中学数学提要

长沙市一中数学组编

湖南人民出版社

编写说明

一、本书主要是为中学生和广大知识青年系统复习初等数学而编写的，其中的某些内容对中学数学教师亦有参考价值。为此，我们对于数学的基本概念和基础理论，以及各单元的知识都作了简要概括与阐述，同时为了提高读者分析问题和解决问题的能力，编撰了一定数量的范例和习题。

二、本书是由我组的曾宪侯、余泽平、任远志、黎有为、陈述商五位同志共同编写的，最后由曾宪侯、任远志二同志审定，由于我们水平有限，加上时间仓促，难免有错误，请读者批评指正。

此书在修改过程中，得到了欧阳禄、肖果能二同志的帮助，特表谢意。

19

长沙市第一中学数学组

1978年3月

目　录

代数部分

平面三角部分

平面几何部分

立体几何部分

平面解析几何部分

代数部分

第一单元　数

数的概念是数学里最重要的概念之一。学习数学，首先就要求我们能够正确地掌握数的概念和数的一些重要性质，并且能够熟练地进行数的运算。

数的概念是从人类生产活动的需要中，逐渐形成并且逐步扩展的。我们必须明确：为什么需要不断地引进新数，把原有的数集加以扩展？数集的扩展应该遵守哪些基本原则？

从自然数扩展到有理数集的过程以及有理数的运算，在初中阶段早就应该熟悉了，我们今天应着重复习无理数的概念、实数集的性质以及实数的运算；至于复数这一内容则由于近十年来在中学数学课本里被砍掉了，致使目前的绝大部分中学生对于复数感到陌生，因此不可能以复习的方式把复数安排在本单元，只宜把复数连同二项式定理等*教学大纲所要求补授的内容，编在代数部分的最后几个单元，以便进行较详尽的阐述。

§1. 数的概念的扩展　数产生于数数和测量，早在人类社会的最初阶段，由于计数和测量的需要，便开始形成了自然数的初步概念。后来由于对事物集合的进一步认识，并引进了数

* 《教育部1977年颁发的中学数学教学大纲》(草案)

字符号，才使人们对自然数的认识来了一个飞跃．这样，抽象的数（指自然数）的概念才正式形成了．

随着人类社会的发展，人们对客观世界存在的量的认识，也就不断深刻．比方测量物体的长度的时候，人们发现所选用的计量单位，一般不能在被测的量上恰巧置放整数次，对于这类量仅仅用自然数就不能精确地加以表示．为了解决这个问题，就需要把测量单位加以细分，这样，新的数——正分数就产生了．

应该认识，新数的引进，不仅仅是由于实际测量的需要，而且也是由于数学本身的需要．比方在自然数的集合里，除法运算并不是永远可以实施的，也就是说，在自然数集里，方程 $ax=b$（这里a、b是自然数）并不总是有解的．正分数的引进解决了这个矛盾，由此也就提供了解决实际问题的新的工具．

数的概念的进一步扩展也是如此．例如负数和无理数的引进，也同样是为了解决实际问题和数学本身的需要．至于虚数的引进，则与前几次在性质上有所不同，它首先是由于数学本身的需要：为了解决负数开偶次方的问题，就必须引进一种新数，把数集加以扩充．但是这种新数却不能解释为直接计数或测量的结果，人们便称它为虚数，意即虚幻的数．直到17世纪末，复数的几何表示法出现了，虚数得到了具体的解释，并在实际问题中得到了广泛的运用之后，这种新数（虚数）才被人们承认．

从以上简短的介绍中，可知数集是逐步扩展的．同时也必须认识：数的概念是交错地产生并交错地发展的．例如，“零”被作为一个整数引入数的系统却还后于正分数的引进；当人们

尚未完全认识负数的时候，就早已有了无理数的概念；在实数理论还没有系统地建立之前，就已经产生了虚数的概念；事实上，实数理论的建立，比起复数理论的建立还要迟一些。我们今天只宜就数学本身的系统性与科学性来学习数的概念与理论。根据这个原则，我们把数的概念的发展列为下表：

- 复数 $a+bi$（a、b为实数）
  - 实数
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数（包括有限小数与无限循环小数）
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数 —— 无限不循环小数
  - 纯虚数 bi（$b\neq0$，b为实数）

应提醒读者注意的是：数集的扩张一般应遵守以下的原则：

（1）增添了新的元素；

（2）新旧元素在一起构成新的数集。在新的数集里，定义一些基本关系和运算法则，使原有的一些主要性质如运算律、顺序律等仍旧能够适用（只有在整个复数集内涉及到虚数时，顺序律才不适用）；

