

伯拉基斯著

中學數學教學法

第二冊 算術教學法



人民教育出版社

中學數學教學法

第二冊 算術教學法

伯拉基斯 著

吳品三 譯

人民教育出版社出版

中學數學教學法 第二冊 算術教學法

著 者：伯 拉 基 斯
譯 者：吳 品 三
責任校對：陳 守 勤
出 版 者：人 民 教 育 出 版 社
(營業許可證出字第 二 號)
發 行 者：新 華 書 店
印 刷 者：(見 正 文 最 後 頁)

書號：參 0144

字數：79,300

1—20,000

定價3,700元

1953年12月原 版

1954年 5 月北京第一次印刷

L1:2

中學數學教學法第二冊目次

第一章 中學學習的算術課的一般內容	1
§ 1. 作為科學的算術以及作為學校中學習科目的算術	1
§ 2. 在小學中已獲得的以及應該在中學中發展和鞏固的 算術知識和技能	3
§ 3. 中學算術課的結構。教學文獻。	5
§ 4. 算術習題	8
§ 5. 算術與其他數學科目	13
第二章 自然數論	14
§ 6. 讀數法和記數法	14
§ 7. 算術四則運算	16
§ 8. 口頭計算	19
§ 9. 關於數的整除的某些知識	21
§ 10. 數的概念第一次推廣：零當作數	25
第三章 普通分數	26
§ 11. 最簡分數的初步知識	26
§ 12. 五年級數學教學大綱上所規定的分數的理論知識內容	27
§ 13. 數的概念第二次推廣：分數當作數	29
§ 14. 分數的加法和減法	33
§ 15. 分數的乘法	34
§ 16. 分數除法	38
§ 17. 分數四則運算的習題	40
§ 18. 典型的困難和典型的錯誤。結論。	41
第四章 小數(十進分數)、百分法	43
§ 19. 小數的優越性。度量衡的標準制。	43
§ 20. 學習十進分數依次的步驟	45
§ 21. 百分法和千分法	47
§ 22. 化非十進分數為十進分數	52
§ 23. 循環小數	53

§ 24. 十進分數、非十進分數的混合計算	55
第五章 近似計算	56
§ 25. 量的精確值和近似值、四捨五入的規則	56
§ 26. 近似計算理論的最簡概念和規則(知識的第一個範圍)	57
§ 27. 上界和下界(近似計算知識的第二個範圍)	61
§ 28. 絕對誤差和相對誤差的界限(近似計算知識的第三個範圍)	64
§ 29. 關於中學近似計算教學法的某些一般見解	66
第六章 比和比例、成比例的量	67
§ 30. 兩個數的比的概念	67
§ 31. 比例	69
§ 32. 正比例和反比例	72
§ 33. 成比例的量的習題	74
§ 34. 比例配分的習題	77
§ 35. 代數課中的算術練習和函數初步概念	80
關於第二冊問題的書、文章的目錄	81

第一章 中學學習的算術課的一般內容

§1. 作為科學的算術以及作為學校中學習科目的算術

‘算術’這個詞，導源於希臘文 ‘аритмос’ ——數，正如這個字本身所指出的那樣，是研究關於數的理論。近代數學與各種各類性質的數發生關係：與自然數(1, 2, 3, 4, ……)發生關係，與包括着所有自然數的整數(0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)發生關係，與有理數發生關係，它們是由於將各種各樣的分數合併到所有整數一起而得出的；更進一步有包括着有理數和各種各樣無理數的實數，有複數，即 $a + bi$ 形狀的數，此處 a 及 b 是任意實數，而 i 是虛單位，有多元數，其中最簡形狀的是四元數，即 $a + bi + cj + dk$ 形狀的數，此處 a, b, c, d 是任意實數，而 i, j, k 是特別單位，諸如此類。

