顶级数理化公式定理

高中版

根据最新高中
教学大纲编写

Ding ji shu li hua gong shi ding li

主编：杨惠龙 何福山 茹高霖

广州出版社

顶级数理化公式定理

高中版

主编　杨惠龙　何福山　茹高霖

广州出版社

图书在版编目(CIP)数据

顶级数理化公式定理(高中版)/杨惠龙、何福山、茹高霖主编.—广州:广州出版社,2004.7

ISBN 7-80655-627-3

Ⅰ.顶... Ⅱ.杨... Ⅲ.①理科(教育)—公式—高中—教学参考资料②理科(教育)—定律—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第123148号

顶级数理化公式定理(高中版)

出版发行 广州出版社

(地址 广州市人民中路同乐路10号 邮政编码:510121)

印　　刷 上海场南印刷厂

经　　销 各地新华书店

责任编辑 卢嘉茜　彭向明

责任校对 大　伟

封面设计 王　琳

版式设计 王　琳

开　　本 787×960　1/32

印　　张 12.75

字　　数 480千

印　　数 1—20 000册

版　　次 2004年7月第1版

印　　次 2004年7月第1次

书　　号 ISBN 7-80655-627-3/G·201

定　　价 23.00元

广州发行专线 020-37602590　020-83794401

销售中心地址 广州市合群一马路111号省图批112档

邮 政 编 码 510100

上海发行专线 021-65138218

发 行 部 地 址 上海市延长中路789号303室

邮 政 编 码 200072

前

Ding ji shu li hua gong shi ding li

《顶级数理化公式定理》(高中版)是一本很有实用意义的导学参考书,能引导你把高中阶段知识关联成网络,进一步将简洁明了的理论知识灵活自如地应用在联系实际和充满能力要求的高考模式试题中,因此可供广大中学生使用,也可供参加成人高考的考生、师范院校的部分学生使用.

本套丛书以我国现行教材为依据,参照全国各科教学大纲及上海市全日制高级中学各学科课程标准,并接受高考命题必须依据课程标准,但又不拘泥于课程标准,即在知识点上不超课程标准,在应用上不拘泥于课程标准,注重创新精神和能力培养的指导思想,在编写过程中对各学科的知识及其关联点都作了详尽透彻的解释,并配备了多年积累的典型例题作“画龙点睛”式的分析,可起到智力能力的培养作用.

本丛书是由多年从事各学科教学工作,具有丰富教学经验的上海市重点高中的高级教师和多次参加过高考命题工作的资深教师精心编写而成.

总目录

Ⅰ. 数学 …… 1
Ⅱ. 物理 …… 117
Ⅲ. 化学 …… 287

数学

GAO ZHONG SHU XUE

GAO ZHONG SHU XUE

目 录

1. 集合、命题 …… 5
2. 函数 …… 9
3. 不等式 …… 18
4. 三角函数 …… 24
5. 数列、数学归纳法、数列极限 …… 46
6. 复数 …… 53
7. 空间直线与平面 …… 61
8. 多面体和旋转体 …… 70
9. 向量初步 …… 79
10. 直线与圆锥曲线 …… 86
11. 参数方程、极坐标 …… 98
12. 排列组合、二项式定理 …… 104
13. 概率、统计初步 …… 109
14. 实用数学选讲 …… 113


design

1. 集合、命题

【集合】把某些能确切指定的对象看作一个整体，这个整体叫做一个集合，简称集，集合中的每个对象叫做这个集合的元素.

集合通常用大写拉丁字母 A、B、C……表示，集合的元素通常用小写拉丁字母 a、b、c……表示.

【集合元素的性质】集合元素具有确定性、互异性、无序性.

【集合的分类】

1 **有限集：**含有有限个元素的集合叫有限集.

2 **无限集：**含有无限个元素的集合叫无限集.

3 **空集：**不含任何元素的集合叫做空集，记作$\varnothing$.