（3）旧元素作为新数集里的元素时，原有的运算关系仍旧保持；

（4）新数集解决了旧数集所不能解决的矛盾。

§2. 各种数集的性质

Ⅰ、整数集（整数环） 全体整数的集合叫做整数集。它

具有以下的性质：

(1) 满足下面的顺序律：

(i) 对于任意的两个整数 a 和 b，

$a>b$，$a=b$，或者 $a<b$，

三种关系中必有、且只有一种成立。

(ii) 对于任一整数 a，总有 $a=a$（相等的反射性）。

(iii) 如果 $a=b$，$b=c$，那末 $a=c$（相等的传递性）。

(iV) 如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $a<b$，那末 $b>a$（不等的对逆性）。

(V) 如果 $a>b$，$b>c$，那末 $a>c$（不等的传递性）。

(2) 在整数集合内，加、减、乘三种运算永远可以单值地实施，并且满足以下的基本运算定律：

(i) 加法的交换律 $a+b=b+a$；

(ii) 加法的结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$；

(iii) 乘法的交换律 $a\cdot b=b\cdot a$；

(iV) 乘法的结合律 $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(V) 乘法对加法的分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$。

(3) 在整数集内，乘法的逆运算即除法并不是总可以实施的。

(4) 任意两个不相等的整数 a 与 b 之间，只存在有限个整数或根本不存在其他任何整数。这性质叫做整数集的离散性。

附注： 如果一个数集内的数，经过某种运算后能得到唯一的结果，并且所得结果的数仍然属于原数集，那么就称这种运算在这个数集内可以单值地实施。如果在一个数集内，永远

可以单值地实施加法、乘法以及减法运算，那末这个数集叫做一个环。因为整数集具备环的性质，所以整数集也被称为整数环。如果在一个数集内，永远可以单值地实施加、减、乘、除（零不作除数）四种运算，那末这个数集叫做一个体。

Ⅱ、有理数集（有理数体） 凡属能化为两整数之比的数都叫做有理数。按这个定义，显然分数是有理数；又任何整数m可表为$\frac{m}{1}$，故整数也是有理数（其实应该把整数视为分数的特殊形式）。其次，还必须认识：任何分数总可以化为有限小数或无限循环小数。当分数的分母能表为$2^m \cdot 5^n$（m、n表自然数或零）的形式时，则这样的分数能化为有限小数；当分母含有2、5以外的质因子时，则这样的分数只能化为无限循环小数。反过来，任何一个有限小数或无限循环小数都可以化为分数，故有限小数或无限循环小数是分数的另一形式，因此它们是有理数。

全体有理数的集合叫做有理数集。它满足顺序律和基本运算定律，它在性质上不同于整数集的有以下两点：

（1）在有理数集内，加、减、乘、除（零不作除数）四种运算都永远可以单值地实施。而在整数集内，则除法并非永可实施。

（2）任意两个不相等的有理数a与b之间存在着无穷多个有理数，这叫做有理数集的稠密性。有理数集的这一性质显著地区别于整数集的离散性。

因为有理数集符合体的定义，所以有理数集也被称为有理

数体。

Ⅲ、实数集(实数体)

1. 实数与实数集的定义　有理数和无理数统称实数。全体实数的集合叫做实数集。

为了使读者深刻理解实数集的性质，就有必要首先阐明无理数的概念：

(1) 无理数的定义　无限不循环小数叫做无理数。一切不尽根如$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$……，$\sqrt[5]{31}$等等都能化为无限不循环小数，所以任何不尽根所表示的数都是无理数。但并非只有不尽根才是无理数。例如圆周率π和自然对数的底e不是不尽根，但它们都可以用无限不循环小数来表示它们的值，因此π和e都是无理数。

(2) 无理数的近似值　任何无理数永远可以用有限十进小数表示它的近似值，如果用记号α_n^-与α_n^+分别表示无理数α的精确到第n位小数的不足与过剩近似值，则对于任何自然数n，永有　$\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+$

设　$\alpha = p.q_1q_2\cdots\cdots q_n\cdots\cdots$，其中$p$表$\alpha$的整数部分，$q_1$、$q_2$、……表十进数码，则有

$$\alpha_n^- = p.q_1q_2\cdots\cdots q_n,$$

$$\alpha_n^+ = p.q_1q_2\cdots\cdots q_n + \frac{1}{10^n},$$

很明显，当n无限增大时，α_n^-与α_n^+都无限地迫近于α本身，即递增数列$\{\alpha_n^-\}$与递减数列$\{\alpha_n^+\}$都以α为其极限。

2. 实数的运算

(1) 实数的四则运算

(i) 两个正实数α和β相加（或者相乘），就是求一个数γ，使它大于这两个实数的任何一组不足近似值的和（或者积），而小于任何一组过剩近似值的和（或者积）。（如果α和β中有一个是有理数，就取其准确值来替代近似值。）

(ii) 两个正实数的减法（或者除法）是加法（或者乘法）的逆运算.