對於這些種類的數中，每一類都有與整數的加法和乘法類似性質的加法和乘法的運算(然而對於多元數來說，乘法不滿足交換性質)，也有逆運算——減法和除法。上面被列舉出來的這些數類，僅僅是被叫做環和體的很特殊的而同時是最重要的例子，它們在代數科學中被用同一的觀點來研究。這裏不再詳細的論述定義，讀者應該從高等代數課程中知道它們，僅讓我們回憶起所有整數的集合可以當作環的例子，在這裏加法、減法、乘法永遠是可施行的，而除法則不是恆能施行的(即使以零為除數的情形除外)；有理數體可以當作體的例子，在這裏減法和除法(以零為除數的情形除外)永遠可施行。

如果算術運算一般理論的研究，離開代數，那末它是否仍能成為科學呢？這種科學的算術，在現在被命名為數論，是數學的一個有着非常豐富內容的分支，在歷史上是由於整數整除性理論的研究特別是由於素(自然)數的研究而形成的。在最近一百年來尤其是最近五十年來它的問題變得非常廣泛。在數論的發展上起着主導作用的從 П. Л. 切彼舍夫時代以來一直是屬於俄羅斯科學的。在這裏應該指出 А. Н. 柯洛金(Коркин)，Е. И. 查羅塔廖夫(Золотарёв)，А. А. 馬洛可夫(Марков)，Г. Ф. 沃勒諾益(Вороной)，Л. Г. 舍尼來尼曼(Шнирельман)，Б. Н. 狄龍雷(Делоне)

Р. О. 古奇明 (Кузьмин), 以及其他一些健在着的學者——Н. М. 維諾格拉道夫 (Виноградов), А. О. 格尼方得 (Гельфонд), А. Я. 欣斤 (Хинчин), Ю. В. 寧尼克 (Линник) 等等的名字。

算術的問題, 亦即自然數算術的問題, 是數學的第一個問題, 人類在很早的文化發展的階段上已經遇到這個問題了。

人類甚至在很低級的文化階段已經有了關於自然數的以及分數的初步知識, 歷史記載下來了很古時候的關於人民的算術知識的可靠的知識, 關於算術歷史的最簡知識, 也就是每一個數學教師所必須首先具有的, 可以在 [I, 9 及 II, 7] 這些小書裏得到。關於俄羅斯的算術史在 [I, 19Б] 中詳細的談到了。要想知道算術科學的詳細的發展過程, 可以讀 [I, 10, 43, 44, 45] 等書。

學校中的算術課是從關於數的理論裏僅取出不多的幾部分, 這些是每一個人人在日常生活中需要應用的: 首先是記數法, 亦即稱呼以及書寫任意大小的數的方法, 然後是自然數的四則運算, 更進一步是關於分數的知識以及實行分數四則運算所必需的自然數論的知識(整除性的理論)。數的概念的更進一步的發展, 亦即負數的知識以及關於實數和複數的初步研究, 在學校課程中是屬於代數課的事, 與學習算術課理論部分的同時, 也學習算術的各方面的應用; 關於量(長度, 面積, 體積, 重量, 時間)的問題, 也賦予較多的注意, 學習應用算術以解決日常生活上的問題, 例如, 百分法的應用, 記帳, 特別簡單的而同時又是特別重要的量之間的相關性——正比例及反比例。

因此, 學校中的算術就本質上來說是與那些研究數以及其間運算的科學的數學分科(代數及數論)有區別的。一方面, 在上述的科學中僅能有很小的一部分問題放在學校的課程內而且是非常簡化了的形狀, 而另一方面, 在其中還需要借用一些其他分科中的概念和問題。學校中的數學課是物理數學科學的特殊的初步知識, 是從其中選擇出最簡單的知識而加以系統化了的, 而且是對於實際的實踐以及對於進一步學習數學、物理、電學及機械學都是必需的。

在小學及中學中算術教育的目的, 首先是在於掌握一些關於數及量

的知識以及相應的技能，這些是每一個人都需要應用它們的。但同時也有另外一個目的：培養基本的邏輯習慣，會提出問題和分析問題，會首尾一貫地進行某些議論，會從一些可能的途徑中找到達到目的的捷徑，發展機敏性。達到第二個目的的主要方法是解答很多習題的訓練，關於習題的問題以後（§4）將要進一步的談到，解答具有生活內容的習題同時追求着上面所指的兩個目的。