【集合的表示法】

1 **列举法：**把一个集合的元素一一列举出来，写在大括号内，这种表示集合的方法叫做列举法.

2 **描述法：**在大括号内先写出该集合元素的一般形式，再画一条竖线，在竖线的右边写上这个集合元素的公共属性，这种表示集合的方法叫做描述法.

【元素与集合的关系】元素 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果元素 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in} A$ 或 $a\notin A$.

【集合与集合的关系】

1 **子集：**对于两个集合 A、B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作"A 包含于 B"或"B 包含 A".

2 **真子集：**如果 A 是 B 的子集，而且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作"A 真包含于 B"或"B 真包含 A".

3 **相等集：**对于两个集合 A、B，若 $A\subseteq B$ 同时 $B\supseteq A$，那么称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

当两个集合 A、B 没有子集关系时，通常记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

显然，空集是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；空集是任何非空集合 B 的真子集，即 $\varnothing\subset B$；有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_n\}$ 的子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个，非空真子集有 2^n-2 个.

【常用数集的符号】

N **自然数集**

Z **整数集**

Q **有理数集，Q^+ 正有理数集**

R **实数集，R^- 负实数集**

C 复数集

显然，自然数集 $N \subset$ 整数集 $Z \subset$ 有理数集 $Q \subset$ 实数集 $R \subset$ 复数集 C.

【区间】 设 a、b 是两个实数，且 $a<b$ 规定：

1 闭区间 满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，表示为 $[a, b]$.

2 开区间 满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，表示为 (a, b).

3 半开半闭区间 满足 $a \leqslant x<b$ 及 $a<x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别表示为 $[a, b)$ 及 $(a, b]$.

4 无穷区间 满足 $x \geqslant a$，$x>a$，$x \leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合都称为无穷区间，分别表示为 $[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b)$；实数集 R 可用无穷区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示.

【交集】 由两个集合 A、B 的公共元素所组成的集合，叫做集合 A、B 的交集，记作 $A \cap B$，读作"A 交 B"，即 $A \cap B=\{x \mid x \in A 且 x \in B\}$.

$A \cap B$ 可用文氏图中的阴影部分表示，如图 1-1.

【并集】 由两个集合 A、B 的所有元素合并起来所组成的集合，叫做集合 A、B 的并集，记作 $A \cup B$，读作"A 并 B"，即 $A \cup B=\{x \mid x \in A 或 x \in B\}$.

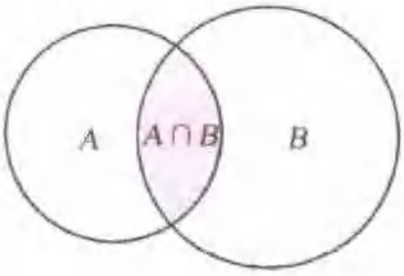
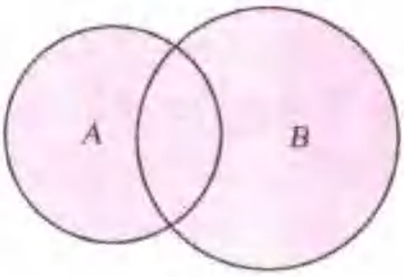


图 1-1



A∪B

图 1-2

$A \cup B$ 可以用文氏图中的阴影部分表示，如图 1-2.

【全集和补集】 在研究一些集合之间关系的过程中，如果一个给定集合含有所要研究的各个集合的全部元素，那么这个集合叫做全集，通常用字母 I 表示. 如果 $A \subseteq I$，那么由 I 中所有不属于 A 的元素所组成的集合叫做集合 A 的补集，记作 $\overline{A}$，读作"A 补"，即 $\overline{A}=\{x \mid x \in I, x \notin A\}$.

显然，$A \cap \overline{A}=\varnothing$，$A \cup \overline{A}=I$.