(iii) 对于负实数的运算，按着负有理数的同样法则进行.

根据上面的规定，可知在实数集内，加、减、乘、除（零不作除数）四种运算都永远可以单值地实施，所以实数集也被称为实数体，并且基本运算定律和顺序律在实数集内仍然适合.

(2) 实数α的乘方和开方

(i) 实数α的n次方，就是求n个α的连乘积.

(ii) 在实数集内，实数α开n次方，就是要求一个实数x，使

$$x^n = \alpha.$$

这时x叫α的n次方根.

在实数范围内乘方运算永远可以单值地实施，但作为乘方的逆运算的开方，却不是永远可以单值地实施的.

事实上，负数开偶次方的运算，在实数集内就不能实施.我们现在只研究在实数范围内可以开方的那些情况：

(一) 任何一个实数α（正数、负数或零）都可以开奇次方（$2n+1$次），并且所得结果是唯一的：

若 $x^{2n+1} = \alpha$,

则有且只有唯一的x适合上式，这样的x记为$\sqrt[2n+1]{\alpha}$，即

$$x=\sqrt[2n+1]{\alpha},$$

并且有

$$\sqrt[2n+1]{\alpha}\begin{cases}>0 & (\text{如果}\ \alpha>0),\\ =0 & (\text{如果}\ \alpha=0),\\ <0 & (\text{如果}\ \alpha<0),\end{cases}$$

以及

$$\left(\sqrt[2n+1]{\alpha}\right)^{2n+1}=\alpha.$$

（二）任何正实数α在实数集内可以开偶次（$2n$次）方，但所得结果有两个值，它们互为相反数．我们规定，那个正的方根记为$\sqrt[2n]{\alpha}$，负的方根记为$-\sqrt[2n]{\alpha}$．这就是说：

若 $x^{2n}=\alpha$， 则 $x=\sqrt[2n]{\alpha}$，

或 $x=-\sqrt[2n]{\alpha}$，

有时把上两式合写为

$$x=\pm\sqrt[2n]{\alpha}.$$

要注意的是，当$\alpha>0$时，

$$\sqrt[2n]{\alpha}>0,$$

$$-\sqrt[2n]{\alpha}<0.$$

当然，还有

$$\left(\pm\sqrt[2n]{\alpha}\right)^{2n}=\alpha.$$

（三）当$\alpha=0$时，α也可以开偶次方，这时结果仍是唯一的，它就是零．因此，如果

$$x^{2n}=0,$$

则 $x=\sqrt[2n]{0}=0$。

例如：若 $x^2=9$， 则 $x=\sqrt{9}=3$，

或 $x=-\sqrt{9}=-3$。

若 $x^4=16$， 则 $x=\sqrt[4]{16}=2$，

或 $x=-\sqrt[4]{16}=-2$。

若 $x^2=0$， 则 $x=\sqrt{0}=0$，

若 $x^3=0$， 则 $x=\sqrt[3]{0}=0$，

若 $x^3=8$， 则 $x=\sqrt[3]{8}=2$，

若 $x^3=-8$， 则 $x=\sqrt[3]{-8}=-2$。

实数的开方运算，呈现了复杂的情况，为了简化它们，在限于实数体内的开方运算中，我们引进了算术根的概念。

非负数的非负方根叫算术根，如果 $\alpha\geqslant 0$，且 $x^n=\alpha$，则其算术根记为 $\sqrt[n]{\alpha}$。

例如： $\sqrt{9}$，$\sqrt[4]{16}$，$\sqrt[3]{8}$ 都是算术根，$\sqrt[5]{-32}$，$\sqrt[3]{-27}$ 都不是算术根。

一切方根都可用算术根表示。如9的两个平方根，一个是算术根 $\sqrt{9}$，另一个也可用 $\sqrt{9}$ 来表示成为 $-\sqrt{9}$。又如 -32 的五次方根不是算术根，但它可以用32的五次算术根 $\sqrt[5]{32}$ 表示成为 $-\sqrt[5]{32}$。

为了加深读者对算术根的印象，再举下面几个例题：

例1. 化简下列各式：

(1) $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}$， (2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$。

解：(1) $\dfrac{\sqrt{a^2}}{a}=\dfrac{|a|}{a}=\begin{cases}1 & (\text{若}a>0),\\ -1 & (\text{若}a<0),\\ a=0\text{时无意义。} & \end{cases}$