§2. 在小學中已獲得的以及應該在中學中發展和鞏固的 算術知識和技能

教師在五年級開始講授算術課的同時，應該正確地理解關於哪些數學的知識和技能是自己的學生已經具有了的，他們在進入五年級之前已經結束了小學四年的功課，其中算術就已進行了891節課（四年總計3300節課），而且還不算在家裏的獨立作業。從現行的小學算術課的教學大綱（參考‘小學教學大綱’蘇俄教育部學校管理局出版，國立教育出版社，1948）知道詳細內容是必要的。

按照這個教學大綱，學生們在小學中應該獲得的這些知識和技能的特點，在大綱所附載的‘說明’裏詳細地闡明着。下面是從其中摘出的兩條：

‘學生在小學中受了四年的教育，應該獲得：

- 1) 任意大小的整數的四則運算的堅強知識，不論是不名數的還是名數的，以及進行這些運算的鞏固技能，會記商業上的帳；
- 2) 度量的標準制的鞏固知識，以及會利用它們到測量問題上去；
- 3) 關於分數以及百分法的初步知識，小數四則運算的知識；
- 4) 直觀的幾何範圍內的知識，會應用這些知識到實際上去；
- 5) 會解答整數的以及分數的各種各樣的算術習題。’

‘學習數學應該供給兒童們認識周圍實際的工具——數和度量。

算術知識應該被兒童將來利用來參加社會主義建設，培養他們自覺地對待勞動，並且為祖國的國防建設作準備。

在算術教育中應該達到培養自覺的紀律，在工作中的精確性、明確性等任務，要求達到正確地運用語言，整齊清潔的書寫，對計算結果的責任感’。

規定在小學教學大綱上的數學知識和技能，是完全適應於 7—10 歲兒童一般發展水平的非常起碼的數學知識和技能，但是切實有效的掌握它們對於以後所有的數學教育有着非常巨大的意義。這些也是所有生活中應該掌握的知識與技能，因為它們是隨時隨地都要用着的，因而是普通教育必須的要素。無論學習任何較深的數學，沒有不需要這些基本的初步知識的，這些是進一步學習數學的真正基礎。這個基礎的重要性，使得中學的數學教師務必非常謹慎地對待學生們在小學已獲得的知識和技能。即使是真正鞏固的知識，如果長時間不利用它，也會逐漸地消失。中學的數學教師，在開始講授任何新的問題時，應該知道學生的學生在小學中學習過哪些與此類似的問題的知識，應該使他們練習這些在小學已獲得的技能。例如，在給五年級學生講授如何進行任意分母的分數加法時，教師應該記起在小學中這些分數，如 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{3}$, 等等是如何‘按照不嚴謹的見解’建立起來了的。學生們認識了一些對他們來說是新的方法，應該把它們與老的方法相比較，看究竟有哪些較大的幫助，但同時也應正確地評價老的方法，應把它們應用在較簡單的情形，當能夠較快的得到所求的結果的時候。

中學的數學教學大綱中，在五年級學年開始，規定 21 節課‘復習小學算術’。無疑的，在這個時間內復習小學所有學過的算術，是不可能的，而且按照教學大綱上規定的，在復習這一部分時，學生們的家庭作業僅規定 8 小時，但是，要是復習最近所需要的，以便正確地知道學生們從小學的課程中哪些是已經知道的，哪些是不知道的，這些時間是足夠的。

也有時發生這樣的情形，小學畢業的學生所知道的某些簡單的數學知識，而中學畢業的學生却不知道。這種所謂‘數學無知識的再犯’，在多位數運算的範圍內，在度量的部分以及在解答應用題時經常發生。類似的無知識現象局部地表現出小學工作的缺點，但主要的還是在於小學學習的數學與中學的數學中間有間斷的情況。爲了消除這種情況，中學數學教師不應該忽略鞏固和進一步發展這些在小學中兒童已經獲得的有價值的數學知識。