【德摩根定律】 对于集合 A、B，都有

$$\overline{A \cap B}=\overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B}=\overline{A} \cap \overline{B}$$

【两个有限集的并集的元素个数】 用 $n(A \cup B)$ 表示集合 $A \cup B$ 中元素的个数，那么 $n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$.

1. 集合、命题

例题

1. 若集合 $A=\{1, 3, a\}$、$B=\{1, a^2\}$满足 $A\cup B=\{1, 3, a\}$，则实数 a 的值是(　　).

(A) $a=-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$

(B) $a=-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=0$

(C) $a=-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=1$

(D) $a=-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$ 或 $a=0$ 或 $a=1$

解：考虑两种情况，$a^2=3$ 或 $a^2=a$

当 $a^2=3$ 时，$a=-\sqrt{3}$ 或 $a=\sqrt{3}$，当 $a^2=a$ 时，$a=0$ 或 $a=1$，

$\because a=1$ 与集合元素的互异性相矛盾，

$\therefore$ 应选(B).

2. 已知集合 $I=\{x \mid x$ 为不大于20的质数$\}$，A、B是集合I的子集，且满足 $A\cap\overline{B}=\{5, 13\}$，$\overline{A}\cap B=\{11, 19\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3, 7\}$，则集合 $A=$ ________，集合 $B=$ ________.

解法1：$I=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$，

$\because A\cap\overline{B}=\{5, 13\}$，

$\therefore 5\in A$，$13\in A$ 且 $5\notin B$、$13\notin B$，

$\because \overline{A}\cap B=\{11, 19\}$，

$\therefore 11\in B$、$19\in B$，且 $11\notin A$、$19\notin A$，

$\because \overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{3, 7\}$，

$\therefore A\cup B=\{2, 5, 11, 13, 17, 19\}$，从而得 $A\cap B=\{2, 17\}$，

$\therefore A=\{2, 5, 13, 17\}$，$B=\{2, 11, 17, 19\}$.

解法2：如图 1-3，利用文氏图，根据已知条件标出集合元素，可得 $A\cap B=\{2, 17\}$

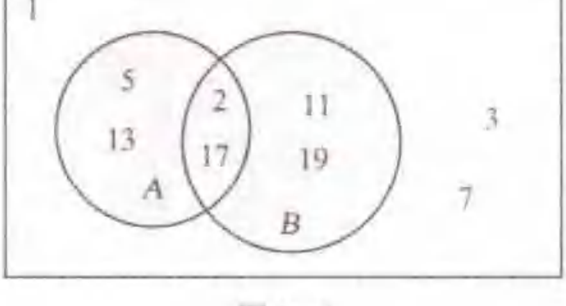


图 1-3

$\therefore A=\{2, 5, 13, 17\}$，　　　　$B=\{2, 11, 17, 19\}$.

3. 集合 $A=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$、$B=\{x \mid x^2-ax+4=0, x\in$

例题

R},若 $A\cup B=A$,求实数 a 的取值范围.

解:$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,

$\because A\cup B=A\quad\therefore B\subseteq A$

当方程 $x^2-ax+4=0$ 满足 $\Delta=a^2-16<0$,即 $-4<a<4$ 时 $B=\varnothing$,符合条件. 当 $\Delta=a^2-16=0$,即 $a=-4$ 或 $a=4$ 时,$B=\{-2\}$ 或 $B=\{2\}$,

$\therefore a=4$ 符合条件,当 $\Delta=a^2-16>0$ 时,

$\because 1\times2\neq4$,

$\therefore$ 1、2 不可能同为方程 $x^2-ax+4=0$ 的两根,

$\therefore$ 不符合条件.

综上所述,a 的取值范围是 $a\in(-4,4]$.

【命题】 可以判断真假的语句叫做命题,命题可分为真命题与假命题.

【命题的四种形式】 如果用 A 表示命题的条件,B 表示命题的结论,$\overline{A}$、$\overline{B}$ 分别表示 A、B 的否定,那么原命题为:若 A 则 B;逆命题为:若 B 则 A;否命题为:若 $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$;逆否命题为:若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$.

