念。

非负数的非负方根叫算术根，如果 $\alpha \geq 0$ ，且 $x^n = \alpha$ ，则其算术根记为 $\sqrt[n]{\alpha}$ 。

例如： $\sqrt{9}$ ， $\sqrt[4]{16}$ ， $\sqrt[3]{8}$ 都是算术根， $\sqrt[5]{-32}$ ， $\sqrt[3]{-27}$ 都不是算术根。

一切方根都可用算术根表示。如 9 的两个平方根，一个是算术根 $\sqrt{9}$ ，另一个也可用 $\sqrt{9}$ 来表示成为 $-\sqrt{9}$ 。又如 -32 的五次方根不是算术根，但它可以用 32 的五次算术根 $\sqrt[5]{32}$ 表示成为 $-\sqrt[5]{32}$ 。

为了加深读者对算术根的印像，再举下面几个例题：

例1. 化简下列各式：

$$(1) \frac{\sqrt{a^2}}{a}, \quad (2) \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{解：} (1) \frac{\sqrt{a^2}}{a} = \frac{|a|}{a} = \begin{cases} 1 & (\text{若 } a > 0), \\ -1 & (\text{若 } a < 0), \\ a = 0 \text{ 时无意义.} \end{cases}$$