例如，就以度量的問題來說，小學畢業的學生應該知道在日常生活中所有應用着的度量的標準制：在教學大綱中指出了長度的單位毫米 (mm)，厘米 (cm)，分米 (dm)，米 (m)，公里 (km)，重量的單位——公分 (Г)，公斤 (КГ)，公担 (Д)，公噸 (Т)，時間的單位——秒，分，時，晝夜，星期，月，年，世紀，然後指出了面積和體積的標準制。

‘度量的標準制以及時間單位的學習是從小學一年級就開始了的，而且在整個小學四年期間都談論到它們。其結果學生們應該牢固地掌握它們，應該知道各種不同度量中間單位的關係（長度的，平方的，立方的，重量的，時間的），各種度量的命法和通法，名數的運算，以及會解答各種名數的習題。名數的運算和時間的表示法在四年級學習。度量的學習，務必使得學生們對於每一種量都得到具體的觀念，使得學生們學會利用它們。在技藝的任何部門，在生產的任何方面都要求通曉度量，因之，學校應該給與學生在這方面的實際技能。在學習長度的測量時，應該發展學生目測的能力。在學習重量的度量時，使學生練習用體力的感覺來度量物體的近似重量是很合宜的’（小學教學大綱，國立教育出版社出版，1947‘說明’，25頁）。

中學的教學大綱僅在五年級‘復習小學算術’這一部分涉及度量的問題，在這裏有一條：‘度量，面積，體積的度量’。這是否意味着中學的數學教師對於度量問題應該完全不感興趣呢？有一些教師認為真的就是這樣，他們以為關於度量的所有必需的知識，學生們在小學已經完全得到了，如果未曾得到，那麼小學應該負責，在中學中最好整個避免談論確定的度量，而代之以一般的單位，正如在教科書中時常做的那樣（例如，見基雪遼夫‘幾何’教科書，§211 習題第47題，第一冊，1949年出版）。當然，這是不正確的、有害的方針：中學應該加強和補充關於度量的知識，應該利用每一道習題，使得學生們鞏固這些重要知識，以便保證真正地掌握現行通用的度量知識，以及理解標準制原則上的益處（由於它和十進位制的關係），認識某些舊俄的以及外國的重要度量，例如磅，普特，俄里，俄畝，英里，蒲式耳等等，這些常常在雜誌上見到。這裏不應該說這些問題是涉及物理教學大綱的事，如果中學畢業生不能清楚地知道，例如，公畝和公頃是什麼，那麼首先應該數學教師負責。

§3. 中學算術課的結構. 教學文獻。

‘算術教學的目的在於教會學生自覺地、迅速地、確信地和最合理地進行整數和分數的演算，並應用所獲得的知識去解題以及完成具有實際

性的簡單計算⁷。在蘇俄中等學校現行的中學算術課教學大綱的說明上規定着這樣具體的任務。爲了達到這個目的，教學計劃在五年級整個學年中規定每週七節算術課，也就是全學年總計 231 節算術課，而且在六年級規定每週兩節算術課，共計補充 66 節算術課。教學計劃中對於以後的年級雖然未規定學習算術的特別時數，但是在七年級 196 節數學鐘點裏，規定出 32 節鐘點爲復習算術、代數及幾何用。在高中級，系統地復習算術也有必要指出，整數和分數的口頭的和書面的計算以聯繫代數式子的計算復習爲宜，當解幾何計算題時也應聯繫到復習算術。應該理解上面的指示，正如流行的在實際上很受指責的那樣，在代數以及幾何習題上，已知件的數值都是經過技巧性的選擇，使得所有計算方面都儘可能的簡單，以致除法經常的都是恰好除盡而沒有餘數，開方也是永遠是恰好開盡，答案都是一兩位數的合適數值。這樣的道路不可避免的要使得學生喪失在 1—5 年級已獲得的計算技能。