四种命题形式的关系如图 1-4.

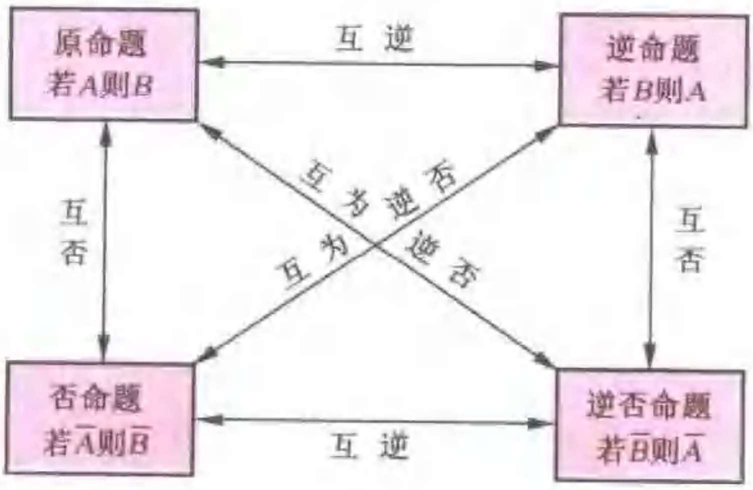


图 1-4

【等价命题】 如果 p、q 是两个命题,若从命题 p 可以推出命题 q,从命题 q 也可以推出命题 p,这样的两个命题 p、q 称作等价命题.

显然,原命题与它的逆否命题是等价命题;原命题的逆命题与原命题的否命题是等价命题.

【充分条件】 如果 A 成立能够推出 B 成立,即 $A\Rightarrow B$,则称 A 是 B 的充分条件.

【必要条件】如果 A 不成立能够推出 B 必不成立(其等价命题是如果 B 成立则 A 成立),即 $B\Rightarrow A$,则称 A 是 B 的必要条件.

【充分必要条件】 如果既有 $A\Rightarrow B$ 又有 $B\Rightarrow A$,即 $A\Leftrightarrow B$,则称 A 是 B 的充分必要条件,简称充要条件.

例题

1. 命题:若 $x=1$ 或 $x=2$,则 $x^2-3x+2=0$ 的否命题及其真假为(　　).

(A) 否命题:$x\neq 1$ 或 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$ 是假命题.
(B) 否命题:$x\neq 1$ 或 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$ 是真命题.
(C) 否命题:$x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$ 是假命题.
(D) 否命题:$x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$ 是真命题.

解:$x=1$ 或 $x=2$ 的否定应是 $x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,故考虑(C)、(D),显然,$x\neq 1$ 且 $x\neq 2$,则 $x^2-3x+2\neq 0$ 是真命题.

∴ 应选(D).

2. 设 A: a、$b\in\mathbf{R}$, $|a-b|<2h$. B: a、$b\in\mathbf{R}$, $|a-1|<h$,且 $|b-1|<h$,则 A 是 B 的________条件.

解:举反例,取 $a=2$、$b=1$、$h=1$,可知由 A 不能推出 B,反过来,由 $|a-1|<h$ 且 $|b-1|<h$ 可得 $|a-b|=|(a-1)-(b-1)|\leqslant|a-1|+|b-1|<h+h=2h$,即由 B 可以推出 A,故 A 是 B 的必要非充分条件.

3. 设集合 $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}$、$B=\{x\mid mx+1=0\}$ 写出 $B\subset A$ 的一个充分不必要条件.

解:∵ $A=\{x\mid x^2+x-6=0\}=\{2,-3\}$,$B=\{x\mid mx=-1\}$,当 $m=0$ 时,$B=\varnothing$,当 $m\neq 0$ 时,$B=\{x\mid x=-\frac{1}{m}\}$;由 $-\frac{1}{m}=2$ 得 $m=-\frac{1}{2}$;由 $-\frac{1}{m}=-3$ 得 $m=\frac{1}{3}$.

∴ $B\subset A$ 的一个充分不必要条件是 $m=0$ 或 $m=-\frac{1}{2}$ 或 $m=\frac{1}{3}$.

2. 函　数

【映射】设 A、B 是两个集合,如果按照某个确定的对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素 a,集合 B 中都有唯一确定的元素 b 与它对应,那么这个对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f: A\to B$, b 叫做 a 的象,a 叫做

b的原象.

【一一映射】 设 A、B 是两个集合,f: $A\to B$ 是集合 A 到集合 B 的映射,如果在这个映射下,对于集合 A 中的不同元素,在集合 B 中有不同的象,而且 B 中的每一个元素都有原象,那么这个映射叫做集合 A 到集合 B 的一一映射.

【函数】 如果 A、B 都是非空数集,那么 A 到 B 的映射 f: $A\to B$ 就叫做 A 到 B 的函数,记作 $y=f(x)$, $x\in A$ 叫做函数的自变量,$y\in B$ 叫做函数的因变量. 自变量 x 的集合 A 叫做函数的定义域,因变量 y 的集合 $C(C\subseteq B)$ 叫做函数的值域.

定义域、对应法则和值域是函数概念的三大要素,而其中的值域是由定义域和对应法则决定的.

【函数的表示法】

1 **解析法:** 把两个变量 x、y 的函数关系用一个等式来表示,这个式子叫做函数的解析式,例如 $y=x^2$.

2 **列表法:** 把两个变量 x、y 的函数关系,通过列表格表示出来.

3 **图象法:** 把两个变量 x、y 的函数关系,在直角坐标系中用图象表示出来.

【分段函数】 函数 $y=f(x)$ 中,如果对于自变量在定义域中的不同取值,有着不同的对应法则,这样的函数通常称作分段函数,例如

$$y=f(x)=\begin{cases}-x & x\in[-1,0)\\ x+1 & x\in[0,1]\end{cases}$$

【反函数】 如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射 f: $A\to B$ 是 A 到 B 的一一映射,那么它的逆映射 f^{-1}: $B\to A$ 所确定的函数,叫做函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$,这里 y 是自变量,$y\in B$, x 是因变量, $x\in A$. 由于习惯上一般用 x 表示自变量,y 表示因变量,所以函数 $y=f(x)$ 的反函数一般都写成 $y=f^{-1}(x)$.

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是原函数的值域,它的值域是原函数的定义域. 互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y=x$ 对称.

例题

1. 下列函数中,$f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一函数的是(　　).

(A) $f(x)=\lg x \qquad g(x)=\frac{1}{2}\lg x^2$

(B) $f(x)=x \qquad g(x)=\sqrt{x^2}$

(C) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1} \qquad g(x)=\sqrt{x^2-1}$

(D) $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in(-1,0)\\ x-1 & x\in(0,1)\end{cases} \qquad g(x)=f^{-1}(x)$

例题

解：(A) $f(x)=\lg x$ 定义域 $x>0$，$g(x)=\frac{1}{2}\lg x^2$ 定义域 $x\neq 0$，

∴ $f(x)$、$g(x)$ 不是同一函数.

(B) $f(x)=x$　值域 $y\in\mathbf{R}$，$g(x)=\sqrt{x^2}$ 值域 $y\geqslant 0$

∴ $f(x)$、$g(x)$ 不是同一函数.

(C) $f(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$ 定义域 $x\geqslant 1$，$g(x)=\sqrt{x^2-1}$ 定义域 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$.

∴ $f(x)$、$g(x)$ 不是同一函数.