五、六年級算術課程中應該學習的理論材料是相當少的，而時間却是相當多： $231 + 66 = 297$ 節課，另外還有大約 110 小時的家庭獨立作業。完全有可能保證學生們持久的掌握應用到解答各種解題上的有價值的能力。與革命前比較起來，算術課的教學大綱是顯著地精簡了一些教材。首先精簡掉了老的度量衡的學習，這些是要求較多記憶工作的而且使得解答習題過分複雜。爲了證實這點，只要拿一個低單位化成高單位的例子來看，即已足夠，例如化一百萬俄錢* 和一百萬公分。第二個問題的回答馬上就可以寫出， $1000000\text{r} = 1000\text{кг} = 1\text{t}$ ，而對於第一個問題，首先需要用 3 去除（3 俄錢 = 1 俄兩**），然後再除以 32（32 俄兩 = 1 俄斤 фунт），再除以 40（40 俄斤 = 1 普特），最後再除以 10（10 普特 = 1 貝勒可夫茨），最後的結果是 $1000000 \text{ 俄錢} = 26 \text{ 貝勒可夫茨} 0 \text{ 普特} 16 \text{ 俄斤} 21 \text{ 俄兩} 1 \text{ 俄錢}$ 。第二，精簡掉了一些專門規則的學習，例如‘計算期票的規則’以及‘連鎖比例’等等。在蘇維埃學校中算術課所有材料的配備，無疑的要比革命前好得多。現在學生們得到實踐上必需的、日常生活中關於算術的知識和技能，而不浪費時間學習那些不論是在理論上或者實踐上毫無價值的材料。

但是不可以說目前的教學大綱已經是毫無缺點的。例如現在學校顯著地落後於生活所指出的計算技巧方面。到現在止，不論是教學大綱，或者是學校課本都沒有解決應有的近似計算的問題，關於這個問題，以後我們將要專章討論（第五章）。

1947年蘇俄教育科學院教學法研究所擬定了的中學數學教學大綱新方案，對於現行的有若干改變。對於合理化計算的作業，賦予較大的注意（計算圖表的應用，計算位置合理的佈置，自己核驗），更早的用百分法來解答習題，指出某些算術計算有價值的形式，例如矩形的和扇形的分度器的製作，收支帳簿的登寫，認識某些重要的舊俄度量，着重的強調利用幾何题目的必要性，對於近似計算也賦予很大的注意。

教師務必很好地研究現行的教學大綱，但是最好也關心到從先前的教育實踐中產生的趨勢。

下面來討論一些教學文獻。

目前，蘇俄中學中利用着兩本教育部批准的固定的算術教科書：А. П. 基雪遼夫編的，經 А. Я. 欣斤教授修訂的‘算術’教科書，1948年第十版，和 Е. С. 貝列暫斯卡婭（Березанская）編的，1948年第十五版，‘算術習題課本’。這兩本書在過去若干版中曾遭受到了一些公正的批評，揭露了一些缺點，這些在新版中已逐步的消除了，在目前，雖然不能說這兩本書已經是毫無缺點的，但是已能保證學生掌握教學大綱上所規定的所有材料的可能性。

讓我們注意下面基雪遼夫算術課本中的若干重要弱點：

1. 完全忽略了學生在小學中學習過的算術的全部工作：所有敘述好像是學生們到現在為止一點算術知識也沒有似的。
2. 僅討論到了進行自然數和分數的書面計算的一般方法，幾乎沒牽涉到合理化計算的問題：口頭計算，書面計算的特殊方法，核驗的方法，關於書寫的問題，關於計算儀器的問題，關於利用計算圖表的問題。
3. 沒有給學生任何關於近似計算的運算特點的知識，好像不認為指示表成無限小數形狀的商的四捨五入是必要的。