(D) 由 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in(-1,0)\\ x-1, & x\in(0,1)\end{cases}$ 的图象可以判定，其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象就是本身，

∴ $f(x)$、$g(x)$ 是同一函数；或由 $g(x)=f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & x\in(0,1)\\ x+1, & x\in(-1,0)\end{cases}$ 可以判定，$f(x)$、$g(x)$ 是同一函数.

故应选(D).

2. 若 $f(3x+1)=4x+3$，则 $f(x)=$ ________.

解法 1：换元法　令 $3x+1=t$　显然 $t\in\mathbf{R}$，$x=\frac{1}{3}(t-1)$；

∴ $f(t)=4\times\frac{1}{3}(t-1)+3=\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}$　即 $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$；

解法 2：配凑法　$f(3x+1)=4x+3=(3x+1)+x+2=(3x+1)+\frac{1}{3}(3x+1)+\frac{5}{3}$，

∴ $f(t)=t+\frac{1}{3}t+\frac{5}{3}=\frac{4}{3}t+\frac{5}{3}$　即 $f(x)=\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$.

3. 画出函数 $y=\frac{4x+2}{2x-3}$ 的图象

解：∵ $y=\frac{4x+2}{2x-3}=\frac{2(2x-3)+8}{2x-3}=2+\frac{8}{2x-3}=2+\frac{4}{x-\frac{3}{2}}$，

∴ 将函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象向右平移 $\frac{3}{2}$ 个单位，再向上平移 2 个单位，即得所求函数的图象.（如图 2 - 1）

例题

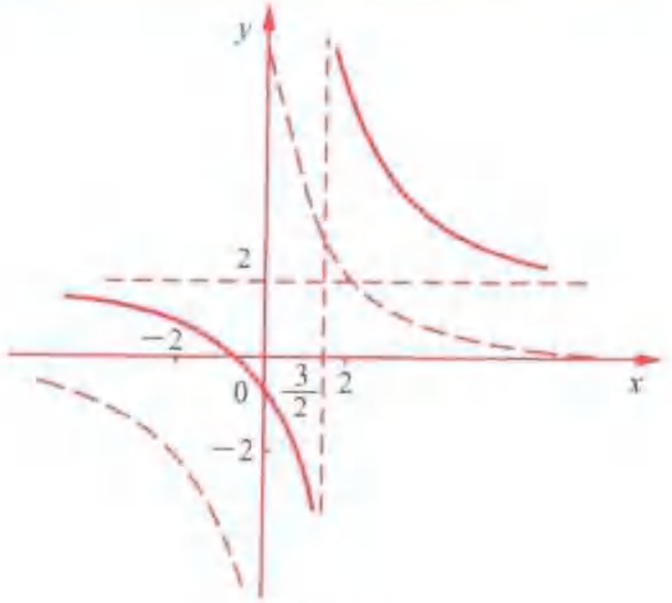


图 2-1

说明　对于分式函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$,先变形为 $y=p+\frac{r}{x-q}$ 的形式.再由函数 $y=\frac{r}{x}$ 的图象通过左右上下平移得到分式函数的图象.

【函数的单调性】

增函数： 对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说 $f(x)$在这个区间上是增函数.

减函数： 对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说 $f(x)$在这个区间上是减函数.

如果函数 $f(x)$在某个区间 D(D 是函数定义域的子集)上是增函数或是减函数,就说函数 $f(x)$是这个区间上的单调函数,区间 D 叫做单调区间.

【函数的奇偶性】

奇函数： 如果函数 $f(x)$对于定义域内任意一个值 x,都有$f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$叫做奇函数.

偶函数： 如果函数 $f(x)$对于定义域内任意一个值 x,都有$f(-x)=f(x)$,那么函数 $f(x)$叫做偶函数.

函数的奇偶性是函数整个定义域上的性质,若函数是奇函数或是偶函数,那么它的定义域一定关于原点对称.奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

【复合函数】 若以 x 为自变量的函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 M,值域为 N,又以 u 为自变量的函数 $y=f(u)$ 的定义域为 N,那么以 x 为自变量的函