4. 有着相當多的抽象性質的敘述，並不是經常揭示每一個理論命題的足夠分量的實際根源，歷史知識也比較少。對於五、六年級學生獨立作業來說，這本書是比較困難的。

E. C. 貝列暫斯卡婭的習題課本，在第一版中曾是含有特別容易的材料，幾乎是僅利用學習得的規則而不要求任何思考工作。在最近的一些版中出現了一些可算是真正習題的較困難問題。但是就整個內容來看，仍必須指出某些缺點。例如，在習題本內有很多關於日常生活內容的習題，關於實際生活的習題，但就全體來講，有些並不够得上實際性。真正實際內容的，在日常生活中真能遇到的，還是相當少，而且其解法又大部分是相同的。也有些不合適的習題，例如，第 546 題要求說出， $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ ， $2 \cdot 3 \cdot 5 + 2$ 等等形狀的數是素數還是合數，而在第 547 題，要求藉素數 1, 2, 3, 5, 7 的幫助，‘按照上面指出的規則（見前題）寫出一個素數和幾個合數’，由此，勢必著者認為所有 $2 \cdot 3 + 1$ ， $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$ ， $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ 等等形狀的數都是素數，這顯然是不正確的：例如， $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$ ，僅能斷定 $P_1 P_2 P_3 \cdots P_n + 1$ 形狀的數（此處，字母表示連續的素數 2, 3, 5, 7, 等等）不能被從 P_1 到 P_n 中任一個素數除盡，因而或者是素數，或者是有素因數大於 P_n 的合數。誠然，現在看到的有錯誤的條件或者錯誤的答案的習題，將被逐步的在下版中修正。

在第 1598 題，問題的敘述也是不成功的。

不論是基雪遼夫的算術，或者是貝列暫斯卡婭的習題課本，都不能認為完全是十全十美的五、六年級用的固定的教科書。但是，如果注意到它們的缺點，給與應有的修正，那末按照它們，仍然可以使得工作很成功，希望教師們最好也參看着利用其他的教科書，首先是師範學校用的算術習題課本 [II, 33] 以及某些較老的版本，如 [II, 18]。注意新的五、六年級算術課用的習題和練習課本 [II, 29] 和書 [II, 35]。

§4. 算術習題

可以把提給學生做的算術習題分成下面幾類：在算術課中佔首要地位的是‘習題——例題’，即解答某些僅要求牢固的掌握某些規則以及為

了得到應用這些規則的技能的題目。因此這些題目首先是完成給出某些數的指定運算的簡單習題，在學校數學課中，當它們的條件的書寫，僅利用數學符號——數碼、運算符號、括號，而沒有任何文字的書寫時，通常稱這類習題為‘例題’，但是下面這兩種情況是沒有任何差別的：即習題式子 $22 = (5.6 + 7.4) \div 0.02$ 和‘求 5.6 和 7.4 的和被 0.02 除得的商’，按照數學內容來說，它們是毫無區別的。解答習題——例題是非常初步的工作，很少發展性的鍛鍊，但是它的意義仍然是相當重大的：完成算術運算的技能應該是很持久的，在全部生活中是鞏固的，在某些情形甚至要達到自動化（乘法表，關於運算順序的規則），除此以外，解答增長着複雜性的習題——例題的練習將培養兒童們完成大的作業的有效的能力。將大的作業分成一些連貫的步驟，產生忍耐心和注意力，學會在工作中的精確性，自我檢查的能力，培養對待自己工作的重要責任感。對於每一個新的規則，應該給與學生習題——例題，除此以外在復習以前的規則時，也可以給與習題——例題，這時難易程度是非常不同的，習題——例題內也應該包含那些可以用智慧解決的題目，如以前所述的那樣。

從完全不必選擇解法的習題——例題，學生們進而完成實用的算術內容的習題的解答，關於這些習題是需要適當選擇運算的，但是這類選擇，是沒有任何困難的。我們約定稱這樣的習題為‘計算習題’，這一類習題是人們在日常生活中以及在每一種職業上都要碰到的。

解答計算習題也追求着與解答習題——例題同樣的目的，亦即獲得完成算術運算的牢固的技能，但是最主要的在於：學會應用算術去解決實際生活問題，例如日用帳，每次買東西應該付出的錢數（‘我買 32 公斤麵包，每公斤 2 個盧布，半公斤糖，每公斤 13 盧布 50 戈比，300 公分香腸，每公斤 41 盧布 30 戈比，付出了 100 盧布，應該找回多少錢？’）以及類似的不是為私人必需的，而是為機關用的（例如買少年兒童宮的體育用品），最簡單的工程預算性質的計算（例如，修理房屋價值的計算）。在純粹數學方面，這類的習題雖然不給與學生任何新的東西。但是在解題中獲得完全有價值的技能是頭等重要的事。七年制中學和十年制中學畢業的學生在自己的職業活動中以及在進一步學習中關於在學校數學範圍內

由於工作不好而最受責備的常常正好是不能完成這類的計算。

在現行的數學教學大綱的說明部分也指出了這類‘計算—習題’的綱目。在每一本算術習題課本內也都含有現成形狀的這類的習題(但並不經常是合適的)。現行生活中留給教師許多新的材料,教師自己可以列成這類的習題[參考 II, 20]。

由於某些通用的時間單位的特殊性質,被叫做爲‘時間的習題’值得特別提出。像大家知道的,月並不是完全確定的時間單位:二月有 28 天或者 29 天,四月、六月、九月、十一月有 30 天,其餘的七個月都是 31 天。因此,在要求計算確定的時間期限時,最好不利用月。在基雪遼夫固定的算術課本上談到不多的關於計算時間的知識,五年級學生利用這些知識能够解答貝列哲斯卡婭習題課本上關於時間的所有習題,而且也能够解答在日常生活中實際遇見關於時間的所有問題。讓我們舉這樣的一個例子:‘如果認爲德國法西斯進攻蘇聯是從 1941 年 6 月 22 日開始,1945 年 5 月 8 日簽訂投降書爲止,那麼偉大的衛國戰爭共繼續多少天?’答: 1417 天。

給與五六年級學生的第三種算術習題,是具有比較複雜的算術內容的習題,其中大多數情形用一般的代數方程的方法來解是非常簡單的,如果不用方程則是比較困難的。引進這類習題的目的在於發展學生的機警性,主動性以及配合議論的能力。可以把這類的習題叫做‘發展性的算術習題’。這類習題典型的例子是:‘某人有 265 盧布,另一人有 157 盧布,每人每天用去 10 盧布,多少天以後,第一個人有的錢是第二個人的 5 倍?’如果寫出方程 $265 - 10x = 5(157 - 10x)$, 馬上就可解決這個習題,得到 $x = 13$, 不用代數,用簡單的觀察方法,也可以解決此題,亦即比較每天用去錢以後的餘數的比;這種方法也是比較有趣味的原始的解法,因爲由此可以看到量的變化的問題:第一天後第一個人的餘數除第二個人的餘數,即 $255 \div 147$, 小於 2, 五天以後是 $215 \div 107$, 大於 2, 十天以後已經是 $165:57$, 幾乎等於 3, 十三天以後是 $135 \div 27$, 正好是 5。建立起如此直觀的、但是麻煩的、冗長的解答可能性以後,我們再提出比較簡短的解法,不必藉諸試驗的解法。如果注意到 $265 - 157 = 108$ (盧布)的差是保持不變的而且這個差經過所求的天數以後等於第二個人所餘錢的四倍,那麼就可得到較好的解法。

在算術課中解答這一類的習題是否合適的問題存在着非常不同的意見，從取消所有這類習題而把它併入代數課的建議開始，直到認為這類習題有着極其優越的意義而把算術作業的主要內容歸諸於解答確定類型的這類習題。這兩種極端的意見當然都不正確：解答這類習題無疑的有發展的意義，解答這類習題使學生學會思考和進行議論，但是整個算術作業的第一步應該是解答習題——例題和計算習題。如果不是給與兒童力能勝任的和按照兒童的年齡逐漸困難的習題，而是馬上就給與兒童比較困難的習題，那麼將嚴重地降低這類習題的益處，對於一些帶有現成解法的困難習題，應該理解它們，通曉它們以及把它們應用在類似的情形（‘推測’習題，‘相遇’習題，‘水池’習題等等）。

應該指出，發展性的習題絕對不是僅僅限於代數性質的習題，亦即很容易用代數方程解答的習題。還有一些對於五年級非常合適的非代數性質的發展性的習題，例如‘有 80 個同樣形狀的物件，其中 79 個是同樣重量，一個稍輕一些，如何用天平不多於 4 次的把它量出？’（莫斯科大學第十次數學競賽會）。如果先量 40 個和 40 個，再量 20 個和 20 個，再量 10 個和 10 個，5 個和 5 個，2 個和 2 個，1 個和 1 個，那麼就需要 6 次。應該懂得將 80 個物件分成三組，先量 27 個和 27 個，再量 9 個和 9 個，3 個和 3 個，1 個和 1 個；那麼在第四次就可求出所要找的。

在選擇發展性習題時，可以依據新書〔II, 35〕。

因此，我們與三種類型的算術習題發生關係：習題——例題，計算題，發展性習題。大致平均地分配這三類習題的注意力和時間被認為是正常的情況；當時間不充分時也容許減少發展性習題的數量，因為，再重複地說，學習算術的主要目的是獲得數的運算的技能以及會應用它們到最簡單的、在實際上遇到的情形。

選擇讓學生解答的算術習題時，教師應注意下面一些情況：

1. 對於給與全班學生解答的每一個習題，都應問一問自己，這個習題追求着什麼目的？是鞏固某種技能，是復習過去所學過的，是爲了學習新的理論材料作準備，是爲了引起興趣等等。

2. 利用習題課本時，應該記得它的缺點，應該以批評的態度對待其中的習題。對於每一個習題，在給與學生之前，務必要自己先求解，還應同時參考別的習題課本。

3. 在計算題中應該避免不實際的和令人不能相信的條件，應極力選

擇接近於生活方面的問題。

4. 教師應廣泛地利用學校生活中的、家庭生活中的以及刊登在報章雜誌上現今的社會生活中的各種數字材料以構成新的習題，在習題的條件中表明我們社會主義建設的特徵，尤其是關於完成五年計劃方面的。

5. 最好希望吸引學生自己動手構成新的習題，開始先給他們一些缺少數值條件的習題，讓他們自己補上。例如，讓學生求他們所在的教室的窗戶和天花板面積的比，讓他們進行必要的測量；或者讓他們求教科書的一張紙的厚度等等。經驗指給我們，這類習題特別容易引起學生的興趣。

學生們在解答算術習題時遇見的每一個概念，應該完全清楚地理解它，直觀地想像它。長度、面積、體積、重量的度量以及問題裏談到的每一個其他的概念，應該儘可能的指明給學生，而不僅是談到它。應該用圖形來解釋習題的文字，這就常常使得不會解答的習題，馬上變得非常清楚。例如，讓我們取這樣的習題來看，‘在三個抽屜總共放着 107 本練習本，第一個抽屜裏放着的比第二個抽屜裏放着的多 8 本，又比第三個少 10 本，問每個抽屜裏放着若干本？’如果將這個題目的條件用圖 1 所示的草圖表示出來，那麼其解答經常是毫無困難的： $8 + 10 = 18$ ；

$8 + 18 = 26$ ； $107 - 26 = 81$ ； $81 \div 3 = 27$ 等等。這種解法是基於將第一個抽屜以及第三個抽屜都化成與第二個抽屜有同等本數的辦法而得出的。討論其餘的兩種解法，亦即將第一和第二抽屜化成第三抽屜的本數或將第二第三抽屜化成第一抽屜的本數，也是很有好處的。

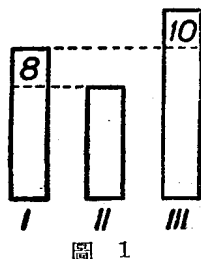


圖 1

另外一個例子：‘兩人共有錢 100 盧布，如果第一人給第二人 10 盧布，則兩人所有的錢就一般多了，問每人原有若干？’。幾乎常常可以見到學生們馬上得出不正確的解法： $100 - 10 = 90$ ， $90 \div 2 = 45$ ，確信一人有 45 盧布，另一人有 55 盧布。而由簡單的圖（圖 2），馬上就可看出正確的解法。

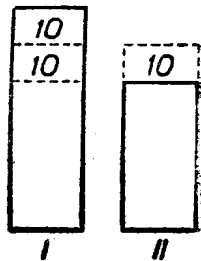


圖 2

教師經常地注意到保證解題時的直觀性將顯著地提高學生作業的質量而且首先是從根本上將消滅形式